Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2008–2009**

Corrigé du devoir n° 1

Ex 1. Sur la série harmonique alternée...

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la famille de réels définie par $nu_n = (-1)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $x > -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n, au point 0, à la fonction

$$f\ :\ ]-1,+\infty[\to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \ln(1+x),$$

indéfiniment dérivable en 0. Ainsi, il existe $\theta = \theta(x,n) \in]0,1[$ (qui dépend de x et de n) tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}x^k + \frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Or, on montre par récurence que pour tout entier $k \geq 1$, $f^k(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k}$ et donc $f^k(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. D'où

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

En particulier pour $x = 1$, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta = \theta(1,n) \in]0,1[$ tel que

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}.$$

On majore ensuite le reste :

$$\left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que les sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ont pour limite $\ln 2$ quand n tend vers $+\infty$ et donc que la série de terme général u_n converge et a pour somme $\ln 2$. Néanmoins, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable car la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente.

2) On considère la série formée en prenant dans la série de terme général u_n, dans l'ordre où ils apparaissent, un terme positif, un terme négatif, un terme positif, deux termes négatifs,..., le $p^{\text{ème}}$ terme positif puis 2^{p-1} termes négatifs, etc... Cette construction revient à permuter les termes de la série à l'aide d'une bijection ϕ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Cette bijection est donnée de la manière suivante :

étape 1 : 1 positif $\phi(1) = 1$ et un négatif $\phi(2) = 2$,
étape 2 : 1 positif $\phi(3) = 3$ et 2 négatifs $\phi(4) = 4$, $\phi(5) = 6$,
étape 3 : 1 positif $\phi(6) = 5$ et 4 négatifs $\phi(7) = 8$, $\phi(8) = 10$, $\phi(9) = 12$, $\phi(10) = 14$,...
étape p : 1 positif $\phi(2^{p-1} + p - 1) = 2p - 1$ et 2^{p-1} négatifs $\phi(2^{p-1} + p) = 2^p$, $\phi(2^{p-1} + p + 1) = 2^p + 2$,...,$\phi(2^p + p - 1) = 2(2^p - 1)$.

Il s'agit alors d'étudier la nouvelle série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\phi(n)}$. On étudie pour cela une sous suite de sommes partielles $(S_{2^p+p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$.

$$\begin{aligned} S_{2^p+p-1} = \sum_{n=1}^{2^p+p-1} u_{\phi(n)} &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2^p-1} \frac{1}{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=p+1}^{2^p-1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

On montre alors que S_{2^p+p-1} est la différence de deux termes dont l'un converge et l'autre diverge :

- $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$,
- et par comparaison avec une intégrale :
$$\sum_{k=p+1}^{2^p-1} \frac{1}{k} \geq \int_{p+1}^{2^p} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = p\left(\ln 2 - \frac{\ln(p+1)}{p}\right).$$
et donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{2^p-1} \frac{1}{k} = +\infty$.

En conclusion, $\lim_{p\to+\infty} S_{2^p+p-1} = -\infty$. Et donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\phi(n)}$ est divergente.

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k = \{2k-1, 4k-2, 4k\}$ et $w_k = \sum_{j\in I_k} u_j$. Vérifions que $(I_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une partition de $\mathbb{N}^*$.

- Premièrement, montrons que $\mathbb{N}^* = \cup_{k\in\mathbb{N}^*} I_k$.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
  – si n est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k - 1$ et donc $n \in I_k$
  – si n est pair alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k$ et k étant pair oui impair, il existe $k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 4k'$ ou $n = 4k' - 2$ et donc $n \in I_{k'}$.
  Finalement $\mathbb{N}^* \subset \cup_{k\in\mathbb{N}^*} I_k$.
- Deuxièmement, montrons que les ensembles $(I_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont disjoints.
  Soit $n \in I_k \cap I_{k'}$,
  – si n est impair alors $n = 2k - 1 = 2k' - 1$ et donc $k = k'$, – si n est pair alors $n = 0 mod 4$ et dans ce cas $n = 4k = 4k'$, ou $n = 2 mod 4$ et dans ce cas $n = 4k - 2 = 4k' - 2$; dans les deux cas $k = k'$. Donc si $k \neq k'$ alors $I_k \cap I_{k'} = \emptyset$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$,
$$w_k = \frac{1}{2k-1} - \left(\frac{1}{4k} + \frac{1}{4k-2}\right) = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{2}(u_{2k-1} + u_{2k}).$$
Ainsi,
$$\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(u_{2k-1} + u_{2k}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} u_k.$$

Et donc la suite $(\sum_{k=1}^{n} w_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $(\ln 2)/2$.

4) La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'étant pas sommable, on peut changer la nature de la série en permutant l'ordre de termes (question 2) : même si on prends « tous les termes » (en nombre infini !) mais dans un ordre différent, on peut « transformer » une série convergente en une série divergente. La série n'est pas commutativement convergente. De même, le principe de sommation par paquets ne s'applique plus (question 3).

Ex 2. Des petites cases, des petites cases, encore des petites cases...
On considère un damier rectangulaire ayant n cases dans un sens (lignes) et p dans l'autre (colonnes), donc np cases au total. Deux cases de ce damier seront dites voisines si elles se touchent par l'un de leurs côtés. On tire au hasard une à une et sans remise, q cases de ce damier, chaque case ayant la même probabilité d'être tirée parmi celles qui sont disponibles.
On note $P(n, p, q)$ la probabilité de l'événement suivant : « les q cases choisies sont deux à deux voisines ».

On a adopté la modélisation suivante : on choisit q cases parmi np cases et l'espace de probabilité $\Omega(n, p, q)$ est l'ensemble des parties à q éléments d'un ensemble à np éléments. L'ensemble $\Omega(n, p, q)$ est fini et contient C_{np}^{q} éléments. On munit Ω de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité P. Ainsi,

$$P(n, p, q) = \frac{\mathrm{Card}(A(n, p, q))}{C_{np}^{q}},$$

où $A(n, p, q)$ est l'événement « les q cases choisies sont deux à deux voisines ».

1) a) Déterminer $P(n, 1, 2)$.

<u>Solution</u> : Il y a C_n^2 possibilités de choisir deux cases parmi les n du damier, et pour choisir deux cases voisines, il suffit de choisir la “case du bas” par exemple parmi les $n-1$ cases possibles (faire un dessin). Par équiprobabilité, on obtient $P(n, 1, 2) = 2/n$.

b) Déterminer $P(3, 2, 2)$.

<u>Solution</u> : Il y a C_6^2 possibilités de choisir deux cases parmi les 6 du damier. Il y a 4 possibilités de choisir deux cases voisines verticalement et 3 possibilités de choisir deux cases voisines horizontalement, soit 7 possibilités de choisir deux cases voisines (faire un dessin). Par équiprobabilité, on obtient $P(3, 2, 2) = 7/15$.

2) a) On note $u(n, p)$ le nombre de choix de deux cases voisines sur le damier. Établir une relation de la forme $u(n, p+1) = u(n, p) + a_n$ où le nombre a_n ne dépend que de n et en déduire $u(n, p)$.

<u>Solution</u> : On sépare le damier à n lignes et p colonnes en deux parties, l'une de np cases et l'autre donc de n cases. Il y a $u(n, p)$ choix possibles pour que les cases voisines soient toutes deux dans la partie de np cases du damier. Il y a $n-1$ possibilités que les deux cases voisines soient dans la partie à n

cases et n possibilités que les deux cases soient à cheval sur les deux parties (faire un dessin). Donc $u(n, p+1) = u(n, p) + 2n - 1$. La suite $(u(n, p))_{p \geq 1}$ est une suite arithmétique de raison $2n - 1$ et de premier terme $n - 1$. Donc $u(n, p) = (2n - 1)(p - 1) + n - 1$.

b) En déduire $P(n, n, 2)$.

Solution : Par équiprobabilité, $P(n, n, 2) = \frac{u(n,n)}{C_{n^2}^2} = \frac{2n(n-1)}{C_{n^2}^2} = \frac{4}{n(n+1)}$.

3) Déterminer $P(n, 1, q)$, soit par récurrence, soit par une modélisation adéquate de l'expérience aléatoire.

Solution : Notons $u(n, 1, q)$ le nombre de choix de q cases deux à deux voisines dans un damier à n lignes et 1 colonne. Alors $u(n, 1, q) = u(n - 1, 1, q) + 1$ pour $n \geq q + 1$ et $u(q, 1, q) = 1$, donc $u(n, 1, q) = n - q + 1$. Par équiprobabilité, on obtient

$$P(n, 1, q) = \frac{n - q + 1}{C_n^q}.$$

On peut raisonner autrement : Choisisons “la case la plus en haut”, alors il n'y a plus de choix possibles pour les $q - 1$ autres cases. Il y a $n - q + 1$ choix possibles pour “la case la plus en haut” (pour pouvoir choisir les $q - 1$ cases restantes, il faut laisser $q - 1$ cases vers le bas). On conclut par équiprobabilité.

Ex 3. Des histoires de chocolat...

1) Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix}$$

avec $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$ et posons $A = -M + (a - b)I$ et $B = M - I$ où I est la matrice unité d'ordre 2.

a) Vérifier que $AB = BA = O$ où O est la matrice nulle d'ordre 2.

Solution : immédiat.

b) En déduire que $(a - b - 1)M^n = A + (a - b)^n B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : A partir des définitions des matrices A et B, nous avons

$$(a - b - 1)M = A + (a - b)B.$$

Nous pouvons élever cette égalité à la puissance $n$ième en utilisant la formule du binôme car A et B commutent

$$(a - b - 1)^n M^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (a - b)^k B^k A^{n-k}.$$

D'après 1)a), on a $B^k A^{n-k} = O$ pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$. Il en résulte que

$$(a-b-1)^n M^n = A^n + (a-b)^n B^n.$$

D'autre part, en raisonnant par récurrence à partir du cas $n = 2$ ou en utilsant la relation $A + B = (a-b-1)I$, on a

$$A^n = (a-b-1)^{n-1} A \quad \text{et} \quad B^n = (a-b-1)^{n-1} B.$$

On conclut alors que

$$(a-b-1) M^n = A + (a-b)^n B.$$

2) La règle de conduite pour la consommation journalière de chocolat est la suivante : Si le $n^{\text{ème}}$ jour il y a consommation de chocolat alors la probabilité d'en manger le $(n+1)^{\text{ème}}$ est de $1/2$ sinon cette probabilité est de $4/5$.
Nous supposons que le premier jour il n'y a pas de consommation de chocolat. Nous notons C_n l'événement « Manger du chocolat le $n^{\text{ème}}$ jour » et nous posons $u_n = \mathbb{P}(C_n)$ et $v_n = \mathbb{P}(C_n^c)$.

a) Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

<u>Solution</u> : On a, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_{n+1}) &= \mathbb{P}(C_{n+1} \cap C_n) + \mathbb{P}(C_{n+1} \cap C_n^c) \\ &= \mathbb{P}(C_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(C_{n+1}|C_n^c)\mathbb{P}(C_n^c).\end{aligned}$$

Ce qui donne la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{4}{5}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{5}v_n.$$

On rappelle que $u_1 = 0$ et $v_1 = 1$.

b) Montrer qu'il existe une matrice M telle que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

<u>Solution</u> : On vérifie que la matrice M suivante convient

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 4/5 \\ 1/2 & 1/5 \end{pmatrix}$$

c) Calculer u_n en fonction de n et en déduire la limite de u_n pour $n \to +\infty$.

<u>Solution</u> : Par récurrence, on a

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où la valeur de M^{n-1} est celle donnée par la question 1)b) avec $a = 1/2$ et $b = 4/5$ et ainsi nous obtenons, pour $n \geq 2$

$$u_n = \frac{8}{13}\left(1 - \left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}\right)$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{8}{13}.$$