Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2008–2009**

Devoir n^o 1

A rendre la semaine du 3 Novembre 2008

Le devoir est constitué de trois exercices indépendants.

Ex 1. Sur la série harmonique alternée...
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la famille de réels définie par $nu_n = (-1)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que pour tout $x > -1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

et en déduire que la série de terme général u_n converge et a pour somme ln 2. La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?

2) On considère la série formée en prenant dans la série de terme général u_n, dans l'ordre où ils apparaissent, un terme positif, un terme négatif, un terme positif, deux termes négatifs,..., le $p^{\text{ème}}$ terme positif puis 2^{p-1} termes négatifs, etc... Quelle est la nature de la série obtenue ?

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k = \{2k-1, 4k-2, 4k\}$ et $w_k = \sum_{j\in I_k} u_j$. Vérifier que $(I_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une partition de $\mathbb{N}^*$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $w_k = (u_{2k-1}+u_{2k})/2$. En déduire que la suite $(\sum_{k=1}^{n} w_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers (ln 2)/2.

4) Commenter les résultats obtenus.

Ex 2. Des petites cases, des petites cases, encore des petites cases...
On considère un damier rectangulaire ayant n cases dans un sens (lignes) et p dans l'autre (colonnes), donc np cases au total. Deux cases de ce damier seront dites voisines si elles se touchent par l'un de leurs côtés. On tire au hasard une à une et sans remise, q cases de ce damier, chaque case ayant la même probabilité d'être tirée parmi celles qui sont disponibles.
On note $P(n, p, q)$ la probabilité de l'événement suivant : « les q cases choisies sont deux à deux voisines ».

1) a) Déterminer $P(n, 1, 2)$.

b) Déterminer $P(3, 2, 2)$.

2) a) On note $u(n, p)$ le nombre de choix de deux cases voisines sur le damier. Établir une relation de la forme $u(n, p + 1) = u(n, p) + a_n$ où le nombre a_n ne dépend que de n et en déduire $u(n, p)$.

b) En déduire $P(n, n, 2)$.

3) Déterminer $P(n, 1, q)$, soit par récurrence, soit par une modélisation adéquate de l'expérience aléatoire.

Ex 3. Des histoires de chocolat...

1) Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$$

avec $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$ et posons $A = -M + (a-b)I$ et $B = M - I$ où I est la matrice unité d'ordre 2.

a) Vérifier que $AB = BA = O$ où O est la matrice nulle d'ordre 2.

b) En déduire que $(a-b-1)M^n = A + (a-b)^n B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) La règle de conduite pour la consommation journalière de chocolat est la suivante : Si le $n^{\text{ème}}$ jour il y a consommation de chocolat alors la probabilité d'en manger le $(n+1)^{\text{ème}}$ est de $1/2$ sinon cette probabilité est de $4/5$.
Nous supposons que le premier jour il n'y a pas de consommation de chocolat. Nous notons C_n l'événement « Manger du chocolat le $n^{\text{ème}}$ jour » et nous posons $u_n = \mathbb{P}(C_n)$ et $v_n = \mathbb{P}(C_n^c)$.

a) Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

b) Montrer qu'il existe une matrice M telle que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

c) Calculer u_n en fonction de n et en déduire la limite de u_n pour $n \to +\infty$.