Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2007–2008**

Devoir n° 1

A rendre au plus tard le 26 octobre 2007

Ex 1. *Probabilité de gagner un jeu sur son service au tennis*
On considère le modèle simplifié suivant du jeu de tennis[1] : le joueur A est au service et affronte B. Un « jeu » est constitué d'un certain nombre d' « échanges » et à la fin de chaque « échange », celui des deux joueurs qui a gagné l'échange marque un point. Le joueur qui gagne le « jeu » est le premier à totaliser au moins 4 points *avec* au moins deux points d'avance sur son adversaire. A peut donc gagner le jeu sur le score de 4 à 0, 4 à 1, 4 à 2, 5 à 3, 6 à 4,... On suppose que tous les échanges sont indépendants[2] et que lors de chaque échange, la probabilité p pour A de gagner le point reste constante. Notre objectif est de calculer en fonction de p la probabilité que A remporte le jeu. On introduit les notations d'événements suivantes.

$$\begin{aligned} G &= \{A \text{ gagne le jeu}\}, \\ A_n &= \{\ A \text{ gagne le } n\text{-ième échange }\}, \\ B_n &= \{\ B \text{ gagne le } n\text{-ième échange }\}, \\ E_{i,j} &= \{\text{Au bout de } i+j \text{ échanges, } A \text{ a } i \text{ points et } B \text{ en a } j\}. \end{aligned}$$

1) Expliquez la décomposition

$$G = E_{4,0} \cup E_{4,1} \cup E_{4,2} \cup \Big(\bigcup_{k=3}^{+\infty} E_{k+2,k} \Big).$$

2) Calculer $P(E_{4,0})$, $P(E_{4,1})$ et $P(E_{4,2})$. *Indication :* on remarquera que $E_{4,1} = A_5 \cap E_{3,1}$ et $E_{4,2} = A_6 \cap E_{3,2}$ et on utilisera l'indépendance des échanges.

3) Expliquer pourquoi pour tout $k \geq 3$, on a :

$$E_{k+2,k} = E_{3,3} \cap \Big(\bigcap_{j=4}^{k} C_j \Big) \cap A_{2k+1} \cap A_{2k+2},$$

où l'on a posé $C_j := (A_{2j-1} \cap B_{2j}) \cup (B_{2j-1} \cap A_{2j})$.

1. Il n'est pas nécessaire de connaître les règles classiques du tennis pour faire cet exercice. Elles sont rappelées dans l'énoncé sous une forme permettant de simplifier les écritures.

2. Cette hypothèse est faite pour des raisons de simplification, on pourra en discuter la pertinence après avoir résolu l'exercice.

4) Calculer $P(E_{3,3})$, puis $r = P(C_j)$. En déduire $P(E_{k+2,k})$.

5) Montrer que les $E_{k+2,k}$ sont deux à deux disjoints et calculer $P\Big(\bigcup_{k=3}^{+\infty} E_{k+2,k}\Big)$.

6) En déduire $P(G)$.

7) L'événement $N = \{$le jeu continue indéfiniment sans vainqueur$\}$ s'écrit :

$$N = E_{3,3} \cap \Big(\bigcap_{j=4}^{+\infty} C_j\Big).$$

Montrer que sa probabilité est nulle.

8) Compte tenu du résultat de la question précédente, pouvez vous donner sans calcul la valeur de $P(G)$ lorsque $p = 1/2$? Utilisez cette réponse pour tester la formule trouvée à la question 6.

Ex 2. *Sommes d'indicatrices indépendantes*

Dans cet exercice, le cadre de travail est un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ assez riche pour contenir notamment une suite infinie d'événements indépendants $(A_i)_{i\geq 1}$. On rappelle que si A est un événement (c'est-à-dire si $A \in \mathcal{F}$), la variable aléatoire indicatrice de A est la fonction définie sur Ω par :

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, $\mathbf{1}_A$ vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon. Soit $(A_i)_{i\geq 1}$ une suite d'événements *indépendants*. On note $p_i = P(A_i)$ et on suppose que :

$$a := \sum_{i=1}^{+\infty} p_i < +\infty.$$

Pour tout $n \geq 1$, on définit l'application $S_n : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}(\omega).$$

Le but de cet exercice est de prouver l'inégalité :

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^*, \quad P\Big(S_n \geq k\Big) \leq \frac{a^k}{k!}.$$

La dernière question propose une application de cette inégalité.

1) Que peut-on dire du cas $k > n$? On suppose dans la suite $k \leq n$.

2) On note $B_{n,k} := \{\omega \in \Omega;\ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}(\omega) \geq k\}$. Justifier l'inclusion

$$B_{n,k} \subset \bigcup_{\substack{F\subset\{1,\dots,n\} \\ \operatorname{card} F = k}} \bigcap_{i\in F} A_i.$$

3) En déduire que

$$P(B_{n,k}) \leq \sum_{\substack{F\subset\{1,\dots,n\}\\ \operatorname{card} F=k}} \prod_{i\in F} p_i.$$

4) On note $a_n := \sum_{i=1}^{n} p_i$. Montrer que

$$a_n^k \geq k! \sum_{\substack{F\subset\{1,\dots,n\}\\ \operatorname{card} F=k}} \prod_{i\in F} p_i.$$

Indication : On remarquera que

$$a_n^k = \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,n\}^k} p_{i_1}\cdots p_{i_k}.$$

5) Conclure.

6) *Application à un problème de tir.* Dans un stand de tir, une cible mobile traverse le champ visuel d'un tireur (une traversée par épreuve). À chaque épreuve, le tireur tire un coup sur la cible. D'une épreuve à la suivante, la vitesse de la cible augmente de 20%. On suppose que pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible est *inversement proportionnelle* à la vitesse de la cible. Elle vaut ainsi $p \in]0,1[$ pour le premier tir, $\frac{5}{6}p$ pour le second (pourquoi ?), etc. Les tirs sont supposés indépendants, le tireur dispose d'autant de cartouches qu'il le souhaite et le défi qu'il doit relever est celui de toucher au moins 20 fois la cible. En utilisant le résultat démontré ci-dessus, majorer sa probabilité de réussir (indépendamment de p).