Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2006–2007**

Devoir n° 1 *A rendre la semaine du 23 octobre 2006*

Le devoir est constitué de deux exercices dont le premier sert d'introduction au 2e. On « rappelle » qu'un nombre *décimal* est un rationnel qui peut s'écrire $\frac{k}{10^n}$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux. Cet ensemble est-il dénombrable ?

Par ailleurs tout nombre réel $x \in [0,1[$ admet (au moins) un *développement décimal illimité*, $x = 0, c_1c_2c_3 \dots c_n \dots$, les c_i étant des entiers de $\{0, 1, \dots, 9\}$. Ce développement signifie que x est la somme de la série convergente $\sum_{i=1}^{+\infty} c_i 10^{-i}$.

Ex 1. Développement(s) décimaux d'un réel

En calculant une somme de série, vérifier que le nombre réel[1] 0,379 999 999 999 ... est égal au nombre 0,38.

L'écriture 0,379 999 999 999 ... porte le nom de « développement décimal illimité impropre » du nombre 0,38. On appelle « développement décimal illimité propre » d'un réel x, un développement qui ne comporte pas la répétition indéfinie du chiffre 9 à partir d'un certain rang. Par exemple 0,380 000 000 000 ... est le développement décimal illimité propre de 0,38. Y a-t-il des nombres réels qui n'ont pas de développement décimal illimité impropre ? Lesquels ?

Ex 2. Tirer au hasard un nombre réel

On décide de « tirer au hasard » un réel $x \in [0,1[$. Pour cela on effectue — par la pensée ! — une infinité de tirages avec remise dans une urne contenant des boules marquées chacune d'un chiffre décimal. On construit x en écrivant — toujours par la pensée — son développement décimal illimité, le numéro sorti au i^{e} tirage fournissant le i^{e} chiffre décimal de x. La composition précise de l'urne est inconnue. On sait seulement qu'il y a au moins une boule marquée 0, qu'il n'y a aucune boule marquée 9 et qu'il y a au moins une boule marquée d'un autre chiffre que 0. Comme aucune boule dans l'urne n'est marquée 9, le développement décimal illimité ainsi obtenu est forcément propre. On note p la probabilité de sortir une boule marquée 0 au i^{e} tirage. En raison du mode de tirage (une boule avec remise) et de la composition de l'urne, il est clair que p ne dépend pas de i et que $0 < p < 1$.

Pour chaque i de $\mathbb{N}^*$ on note N_i l'événement :

$$N_i := \{\text{le } i^{\text{e}} \text{ chiffre de } x \text{ après la virgule est un zéro}\}$$

1. Les points de suspension dans cette écriture signifient que le dernier chiffre écrit (ici 9) se répète jusqu'à l'infini. C'est une façon commode de noter un développement décimal illimité périodique dont la période se réduit à un seul chiffre. Pour des développements ayant une période plus longue, on surlignera la période, comme dans l'écriture 0,156 171 717 $\overline{17}$ ..., où la séquence 17 se répète jusqu'à l'infini.

Les N_i sont indépendants et tous de probabilité p.

1) Exprimer par des opérations ensemblistes sur les N_i les événements :

$D_n :=$ {l'écriture décimale illimitée de x ne comporte que des zéros à partir du rang n},
$D :=$ {x est un nombre décimal },
$E :=$ {l'écriture de x comporte une infinité de zéros}.

Comparer D et E.

2) Donner $P(\{x < 10^{-4}\})$. Les N_i, $i \in \mathbb{N}^*$, sont-ils deux à deux disjoints ?

3) Calculer la probabilité de l'évènement

$$F_n := \{\text{le premier chiffre non-nul après la virgule est au rang } n\}.$$

Les F_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont-ils deux à deux disjoints ?

4) Écrire $\bigcup_{i=1}^{+\infty} N_i^c$ à l'aide des F_n et calculer sa probabilité. En déduire $P(\{x = 0\})$.

5) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, calculer la valeur de $P(D_m)$. On pourra utiliser la monotonie de la suite $(G_n)_{n \geq m}$ où $G_n := \bigcap_{i=m}^{n} N_i$.

6) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre décimal avec ce type de tirage aléatoire ?

7) Reprendre la question précédente avec une urne dans laquelle on a rajouté une boule numerotée 9.