



Devoir n° 1

à rendre durant la semaine du 24 octobre.

Ex 1. Probabilité de gagner un jeu sur son service au tennis

On considère le modèle simplifié suivant du jeu de tennis¹ : le joueur A est au service et affronte B . Un « jeu » est constitué d'un certain nombre d'« échanges » et à la fin de chaque « échange », celui des deux joueurs qui a gagné l'échange marque un point. Le joueur qui gagne le « jeu » est le premier à totaliser au moins 4 points *avec* au moins deux points d'avance sur son adversaire. A peut donc gagner le jeu sur le score de 4 à 0, 4 à 1, 4 à 2, 5 à 3, 6 à 4, ... On suppose que tous les échanges sont indépendants et que lors de chaque échange la probabilité pour A de gagner le point reste constante et vaut p . Notre objectif est de calculer en fonction de p la probabilité que A remporte le jeu. On introduit les notations d'événements suivantes.

$$\begin{aligned}G &= \{A \text{ gagne le jeu}\}, \\A_n &= \{A \text{ gagne le } n\text{-ième échange}\}, \\B_n &= \{B \text{ gagne le } n\text{-ième échange}\}, \\E_{i,j} &= \{\text{Au bout de } i+j \text{ échanges, } A \text{ a } i \text{ points et } B \text{ en a } j\}.\end{aligned}$$

- 1) Expliquez la décomposition

$$G = E_{4,0} \cup E_{4,1} \cup E_{4,2} \cup \left(\bigcup_{k=3}^{+\infty} E_{k+2,k} \right).$$

- 2) Calculer $P(E_{4,0})$, $P(E_{4,1})$ et $P(E_{4,2})$. *Indication* : on remarquera que $E_{4,1} = A_5 \cap E_{3,1}$ et $E_{4,2} = A_6 \cap E_{3,2}$ et on utilisera l'indépendance des échanges.

- 3) Expliquer pourquoi pour tout $k \geq 3$, on a :

$$E_{k+2,k} = E_{3,3} \cap \left(\bigcap_{j=4}^k C_j \right) \cap A_{2k+1} \cap A_{2k+2},$$

où l'on a posé $C_j := (A_{2j-1} \cap B_{2j}) \cup (B_{2j-1} \cap A_{2j})$.

- 4) Calculer $P(E_{3,3})$, puis $r = P(C_j)$. En déduire $P(E_{k+2,k})$.

1. Il n'est pas nécessaire de connaître les règles classiques du tennis pour faire cet exercice. Elles sont rappelées dans l'énoncé sous une forme permettant de simplifier les écritures.

- 5) Montrer que les $E_{k+2,k}$ sont deux à deux disjoints et calculer $P\left(\bigcup_{k=3}^{+\infty} E_{k+2,k}\right)$.
- 6) En déduire $P(G)$.
- 7) L'événement $N = \{\text{le jeu continue indéfiniment sans vainqueur}\}$ s'écrit :

$$N = E_{3,3} \cap \left(\bigcap_{j=4}^{+\infty} C_j\right).$$

Montrer que sa probabilité est nulle.

8) Compte tenu du résultat de la question précédente, pouvez vous donner sans calcul la valeur de $P(G)$ lorsque $p = 1/2$? Utilisez cette réponse pour tester la formule trouvée à la question 6.