Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPÉ Math306 **Année 2005-2006**

Corrigé de l'Examen 1re session, janvier 2006

Ex 1. *Échauffement graphique (4 points)*

La variable aléatoire X a pour fonction de répartition F dont le graphe est représenté par la figure 1.

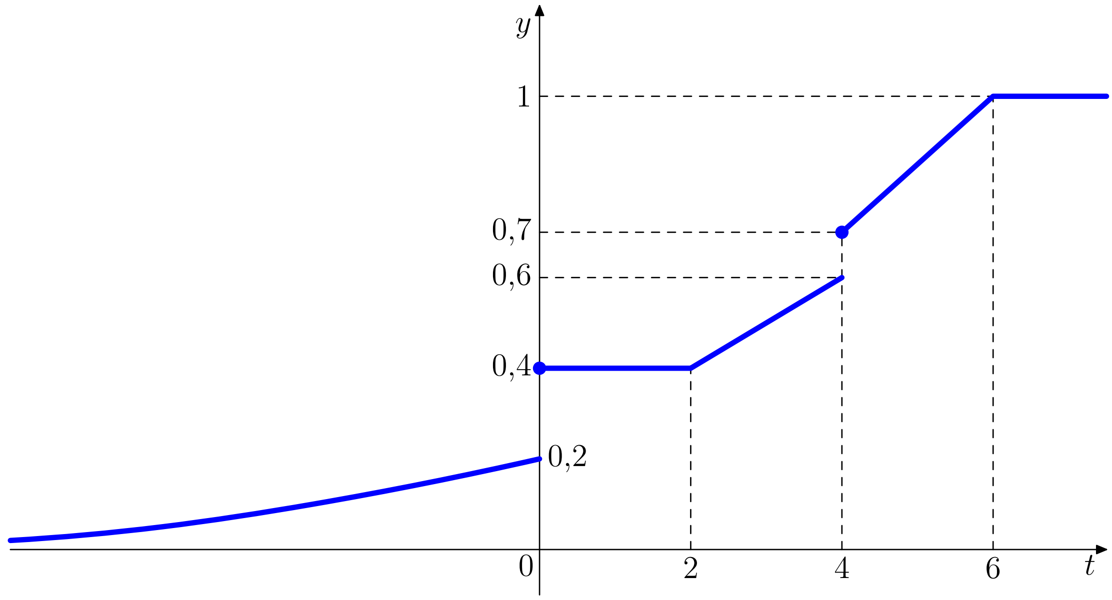

FIG. 1 – Fonction de répartition F

1) Calcul de quelques probabilités par simple lecture du graphe de F.

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= F(0) - F(0-) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2.\\
P(X \geq 0) &= 1 - P(X<0) = 1 - F(0-) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.\\
P(4 \leq X \leq 6) &= P(X \leq 6) - P(X < 4) = F(6) - F(4-) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.\\
P(0 < X < 4) &= P(X < 4) - P(X \leq 0) = F(4-) - F(0) = 0{,}6 - 0{,}4 = 0{,}2.\\
P(X \geq 6) &= 1 - P(X < 6) = 1 - F(6-) = 1 - F(6) = 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

2) Calcul de $\mathbf{E}(X^+)$. On sait que $\mathbf{E}(X^+) = \int_0^{+\infty}(1-F(t))\,\mathrm{d}t$ et comme $F(t)$ vaut 1 pour $t \geq 6$, cette intégrale généralisée se réduit à une intégrale de Riemann ordinaire :

$$\mathbf{E}(X^+) = \int_0^6 (1-F(t))\,\mathrm{d}t.$$

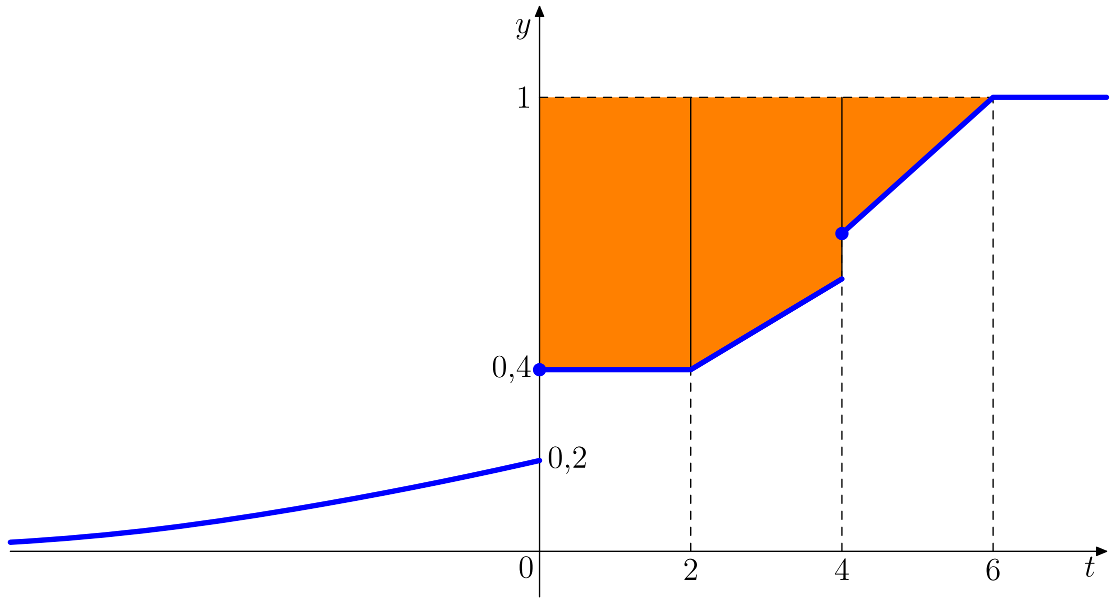

FIG. 2 – Interprétation de $\mathbf{E}(X^+)$ comme une aire

Cette intégrale s'interprète comme l'aire $\lambda_2(A)$ où A est le domaine colorié de la figure 2.

La région A se découpe en un rectangle ($0 \leq t \leq 2$), un trapèze ($2 \leq t \leq 4$) et un triangle rectangle ($4 \leq t \leq 6$), d'où en additionnant les trois aires correspondantes :

$$\mathbf{E}(X^+) = \lambda_2(A) = 2 \times 0{,}6 + 2 \times \frac{0,6+0,4}{2} + \frac{2 \times 0{,}3}{2} = 2{,}5.$$

Ex 2. *La formule de Poincaré via l'espérance*

1) On commence par établir la formule algébrique suivante où $x_1, \dots, x_n$ sont des nombres réels quelconques.

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{\operatorname{card} I} \prod_{i \in I} x_i. \tag{1}$$

Dans cette formule la collection de tous les sous-ensembles I de $\{1, \dots, n\}$ qui indexe le $\sum$ comprend en particulier $I = \emptyset$ pour lequel on pose par convention $\prod_{i\in\emptyset} x_i := 1$.

a) Regardons le cas $n = 3$.

$$\begin{aligned}(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) &= (1 - x_1)(1 - x_2) - (1 - x_1)(1 - x_2)x_3\\ &= 1 - x_1 - x_2 + x_1x_2 - (1 - x_1 - x_2 + x_1x_2)x_3\\ &= 1 - x_1 - x_2 + x_1x_2 - x_3 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2x_3\\ &= 1 - \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{\substack{\operatorname{card} I=1\\ I=\{1\},\, I=\{2\},\, I=\{3\}}} + \underbrace{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}_{\substack{\operatorname{card} I=2\\ I=\{1,2\},\, I=\{1,3\},\, I=\{2,3\}}} - \underbrace{x_1x_2x_3}_{\substack{\operatorname{card} I=3\\ I=\{1,2,3\}}}.\end{aligned}$$

Le premier terme « 1 » correspond à $\operatorname{card} I = 0$, d'où $I = \emptyset$.

b) Pour démontrer la formule (1), on peut raisonner par récurrence. Il est clair que la formule est vraie pour $n = 1$. Supposons la vraie au rang n et montrons qu'elle le reste au rang $n + 1$. Posons $\pi_n := \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}\pi_{n+1} = \pi_n(1 - x_{n+1}) &= \pi_n - x_{n+1}\pi_n \\ &= \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{\operatorname{card} I} \prod_{i\in I} x_i + \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{1+\operatorname{card} I} x_{n+1} \prod_{i\in I} x_i.\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que l'on peut écrire pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$

$$(-1)^{1+\operatorname{card} I} x_{n+1} \prod_{i\in I} x_i = (-1)^{\operatorname{card} J} \prod_{i\in J} x_i, \text{ avec } J := I \cup \{x_{n+1}\}.$$

Les sous-ensembles K de $\{1, \dots, n + 1\}$ se répartissent en deux sous-familles :
- ceux qui ne contiennent pas x_{n+1}, ce sont les sous-ensembles I de $\{1, \dots, n\}$,
- ceux qui contiennent x_{n+1}, ils peuvent s'écrire de manière unique sous la forme $J = I \cup \{x_{n+1}\}$, où $I \subset \{1, \dots, n\}$.

On en déduit que

$$\sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{\operatorname{card} I} \prod_{i\in I} x_i + \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{1+\operatorname{card} I} x_{n+1} \prod_{i\in I} x_i = \sum_{K\subset\{1,\dots,n+1\}} (-1)^{\operatorname{card} K} \prod_{i\in K} x_i.$$

Par conséquent π_{n+1} vérifie (1), ce qui achève la récurrence.

2) *Indicatrice d'une intersection*

Soient $B_1, \dots, B_k$, k sous-ensembles de Ω et $B := \bigcap_{j=1}^{k} B_j$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\mathbf{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in \bigcap_{j=1}^{k} B_j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B_j,\ \forall j = 1, \dots, k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbf{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{1}_{B_j}(\omega) = 1,\ \forall j = 1, \dots, k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

D'autre part $\left(\prod_{j=1}^{k} \mathbf{1}_{B_j}\right)(\omega) = \prod_{j=1}^{k} \mathbf{1}_{B_j}(\omega)$ est le produit de k facteurs, chacun pouvant valoir 1 ou 0. Ce produit vaut donc 1 si tous ses facteurs valent 1 et zéro sinon puisqu'alors au moins un de ses facteurs vaut 0. Autrement dit,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \left(\prod_{j=1}^{k} \mathbf{1}_{B_j}\right)(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{1}_{B_j}(\omega) = 1,\ \forall j = 1, \dots, k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3}$$

La comparaison de (2) et (3) nous donne l'égalité de fonctions :

$$\mathbf{1}_B = \prod_{j=1}^{k} \mathbf{1}_{B_j}, \quad \text{où } B := \bigcap_{j=1}^{k} B_j. \tag{4}$$

3) Soit $A_1,\dots A_n$ une suite finie dans $\mathcal{F}$ ($n>1$) et posons pour tout i, $B_i := A_i^c$, d'où $\bigl(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\bigr)^c = \overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} B_i =: B$. En rappelant que la probabilité d'un évènement est égale à l'espérance de son indicatrice, on peut écrire :

$$P\Bigl(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\Bigr) = 1 - P(B) = 1 - \mathbf{E}\mathbf{1}_B.$$

En utilisant (4) et le fait que $\mathbf{1}_{A_i^c} = 1 - \mathbf{1}_{A_i}$, on en déduit :

$$P\Bigl(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\Bigr) = 1 - \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n (1-\mathbf{1}_{A_i})\right). \tag{5}$$

4) Soit ω quelconque dans Ω. En appliquant (1) avec $x_i = \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$, on obtient

$$\left(\prod_{i=1}^n (1-\mathbf{1}_{A_i})\right)(\omega) = \prod_{i=1}^n \bigl(1-\mathbf{1}_{A_i}(\omega)\bigr) = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{\operatorname{card} I} \prod_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i}(\omega).$$

Ceci étant vrai pour tout ω, on en déduit l'égalité entre variables aléatoires :

$$\prod_{i=1}^n (1-\mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{\operatorname{card} I} \prod_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{\operatorname{card} I} \mathbf{1}_{\underset{i\in I}{\cap} A_i}, \tag{6}$$

où la dernière égalité utilise (4) avec $k = \operatorname{card} I \geq 1$. Le cas particulier $I=\emptyset$ nous donne le terme 1 car une intersection indexée par l'ensemble vide est égale à Ω tout entier (puisqu'il n'y a aucune condition restrictive pour l'appartenance à cet ensemble) et l'indicatrice de Ω est la fonction constante 1.

En reportant (6) dans (5) et en utilisant la linéarité de l'espérance (noter que toutes les variables aléatoires concernées sont bornées donc ont une espérance), on obtient :

$$P\Bigl(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\Bigr) = 1 - \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{\operatorname{card} I} \mathbf{E}\Bigl(\mathbf{1}_{\underset{i\in I}{\cap} A_i}\Bigr) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{1+\operatorname{card} I} \mathbf{E}\Bigl(\mathbf{1}_{\underset{i\in I}{\cap} A_i}\Bigr).$$

En utilisant à nouveau le fait que l'espérance de l'indicatrice d'un évènement est égale à la probabilité de cet évènement, on en déduit la formule de Poincaré :

$$\forall A_1,\dots,A_n \in \mathcal{F},\qquad P\Bigl(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\Bigr) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{1+\operatorname{card} I} P\Bigl(\underset{i\in I}{\cap} A_i\Bigr). \tag{7}$$

Ex 3. *Espérance du min et du max de deux v.a. uniformes*

Soient X et Y deux variables aléatoires *positives* définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$, toutes deux de loi uniforme sur $[0,1]$. On s'intéresse à l'espérance des variables aléatoires $\min(X,Y)$ et $\max(X,Y)$.

1) Puisque X et X^2 sont des v.a. positives, leur espérance existe au moins dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, leur calcul montrera en fait qu'elles sont finies [1]. On sait que la loi uniforme sur $[0,1]$ admet pour densité $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$. On a donc

$$\mathbf{E}X = \int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

De même

$$\mathbf{E}X^2 = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2) Pour tous réels x et y, on a $\min(x,y) + \max(x,y) = x + y$: ajouter le plus petit et le plus grand de deux nombres revient à ajouter ces deux nombres. En appliquant ceci avec $x = X(\omega)$ et $y = Y(\omega)$ pour ω quelconque dans Ω, on en déduit l'égalité entre variables aléatoires positives :

$$\min(X,Y) + \max(X,Y) = X + Y.$$

Par additivité de l'espérance des v.a. positives, on en déduit

$$\mathbf{E}\min(X,Y) + \mathbf{E}\max(X,Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y.$$

Comme X et Y ont même loi, elles ont même espérance, ici $1/2$, d'où

$$\mathbf{E}\min(X,Y) + \mathbf{E}\max(X,Y) = 1. \tag{8}$$

D'autre part pour tous réels x et y, on a $|x-y| = \max(x,y) - \min(x,y)$ et on en déduit comme ci-dessus que :

$$|X-Y| = \max(X,Y) - \min(X,Y).$$

Il résulte de (8) que les variables aléatoires réelles $\min(X,Y)$ et $\max(X,Y)$ ont des espérances dans $\mathbb{R}$ (en fait dans $[0,1]$). On peut donc appliquer ici la linéarité de l'espérance pour obtenir :

$$\mathbf{E}|X-Y| = \mathbf{E}\max(X,Y) - \mathbf{E}\min(X,Y). \tag{9}$$

En éliminant l'un des deux nombres $\mathbf{E}\max(X,Y)$ ou $\mathbf{E}\min(X,Y)$ entre (8) et (9), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|X-Y| &= 1 - 2\mathbf{E}\min(X,Y), && (10)\\ \mathbf{E}|X-Y| &= 2\mathbf{E}\max(X,Y) - 1. && (11) \end{aligned}$$

3) On a clairement $\min(X,Y) \leq X \leq \max(X,Y)$, d'où par croissance de l'espérance des v.a. positives :

$$\mathbf{E}\min(X,Y) \leq \mathbf{E}X = \frac{1}{2} \leq \mathbf{E}\max(X,Y). \tag{12}$$

1. Cette finitude est claire avant même le calcul parce que ces v.a. *positives* vérifient $P(X \leq 1) = 1$ et $P(X^2 \leq 1) = 1$.

Les inégalités dans (12) peuvent être des égalités, par exemple si $X = Y$ (égalité de deux variables aléatoires). En fait c'est essentiellement le seul cas où il puisse y avoir égalité dans (12). Supposons en effet que $\mathbf{E}\min(X,Y) = 1/2$, alors par (10), $\mathbf{E}|X-Y| = 0$, ce qui implique que $X = Y$ presque sûrement : $P(X = Y) = 1$, par un corollaire classique de l'inégalité de Markov pour les v.a. positives (corollaire 4.17 dans le cours 2005-2006). On a alors $\mathbf{E}\max(X,Y) = 1/2$ à cause de (11). De même si on suppose que $\mathbf{E}\max(X,Y) = 1/2$, on en déduit par (11) que $|X-Y| = 0$ d'où $X = Y$ p.s. et $\mathbf{E}\min(X,Y) = 1/2$ par (10). En résumé, dans (12) les inégalités sont strictes sauf si $X = Y$ presque-sûrement, auquel cas elles deviennent des égalités.

4) *Calcul de* $\mathbf{E}\min(X,Y)$, $\mathbf{E}\max(X,Y)$ *et* $\mathbf{E}|X-Y|$ *pour* X *et* Y *indépendantes* L'inégalité $\min(X,Y) > t$ équivaut à ($X > t$ et $Y > t$). Cette équivalence se traduit par l'égalité d'évènements :

$$\{\min(X,Y) > t\} = \{X > t\} \cap \{Y > t\}.$$

On a donc $P(\min(X,Y) > t) = P(\{X > t\} \cap \{Y > t\})$. Comme on sait de plus que X et Y sont indépendantes, les évènements $\{X > t\}$ et $\{Y > t\}$ le sont aussi, d'où :

$$P(\min(X,Y) > t) = P(X > t)P(Y > t) = \big(1 - F(t)\big)^2,$$

la deuxième égalité utilisant le fait que X et Y ont même loi de f.d.r. F. Cette loi est la loi uniforme sur $[0,1]$, donc

$$F(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

On en déduit que pour tout $t \geq 0$, $\big(1 - F(t)\big)^2 = \big((1-t)\mathbf{1}_{[0,1]}(t)\big)^2 = (1-t)^2\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$. Comme $\min(X,Y)$ est une v.a. positive, on a

$$\mathbf{E}\min(X,Y) = \int_0^{+\infty} P(\min(X,Y) > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}.$$

Grâce à (8) et (9), on en déduit :

$$\mathbf{E}\max(X,Y) = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{E}|X-Y| = \frac{1}{3}.$$

Une autre façon d'énoncer le résultat obtenu est de dire que si l'on choisit deux points au hasard sur $[0,1]$ (*i.e.* suivant la loi uniforme et indépendamment), les longueurs aléatoires des trois segments ainsi découpés dans $[0,1]$ ont chacune pour espérance $1/3$.

Ex 4. *Espérance des statistiques d'ordre*

1) *Question préliminaire.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $j = 0, 1, \dots, n$, on pose

$$I_{j,n} := \int_0^1 t^j (1-t)^{n-j}\,\mathrm{d}t.$$

Le calcul de $I_{n,n}$ est immédiat :

$$I_{n,n} = \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

En intégrant par parties $I_{j,n}$ pour $j = 0, \dots, n-1$, il vient

$$I_{j,n} = \left[\frac{t^{j+1}}{j+1}(1-t)^{n-j}\right]_0^1 + \frac{n-j}{j+1}\int_0^1 t^{j+1}(1-t)^{n-j-1}\,\mathrm{d}t,$$

d'où

$$I_{j,n} = \frac{n-j}{j+1} I_{j+1,n}.$$

En itérant cette égalité pour $j, j+1, j+2, \dots, n-1$, on en déduit :

$$I_{j,n} = \frac{n-j}{j+1} \times \frac{n-j-1}{j+2} \times \dots \dots \times \frac{1}{n} \times I_{n,n} = \frac{(n-j)!}{\frac{n!}{j!}} \times \frac{1}{n+1},$$

d'où

$$I_{j,n} = \frac{j!(n-j)!}{(n+1)!}. \tag{13}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on note $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires *positives*, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *indépendantes et de même loi*, donc de même fonction de répartition notée F. Le but de ce problème est de calculer l'espérance des variables aléatoires $X_{n:1}, \dots X_{n:n}$ obtenues par réarrangement croissant de $X_1, \dots, X_n$ et appelées *statistiques d'ordre*. Plus précisément, pour tout $\omega \in \Omega$, on a *l'égalité des ensembles* $\{X_{n:k}(\omega);\, k = 1, \dots, n\}$ et $\{X_k(\omega);\, k = 1, \dots, n\}$ et de plus

$$\forall k = 1, \dots, n-1, \quad X_{n:k}(\omega) \leq X_{n:k+1}(\omega).$$

En particulier, $X_{n:1} = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$.

2) Soit I une partie non vide de $\{1, \dots, n\}$ et

$$p_I(x) := P(\forall i \in I,\ X_i \leq x \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus I,\ X_i > x).$$

Cette probabilité peut s'écrire

$$p_I(x) = P\Big(\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{i \in \{1,\dots,n\}\setminus I} A_i^c\Big),$$

en introduisant pour x fixé et $i = 1, \dots, n$ les évènements

$$A_i := \{X_i \leq x\}, \quad A_i^c = \{X_i > x\}.$$

Ces évènements héritent de l'indépendance des X_i et pour tout i, $P(A_i) = P(X_i \leq x) = F(x)$, $P(A_i^c) = P(X_i > x) = 1 - F(x)$. Par conséquent

$$p_I(x) = \prod_{i \in I} P(A_i) \times \prod_{i \in \{1,\dots,n\}\setminus I} P(A_i^c) = F(x)^{\operatorname{card} I}\big(1 - F(x)\big)^{n - \operatorname{card} I}. \tag{14}$$

3) *Calcul de F_k, f.d.r. de $X_{n:k}$.*
Avec les notations de la question précédente, posons pour $I \subset \{1, \dots, n\}$

$$B_I := \underset{i\in I}{\cap} A_i \cap \underset{i\in\{1,\dots,n\}\setminus I}{\cap} A_i^c.$$

On remarque que « $X_{n:k} \leq x$ » est équivalent à « au moins k parmi les X_i sont inférieurs ou égaux à x ». Ceci peut encore s'écrire

$$\{X_{n:k} \leq x\} = \bigcup_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \operatorname{card} I\geq k}} B_I = \bigcup_{j=k}^{n} \bigcup_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \operatorname{card} I=j}} B_I.$$

Les B_I sont deux à deux disjoints car si $I \neq I'$, il existe un indice i_0 appartenant à l'un de ces deux ensembles mais pas à l'autre et $B_I \cap B_{I'} \subset A_{i_0} \cap A_{i_0}^c = \emptyset$. On en déduit que

$$P(X_{n:k} \leq x) = \sum_{j=k}^{n} \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \operatorname{card} I=j}} P(B_I).$$

D'après (13), $P(B_I) = p_I(x)$ ne dépend de I que par $\operatorname{card} I$ et comme il y a exactement C_n^j parties de $\{1, \dots, n\}$ ayant pour cardinal j, on obtient

$$\forall x \geq 0, \quad F_k(x) = P\bigl(X_{n:k} \leq x\bigr) = \sum_{j=k}^{n} C_n^j F(x)^j \bigl(1 - F(x)\bigr)^{n-j}. \tag{15}$$

4) Dans la somme $\sum_{j=k}^{n}$ ci-dessus, on reconnaît un morceau du développement de $\bigl(F(x) + (1 - F(x))\bigr)^n$ par la formule du binôme de Newton. Plus précisément on a

$$\begin{aligned} 1 = \bigl(F(x) + (1 - F(x))\bigr)^n &= \sum_{j=0}^{n} C_n^j F(x)^j \bigl(1 - F(x)\bigr)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j F(x)^j \bigl(1 - F(x)\bigr)^{n-j} + \sum_{j=k}^{n} C_n^j F(x)^j \bigl(1 - F(x)\bigr)^{n-j}. \end{aligned}$$

Compte-tenu de (15), on a donc

$$\forall x \geq 0, \quad 1 - F_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j F(x)^j \bigl(1 - F(x)\bigr)^{n-j}. \tag{16}$$

En intégrant sur $[0, +\infty[$ cette égalité entre fonctions positives localement Riemann intégrables, on obtient :

$$\mathbf{E}X_{n:k} = \int_0^{+\infty} (1 - F_k(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j \int_0^{+\infty} F(x)^j \bigl(1 - F(x)\bigr)^{n-j}\,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

5) On suppose dans cette question que les X_i suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Dans ce cas $F(x) = x$ pour $x \in [0,1]$ et $F(x) = 1$ pour $x > 1$. En particulier $1 - F$ est nulle sur $[1, +\infty[$. On peut alors calculer explicitement les intégrales de la formule (17) qui se réduisent toutes [2] à des intégrales sur $[0,1]$:

$$\mathbf{E}X_{n:k} = \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j \int_0^1 x^j (1-x)^{n-j} \,\mathrm{d}x$$

On reconnaît les intégrales $I_{j,n}$ calculées dans la question préliminaire, d'où

$$\mathbf{E}X_{n:k} = \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j \frac{j!(n-j)!}{(n+1)!} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{j!(n-j)!}{(n+1)!} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n+1}.$$

Cette dernière somme est constituée de k termes tous égaux à $1/(n+1)$. Finalement on obtient

$$\mathbf{E}X_{n:k} = \frac{k}{n+1}. \tag{18}$$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit immédiatement les espérances des espacements $Y_{n,k} := X_{n:k+1} - X_{n:k}$:

$$\mathbf{E}Y_{n,k} = \mathbf{E}X_{n:k+1} - \mathbf{E}X_{n:k} = \frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n+1} = \frac{1}{n+1}. \tag{19}$$

Ce résultat généralise celui de l'exercice 3-4) qui traitait le cas $n = 2$.

6) On suppose dans cette question que les X_i suivent la loi exponentielle de paramètre 1. On a donc pour tout $x \geq 0$, $P(X_i > x) = \mathrm{e}^{-x}$. On peut calculer les intégrales $\int_0^{+\infty} F(x)^j \big(1 - F(x)\big)^{n-j} \,\mathrm{d}x$ en faisant le changement de variable $u = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ (croissant et C^1) dans cette intégrale généralisée de fonction positive, ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} F(x)^j \big(1 - F(x)\big)^{n-j} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 u^j (1-u)^{n-j} \frac{\mathrm{d}u}{1-u} = \int_0^1 u^j (1-u)^{n-1-j} \,\mathrm{d}u = I_{j,n-1}.$$

En reportant ce résultat dans (17), il vient

$$\mathbf{E}X_{n:k} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{j!(n-1-j)!}{n!} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n-j}.$$

En particulier

$$\mathbf{E} \min_{i \leq n} X_i = \frac{1}{n}, \quad \mathbf{E} \max_{i \leq n} X_i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

7) Supposons que la variable aléatoire positive X_1 est *intégrable*. Les X_i ayant même loi sont donc toutes intégrables et de même espérance finie. Pour montrer que chacune

2. Notons que $n - j \geq 1$ pour tout $j = 0, \dots k-1 < n$. Pour $j = n$, $(1-F)^{n-j} = (1-F)^0$ est la fonction constante 1 qui ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$.

des v.a. positives $X_{n:k}$ est intégrable, on remarque que $0 \leq X_{n:k} \leq X_{n:n} = \max_{i\leq n} X_i$. Il suffit donc de vérifier l'intégrabilité de $\max_{i\leq n} X_i$. Cette intégrabilité résulte de l'inégalité suivante et des propriétés de croissance et d'additivité de l'espérance des v.a. positives :

$$0 \leq \max_{i\leq n} X_i \leq \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

d'où

$$0 \leq \mathbf{E} \max_{i\leq n} X_i \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E} X_i = n\mathbf{E} X_1 < +\infty.$$

8) On suppose dans cette question que F est C^1 sur $[0, +\infty[$, continue en zéro et on note f sa dérivée. La fonction de répartition F_k est alors continue sur $\mathbb{R}$, C^1 par morceaux comme composée par un polynôme de la fonction F elle même continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux. On sait qu'alors la loi correspondante admet une densité f_k qui s'obtient par dérivation de F_k (sauf peut-être au point de raccord 0). La fonction F_k est nulle en tout point de $]-\infty, 0[$, donc $f_k = F_k'$ aussi. Pour $x > 0$, en dérivant dans (15), on obtient

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \sum_{j=k}^{n} \Big(C_n^j F(x)^j \big(1 - F(x)\big)^{n-j} \Big)' \\ &= \sum_{j=k}^{n} \Big(jC_n^j F(x)^{j-1} \big(1 - F(x)\big)^{n-j} - (n-j) C_n^j F(x)^j \big(1 - F(x)\big)^{n-1-j} \Big) f(x) \end{aligned}$$

Les formules suivantes vont nous permettre de simplifier considérablement cette expression de f_k.

$$\begin{aligned} jC_n^j &= \frac{jn!}{j!(n-j)!} = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} = nC_{n-1}^{j-1}, \\ (n-j)C_n^j &= \frac{(n-j)!n!}{j!(n-j)!} = \frac{n!}{j!(n-j-1)!} = nC_{n-1}^{j}. \end{aligned}$$

En reportant ceci dans l'expression de $f_k(x)$ ci-dessus et en posant pour alléger les écritures

$$a_{n,j}(x) := C_{n-1}^j F(x)^j \big(1 - F(x)\big)^{n-1-j},$$

on peut écrire :

$$f_k(x) = nf(x) \sum_{j=k}^{n} \big(a_{n,j-1}(x) - a_{n,j}(x) \big) = nf(x) a_{n,k-1}(x),$$

après simplifications en chaîne et en notant que $a_{n,n} = 0$. Finalement,

$$\forall x > 0, \quad f_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F(x)^{k-1} \big(1 - F(x)\big)^{n-k} f(x).$$