Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

**IPE Math 306** **Année 2007–2008**

## Corrigé de l'examen 1re session du 30 janvier 2008

**Ex 1.** *Loi triangulaire*

Soit $f$ la fonction affine par morceaux, nulle en dehors de $]0,2[$, représentée par la figure 1.

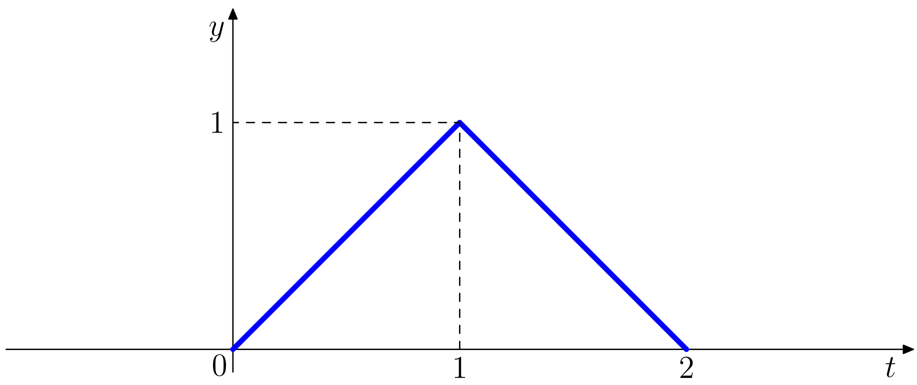


FIG. 1 – Densité triangulaire $f$

1) La fonction $f$ est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. En effet, elle est positive, continue à support compact, donc son intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$ se réduit à une intégrale de Riemann ordinaire sur $[0,2]$ donc est finie. Cette intégrale vaut clairement 1 puisque c'est l'aire d'un triangle de base 2 et de hauteur 1.

2) Soit $Z$ une variable aléatoire positive de densité $f$ et $F$ sa fonction de répartition. Les valeurs de $F$ demandées sont regroupées dans le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | $0$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |

On les obtient par un simple calcul d'aire puisque $F(x)$ est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la droite verticale d'abscisse $x$ et le graphe de $F$. Ainsi $F(1/2)$ est l'aire d'un triangle de base $1/2$ et de hauteur $1/2$, $F(1)$ est l'aire d'un triangle de base 1 et de hauteur 1, $F(2)$ a déjà été calculé à la question précédente.

3) Calculons $\mathbf{E}\,Z$ en utilisant la densité $f$. Cette fonction est affine par morceaux :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 2-t & \text{si } 1 \leq t < 2, \\ 0 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

Comme $Z$ est presque-sûrement bornée ($P(0 \leq Z \leq 2) = 1$), elle est évidemment intégrable, donc $\mathbf{E}\,Z$ existe et peut se calculer par :

$$\mathbf{E}\,Z = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int_1^2 t(2-t)\,\mathrm{d}t.$$

On obtient ainsi [1]

$$\mathbf{E}\,Z = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 3 - \frac{6}{3} = 1.$$

Ce résultat était intuitivement évident avant tout calcul, en interprétant $\mathbf{E}\,Z$ comme le *barycentre* de la répartition de masse de densité $f$ sur le segment $[0,2]$ et en remarquant que cette répartition est symétrique par rapport à 1 puisque le graphe de $f$ admet la droite d'équation $t = 1$ comme axe de symétrie.

**Ex 2.** *Vrai ou faux ?*

1) *Si les variables aléatoires $X$ et $-X$ ont même loi, alors $P(X = 0) = 1$.*

C'est **faux**. Voici un contre exemple simple : $X$ ne prend que deux valeurs $-1$ avec probabilité $1/2$ et $+1$ avec probabilité $1/2$. Clairement $X$ et $-X$ ont même loi, mais $P(X = 0) = 0$. Attention à ne pas confondre « $X$ a même loi que $Y$ » avec « $X = Y$ » !

2) *Si la variable aléatoire réelle $X$ a une espérance, alors $X$ est bornée presque sûrement, autrement dit, il existe une constante positive $c$ telle que $P(|X| \leq c) = 1$.*

C'est **faux**. Contre exemple : si $X$ suit la loi exponentielle de paramètre 1, $\mathbf{E}\,X$ existe et vaut 1 et $P(|X| \leq c) = P(0 \leq X \leq c) = P(X \leq c) = 1 - \mathrm{e}^{-c} < 1$ pour tout $c \geq 0$.

3) *Pour chaque variable aléatoire réelle $X$, il existe un réel $b > 0$ tel que*

$$P(|X| \leq b) \geq 0{,}99.$$

C'est **vrai**. Considérons la suite des évènements $A_n := \{|X| \leq n\}$, $n \geq 1$. Elle est croissante pour l'inclusion et sa réunion est l'espace $\Omega$ tout entier puisque pour tout $\omega \in \Omega$, $|X(\omega)|$ est un nombre réel et il existe toujours au moins un entier $n = n_\omega$ qui le dépasse, donc pour ce $n$, $\omega \in A_n$. Par continuité séquentielle croissante de $P$, $P(A_n)$ tend vers $P(\Omega) = 1$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Il existe donc un $n_0$ tel que $P(A_{n_0}) \geq 0{,}99$. Il ne reste plus qu'à poser $b = n_0$.

---

1. Il serait plus astucieux de poser $t = 1+u$ dans la dernière intégrale ce qui donnerait $\int_0^1 (1-u^2)\,\mathrm{d}u$, mais comme l'auteur du sujet recherchait un effet de contraste entre la méthode « bourrin » donnée ci-dessus et l'interprétation barycentrique, je ne vais pas le contrarier (Ch. S.).

4) *Si la fonction de répartition $F$ de la variable aléatoire $X$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}\setminus D$, où $D$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$, alors la loi de $X$ admet une densité $f$ qui est la dérivée de $F$ sur $\mathbb{R}\setminus D$.*

C'est grossièrement **faux**. Le contre exemple le plus simple est celui de la v.a. constante $X = 0$. Sa loi est la masse de Dirac en 0, sa f.d.r. vaut 0 sur $]-\infty, 0[$ et 1 sur $[0, +\infty[$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ce n'est évidemment pas une loi à densité. Notons d'ailleurs que la dérivée de $F$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ est identiquement nulle.

N'importe quelle v.a. discrète $X$ avec $X(\Omega)$ fini aurait pu fournir un contre exemple. Dans l'énoncé du cours qui permet d'obtenir la densité par dérivation de la f.d.r. $F$, on suppose cette dernière $C^1$ par morceaux avec « raccords continus », donc en particulier *$F$ continue sur $\mathbb{R}$*. C'est cette continuité sur $\mathbb{R}$ qui fait défaut dans les contre exemples ci-dessus puisque $F$ a un saut en tout $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$.

5) *Si $H$ est une fonction de répartition, alors pour toute variable aléatoire réelle $X$, $\mathbf{E}\,H(X)$ existe*[2] *dans $\mathbb{R}$.*

C'est **vrai**. En effet la f.d.r. $H$ étant à valeurs dans $[0, 1]$, la variable aléatoire $H(X)$ est bornée donc intégrable. On a $0 \leq \mathbf{E}\,H(X) \leq 1$.

## Problème

1) Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On sait qu'alors elle a une limite $\ell$ en $+\infty$, qui est soit un réel, soit $+\infty$. On sait aussi que $g$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[g(0), \ell[$ et que la réciproque $g^{-1}$ de cette bijection est définie et strictement croissante sur $[g(0), \ell[$. On note $X$ une variable aléatoire positive. Pour justifier l'égalité

$$\forall t \in [g(0), \ell[, \quad P\big(g(X) > t\big) = P\big(X > g^{-1}(t)\big), \tag{1}$$

nous allons établir l'égalité des évènements $A := \{g(X) > t\}$ et $B := \{X > g^{-1}(t)\}$ en vérifiant l'inclusion dans les deux sens.

Pour tout $\omega \in A$, $g(X(\omega)) > t$ et, comme les deux membres de cette inégalité appartiennent à $[g(0), \ell[$ qui est l'ensemble de définition de l'application strictement croissante $g^{-1}$, on en déduit que $g^{-1}\big(g(X(\omega))\big) > g^{-1}(t)$, ce qui s'écrit aussi $X(\omega) > g^{-1}(t)$. Ainsi tout $\omega$ dans $A$ appartient aussi à $B$, autrement dit, $A \subset B$.

En échangeant les rôles de $g$ et $g^{-1}$, le même argument montre que $B \subset A$. Finalement $A = B$ et $P(A) = P(B)$.

2) On suppose de plus que la fonction $g$ est $C^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $g(0) \geq 0$. Ceci implique en particulier que $g$ est positive et que $Y := g(X)$ est une variable aléatoire positive. Pour démontrer la formule :

$$\mathbf{E}\,g(X) = g(0) + \int_0^{+\infty} P(X > s)g'(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2}$$

2. On demandait d'admettre que toute fonction croissante $h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable, ce qui assurait que $H(X)$ soit une variable aléatoire. Un façon simple de vérifier cette mesurabilité de $h$ est de remarquer que pour tout réel $b$, $h^{-1}(]-\infty, b[) = \{x \in \mathbb{R};\ h(x) < b\}$ est soit $\emptyset$, soit un intervalle de la forme $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$, donc dans tous les cas un borélien. Or la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par la famille des intervalles $]-\infty, b[$ pour $b$ décrivant $\mathbb{R}$.

on part de la définition $\mathbf{E}\,Y = \int_0^{+\infty} P(Y > t)\,\mathrm{d}t$ en découpant $\int_0^{+\infty} = \int_0^{g(0)} + \int_{g(0)}^{\ell}$ si $\ell = +\infty$, ou $\int_0^{+\infty} = \int_0^{g(0)} + \int_{g(0)}^{\ell} + \int_{\ell}^{+\infty}$ si $\ell < +\infty$.

Remarquons d'abord que si $\ell < +\infty$, l'application strictement croissante $g$ ne peut prendre que des valeurs strictement inférieures à $\ell$ et par conséquent pour tout $t \geq \ell$, $\{g(X) > t\} = \emptyset$, d'où $P(Y > t) = P(\emptyset) = 0$ et $\int_{\ell}^{+\infty} P(Y > t)\,\mathrm{d}t = 0$. Que $\ell$ soit fini ou non, on a donc dans tous les cas :

$$\mathbf{E}\,Y = \int_0^{g(0)} P(Y > t)\,\mathrm{d}t + \int_{g(0)}^{\ell} P(Y > t)\,\mathrm{d}t.$$

Examinons maintenant la première intégrale. Puisque $g$ est croissante, on a pour tout $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) = g(X(\omega)) \geq g(0)$ et donc pour tout $t \in [0, g(0)[$, $1 \geq P(Y > t) \geq P(Y \geq g(0)) = 1$. La fonction $t \mapsto P(Y > t)$ est donc constante égale à 1 sur $[0, g(0)[$ et sa valeur en $g(0)$ est un réel[3] de $[0, 1]$. L'intégrale de Riemann $\int_0^{g(0)} P(Y > t)\,\mathrm{d}t$ vaut donc $\int_0^{g(0)} 1\,\mathrm{d}t = g(0)$. À ce stade nous avons donc établi la formule :

$$\mathbf{E}\,g(X) = g(0) + \int_{g(0)}^{\ell} P(Y > t)\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant (1) on peut écrire cette dernière intégrale sous la forme :

$$\int_{g(0)}^{\ell} P(Y > t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(0)}^{\ell} P\bigl(X > g^{-1}(t)\bigr)\,\mathrm{d}t.$$

On peut alors appliquer le changement de variable $C^1$ et croissant[4] $t = g(s)$ ou $s = g^{-1}(t)$ qui donne :

$$\int_{g(0)}^{\ell} P(Y > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} P(X > s) g'(s)\,\mathrm{d}s$$

et achève la vérification de (2).

*L'intérêt de la formule (2) est qu'elle permet de calculer des moments fonctionnels d'une variable aléatoire qui n'est ni discrète ni à densité. La question suivante présente un exemple de cette situation.*

3) Soit $X := \max(Z, c)$, où $Z$ est une variable aléatoire positive de loi exponentielle de paramètre 1 et $c$ une constante strictement positive.

a) La fonction de survie $s \mapsto P(X > s)$ est bien celle représentée par la figure 2. En effet, pour $s < c$, $\{X > s\}$ est l'évènement $\Omega$ puisque pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \max(Z(\omega), c) \geq c > s$, donc dans ce cas $P(X > s) = 1$. Pour $s \geq c$, $X(\omega)$ est strictement supérieur à $s$ si et seulement si $Z(\omega)$ l'est aussi. Donc dans ce cas $\{X > s\} = \{Z > s\}$, d'où $P(X > s) = P(Z > s) = \mathrm{e}^{-s}$. En particulier $P(X > c) = \mathrm{e}^{-c} < 1$ et la fonction de survie a un saut au point $c$.

3. Cette valeur peut être strictement inférieure à 1 si $P(X = 0) \neq 0$. Mais en tout état de cause, elle n'a aucune influence sur la valeur de l'intégrale de Riemann $\int_0^{g(0)} P(Y > t)\,\mathrm{d}t$.

4. Pour le justifier proprement, on peut d'abord faire le changement de variable sur $\int_{g(0)}^{g(b)}$, puis faire tendre $b$ vers $+\infty$.

b) La loi de $X$ n'est pas à densité car sa fonction de survie est discontinue (donc aussi sa fonction de répartition). Elle n'est pas non plus discrète car la somme des sauts de la fonction de répartition est strictement inférieure à 1. En effet il n'y a qu'un seul saut, d'amplitude $1 - \mathrm{e}^{-c} < 1$.

c) Comme $X$ est une variable aléatoire positive,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,X = \int_0^{+\infty} P(X>s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^c P(X>s)\,\mathrm{d}s + \int_c^{+\infty} P(X>s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^c \mathrm{d}s + \int_c^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \\ &= c + \mathrm{e}^{-c}.\end{aligned}$$

d) On calcule $\mathbf{E}\,X^2$ en appliquant la formule (2) avec $g(x) = x^2$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,X^2 = \int_0^{+\infty} 2sP(X>s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^c 2sP(X>s)\,\mathrm{d}s + \int_c^{+\infty} 2sP(X>s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^c 2s\,\mathrm{d}s + \int_c^{+\infty} 2s\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale se calcule par parties :

$$\int_c^d 2s\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = \left[-2s\mathrm{e}^{-s}\right]_c^d + 2\int_c^d \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = -2d\mathrm{e}^{-d} + 2c\mathrm{e}^{-c} + 2\mathrm{e}^{-c} - 2\mathrm{e}^{-d}.$$

En faisant tendre $d$ vers $+\infty$, on obtient $\int_c^{+\infty} 2s\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = 2(c+1)\mathrm{e}^{-c}$, d'où

$$\mathbf{E}\,X^2 = c^2 + 2(c+1)\mathrm{e}^{-c}.$$

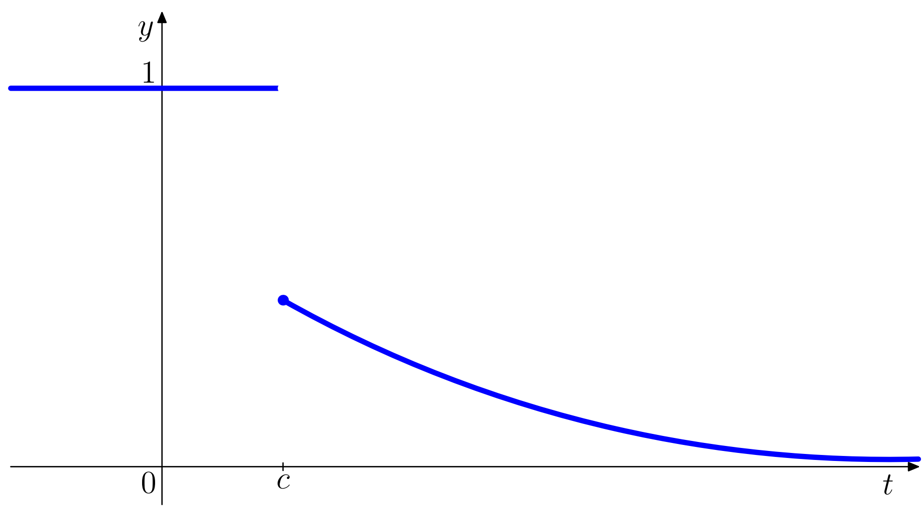


FIG. 2 – Fonction de survie $s \mapsto P(X > s)$

*Dans la suite, on va utiliser la formule (2) pour apporter une réponse partielle au problème suivant. Grâce à l'inégalité de Markov, on sait que plus la v.a. positive $X$ a des moments d'ordre élevé, plus vite sa fonction de survie $G$ tend vers $0$ en $+\infty$. On se demande a contrario si quelle que soit la vitesse de convergence vers $0$ de $G$, il est possible de trouver un moment fonctionnel $\mathbf{E}\,h(X)$ fini avec $h$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$. Les deux questions suivantes sont consacrées à l'étude d'un exemple où $G$ tend « lentement » vers $0$, afin de se faire une intuition.*

4) Soit $a$ un réel. Considérons l'intégrale de Riemann ordinaire

$$I(a,x) := \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^a}$$

Notons $f : t \mapsto t^{-1}(\ln t)^{-a}$ l'intégrande. En remarquant que $f(t)$ peut s'écrire $(\ln t)^{-a}(\ln t)'$, on voit qu'une primitive de la fonction continue $f$ est $F$ donnée par

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)(\ln t)^{a-1}} & \text{si } a \neq 1, \\ \ln(\ln t) & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

On en déduit que quand $x$ tend vers $+\infty$, $F(x)$ tend vers $+\infty$ si $a \leq 1$ et vers $0$ si $a > 1$. Comme $I(a,x) = F(x) - F(2)$, on voit ainsi que l'intégrale généralisée $I(a)$ converge si et seulement si $a > 1$.

5) Soit $X$ une variable aléatoire positive de fonction de survie $G$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0, \\ \dfrac{1}{\ln(\mathrm{e}+t)} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

a) En appliquant la formule (2) avec $g(x) = x^\varepsilon$ et $\varepsilon > 0$ quelconque, on obtient :

$$\mathbf{E}\,X^\varepsilon = \int_0^{+\infty} \varepsilon t^{\varepsilon-1} \frac{1}{\ln(\mathrm{e}+t)}\,\mathrm{d}t.$$

Cette intégrale généralisée d'une fonction *positive* diverge, car lorsque $t$ tend vers $+\infty$, l'intégrande est équivalente[5] à $\varepsilon t^{\varepsilon-1}(\ln t)^{-1}$. Or pour $\varepsilon > 1$, cet équivalent tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et pour $0 < \varepsilon \leq 1$, il tend plus lentement vers $0$ que $1/t$ dont l'intégrale généralisée diverge. Comme l'intégrande est positive, l'intégrale généralisée divergente vaut $+\infty$ dans les deux cas. On a ainsi vérifié que $\mathbf{E}\,X^\varepsilon = +\infty$ pour tout $\varepsilon > 0$.

b) La fonction $g(x) = (\ln(1+x))^b$ tend vers $+\infty$ pour $b > 0$, mais beaucoup plus lentement que $x^\varepsilon$. En appliquant à nouveau la formule (2), il vient :

$$\mathbf{E}\,(\ln(1+X))^b = \int_0^{+\infty} b\big(\ln(1+t)\big)^{b-1} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\ln(\mathrm{e}+t)}.$$

5. On peut trancher la question de la convergence en prenant un équivalent car l'intégrande est positive. Notons aussi que $\ln(\mathrm{e}+t) = \ln((1+\mathrm{e}/t)t) = \ln(1+\mathrm{e}/t)+\ln t = (1+o(1))\ln t$, d'où $\ln(\mathrm{e}+t) \sim \ln t$.

L'intégrande est continue et positive, équivalente au voisinage de $+\infty$ à $bt^{-1}(\ln t)^{b-2}$. Donc en appliquant le résultat de la question 4 avec $a = 2 - b$, on voit que l'intégrale généralisée ci-dessus converge pour $2 - b > 1$, autrement dit pour $b < 1$. Ainsi pour $0 < b < 1$, $g(x) = (\ln(1+x))^b$ tend vers $+\infty$ avec $x$ et $\mathbf{E}\,(\ln(1+X))^b < +\infty$.

6) On suppose plus généralement que $X$ est une variable aléatoire positive dont la fonction de survie $G$ est $C^1$ sur $]0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Ceci implique en particulier que $G(t)$ est strictement positif pour tout $t \in [0, +\infty[$. En effet si $G(t_0) = 0$ pour un $t_0 \in [0, +\infty[$, alors par décroissance et positivité de $G$, pour tout $t \geq t_0$, $0 \leq G(t) \leq G(t_0) = 0$, donc $G$ serait constante nulle sur tout l'intervalle $[t_0, +\infty[$, ce qui contredirait sa décroissance *stricte*. Comme la fonction $y \mapsto y^{-1/2}$ est $C^1$ sur $]0, +\infty[$, on en déduit par composition que $G^{-1/2}$ est $C^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus, $G^{-1/2}$ est strictement croissante comme composée de fonctions strictement décroissantes. Enfin, comme la fonction de survie $G$ a pour limite 0 en $+\infty$, $G^{-1/2}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Toutes les conditions de validité de la formule (2) étant satisfaites par $g = G^{-1/2}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\,G(X)^{-1/2} &= G(0)^{-1/2} + \int_0^{+\infty} \Big(G(s)^{-1/2}\Big)' P(X > s)\,\mathrm{d}s \\
&= G(0)^{-1/2} + \int_0^{+\infty} \frac{-1}{2} G(s)^{-3/2} G'(s) G(s)\,\mathrm{d}s \\
&= G(0)^{-1/2} + \int_0^{+\infty} \frac{-1}{2} G(s)^{-1/2} G'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= G(0)^{-1/2} + \lim_{x \to +\infty} \big[-G(s)^{1/2}\big]_0^x \\
&= G(0)^{-1/2} + G(0)^{1/2}.
\end{aligned}$$

On voit ainsi que la variable aléatoire positive $G(X)^{-1/2}$ a une espérance finie. Ceci montre l'existence d'une fonction positive $h$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et telle que $\mathbf{E}\,h(X) < +\infty$.

La variable aléatoire $X$ considérée dans cette question n'est pas forcément à densité, car on n'a pas eu besoin de supposer que $G$ est continue *à gauche* en 0. En fait, compte-tenu des hypothèses faites sur $G$, $X$ est à densité si et seulement si $G(0) = 1$, puisque la limite à gauche en 0 de la fonction de survie d'une v.a. positive est toujours 1.

La formule pour $\mathbf{E}\,G(X)^{-1/2}$ peut se réécrire :

$$\mathbf{E}\,G(X)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{P(X > 0)}} + \sqrt{P(X > 0)}.$$

Dans le contexte de cette question, cette quantité vaut 2 si $X$ est à densité et la réciproque est vraie (pourquoi ?).

Remarque : on a pris $h = G^{-1/2}$ pour une raison d'esthétique, mais il devrait être clair si vous avez compris ce qui précède, que $h = G^{-a}$ avec $0 < a < 1$ aurait aussi convenu.