Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math306 **2004-2005**

Corrigé de l'Examen de janvier 2005

Ex 1. *Interprétation du graphique d'une f.d.r.*
La variable aléatoire X a pour fonction de répartition F représentée figure 1.

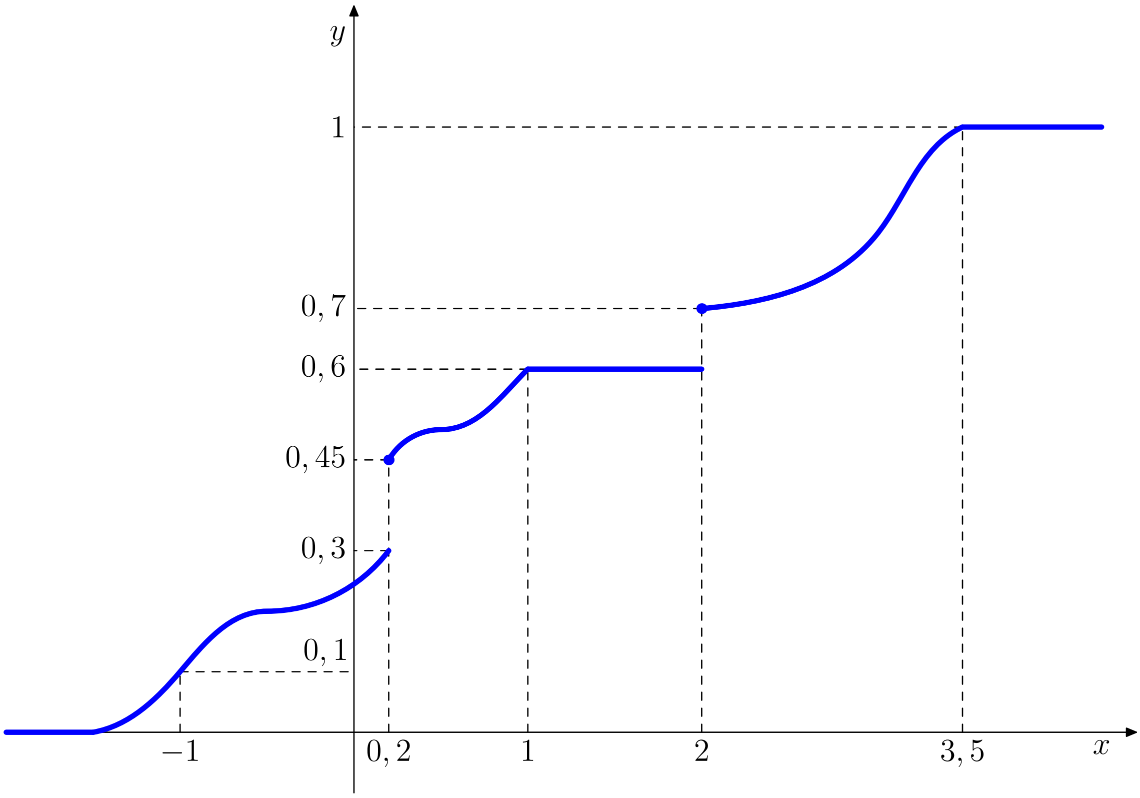

Fig. 1 – Fonction de répartition F de la v.a. X

En exploitant les informations fournies par ce graphique, on voit que

$$P(X \leq -1) = 0{,}1 \quad P(X = 0{,}2) = 0{,}15 \quad P(X = 0{,}3) = 0 \quad P(X \geq 0{,}2) = 0{,}7$$
$$P(X > 2) = 0{,}3 \quad P(X \in [1; 1{,}5]) = 0 \quad P(X \in [1; 2]) = 0{,}1 \quad P(|X| > 1) = 0{,}5.$$

Si X était à densité, sa f.d.r. serait continue sur $\mathbb{R}$. Or F est visiblement discontinue aux points 0,2 et 2. Donc X n'est pas à densité.

Ex 2.

1) Soient $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles du même Ω, deux à deux *disjoints* et $A := \cup_{i=1}^n A_i$. Montrons que $\mathbf{1}_A = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$. Il s'agit de vérifier que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbf{1}_A(\omega) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(\omega).$$

Distinguons les deux cas complémentaires $\omega \in A$ et $\omega \notin A$.

Dans le premier cas $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ et comme $A = \cup_{i=1}^n A_i$, ω appartient au moins à l'un des A_i et en fait *à un seul* car ils sont deux à deux disjoints. Ainsi parmi les n termes $\mathbf{1}_{A_i}(\omega)$, un seul vaut 1, les autres étant tous nuls. Donc $\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(\omega) = 1 = \mathbf{1}_A(\omega)$.

Dans le deuxième cas, ω n'appartient pas à A, donc n'appartient *à aucun* des A_i. Donc $\mathbf{1}_A(\omega)$ et tous les $\mathbf{1}_{A_i}(\omega)$ sont nuls. On a donc $\mathbf{1}_A(\omega) = 0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$.

2) Montrons que si $A \subset B$, $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$, autrement dit que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbf{1}_A(\omega) \leq \mathbf{1}_B(\omega).$$

Si $\omega \notin A$, $\mathbf{1}_A(\omega) = 0 \leq \mathbf{1}_B(\omega)$. Si $\omega \in A$, alors $\omega \in B$ (puisque $A \subset B$), donc $\mathbf{1}_A(\omega) = \mathbf{1}_B(\omega) = 1$.

3) Soient X et Y deux variables aléatoires positives ayant même loi. Alors pour tout $t \geq 0$, $P(X > t) = P_X(]t, +\infty[) = P_Y(]t, +\infty[) = P(Y > t)$. On en déduit que

$$\mathbf{E}X = \int_0^{+\infty} P(X > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} P(Y > t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}Y \quad (\text{égalité dans } \overline{\mathbb{R}}_+).$$

Si l'on ne suppose plus X et Y positives, on peut appliquer ce qui précède aux variables aléatoires positives $|X|$ et $|Y|$, X^+ et Y^+, X^- et Y^- qui ont deux à deux même loi. On en déduit que si X n'est pas intégrable, Y ne l'est pas non plus car alors $\mathbf{E}|X| = \mathbf{E}|Y| = +\infty$. Si X est intégrable, Y l'est aussi et

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}(X^+) - \mathbf{E}(X^-) = \mathbf{E}(Y^+) - \mathbf{E}(Y^-) = \mathbf{E}Y.$$

Ex 3. *Loi logistique*

1) Soit Y une variable aléatoire *positive* de loi exponentielle de paramètre 1, sa fonction de survie est donc donnée par

$$P(Y > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Puisque Y est une v.a. positive, on a :

$$\mathbf{E}Y = \int_0^{+\infty} P(Y > x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^b = 1 < +\infty.$$

Donc Y est intégrable et $\mathbf{E}Y = 1$.

Pour t réel quelconque, on a

$$P(Y' \leq t) = P(-Y \leq t) = P(Y \geq -t) = P(Y > -t) + P(Y = -t).$$

Comme Y est à densité, sa f.d.r. est continue donc $P(Y = -t) = 0$. On en déduit en distinguant les deux cas $-t < 0$ et $-t \geq 0$ que

$$F_{Y'}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t & \text{si } t \leq 0, \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

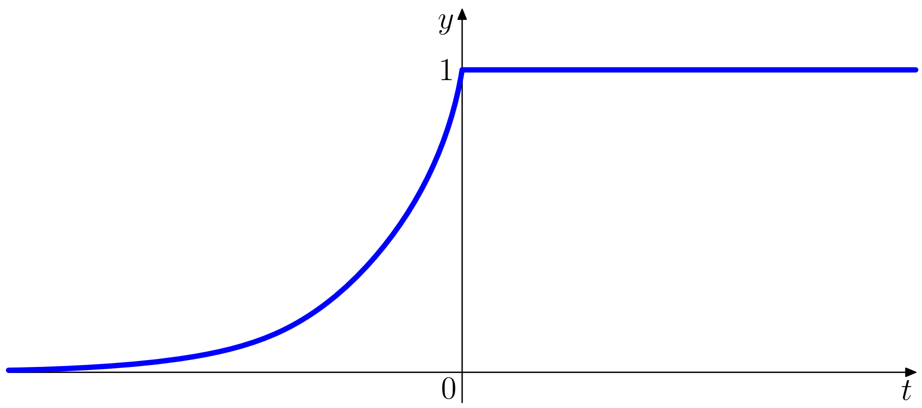

Fig. 2 – Fonction de répartition de $Y' = -Y$

2) On note $Z := \ln U$, où U est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $]0, 1[$, de loi uniforme sur $]0, 1[$. On cherche la loi et l'espérance de Z. Pour cela on va calculer la fonction de répartition de Z. Remarquons que U étant à valeurs dans $]0, 1[$, $U(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, donc $Z(\omega) = \ln(U(\omega))$ est bien défini pour tout $\omega \in \Omega$. Rappelons d'abord que la fonction de répartition de U est donnée par

$$P(U \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\omega \in \Omega$, on a l'équivalence

$$\ln\big(U(\omega)\big) \leq t \Leftrightarrow U(\omega) \leq \mathrm{e}^t. \tag{2}$$

En effet l'implication de gauche à droite vient de la croissance sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle. L'implication réciproque vient de la croissance sur $]0, +\infty[$ de la fonction logarithme, en notant que $U(\omega)$ et e^t sont tous deux *strictement positifs*. On déduit de (2) l'égalité d'évènements $\{\ln U \leq t\} = \{U \leq \mathrm{e}^t\}$. En combinant cette égalité avec (1) appliquée avec $x = \mathrm{e}^t$, on justifie le calcul suivant :

$$P(Z \leq t) = P(\ln U \leq t) = P(U \leq \mathrm{e}^t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t & \text{si } \mathrm{e}^t \leq 1 \\ 1 & \text{si } \mathrm{e}^t > 1 \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{e}^t & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} = P(Y' \leq t).$$

Ceci étant valable pour tout réel t, Z a même f.d.r. donc *a même loi* que Y'. Or $Y' = -Y$ est intégrable parce que Y l'est. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}Y' = -\mathbf{E}Y = -1$. Par la question 3) de l'exercice 2, Z est intégrable et a pour espérance $\mathbf{E}Z = \mathbf{E}Y' = -1$.

3) On définit la variable aléatoire réelle X par

$$X := \ln\Big(\frac{1-U}{U}\Big)$$

Notons que U étant à valeurs dans $]0,1[$, $\frac{1-U(\omega)}{U(\omega)}$ est défini et strictement positif pour tout $\omega \in \Omega$, donc son logarithme $X(\omega)$ est bien défini pour tout $\omega \in \Omega$. Calculons la fonction de survie $G : x \mapsto G(x) := P(X > x)$. Sous réserve de justifications, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X > x) = P\Big(\ln\Big(\frac{1-U}{U}\Big) > x\Big) &= P\Big(\frac{1-U}{U} > \mathrm{e}^x\Big) && (3)\\
&= P\big(1 - U > U\mathrm{e}^x\big) && (4)\\
&= P\Big(U < \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\Big) && \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}. && (5)
\end{aligned}$$

Justifications.

(3) : avec la même justification que pour (2), on a l'égalité d'évènements :

$$\Big\{\ln\Big(\frac{1-U}{U}\Big) > x\Big\} = \Big\{\frac{1-U}{U} > \mathrm{e}^x\Big\}.$$

(4) : par *stricte positivité* de U sur Ω, on a équivalence entre $\frac{1-U}{U} > \mathrm{e}^x$ et $1 - U > U\mathrm{e}^x$.

(5) : on applique (1) en notant que $(1+\mathrm{e}^x)^{-1}$ est dans $]0,1[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction de survie de X est donc $G : x \mapsto (1+\mathrm{e}^x)^{-1}$, d'où la fonction de répartition F donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Cette fonction étant visiblement C^1 sur $\mathbb{R}$, la loi de X admet pour densité la dérivée f de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}.$$

On remarque que $f(x) \sim \mathrm{e}^x$ pour $x \to -\infty$ et $f(x) \sim \mathrm{e}^{-x}$ pour $x \to +\infty$, ce qui permet de vérifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. On voit aussi que f est paire car

$$f(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = f(x).$$

On en déduit que la loi de X est *symétrique*, *i. e.* que X et $-X$ ont même loi.

La f.d.r. F et la densité f sont représentées sur les figures 3 et 4 respectivement.

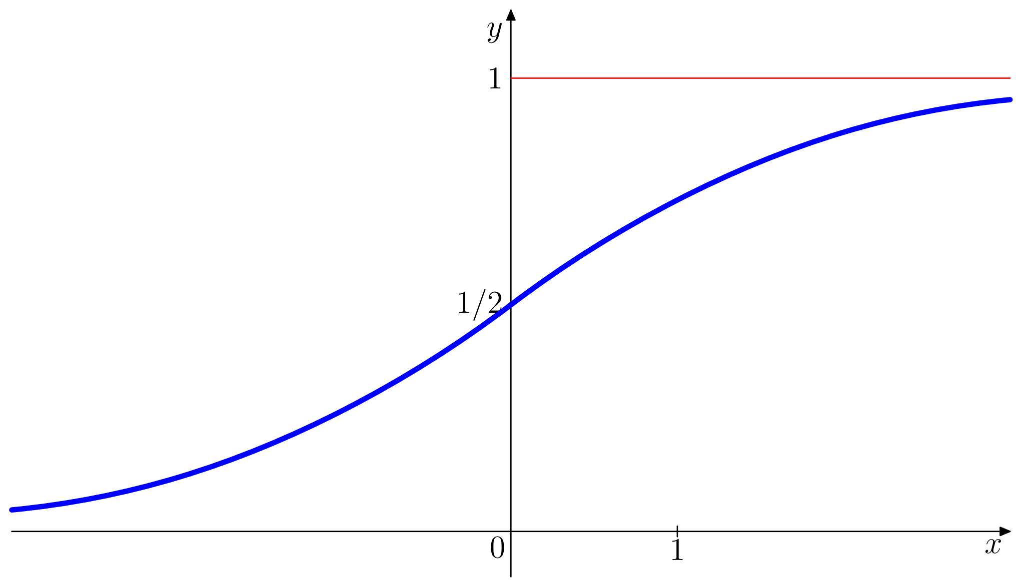

FIG. 3 – Fonction de répartition F de la v.a. $X = \ln\left(\frac{1-U}{U}\right)$

4) Pour vérifier l'intégrabilité de X et calculer son espérance, on commence par noter que $X = \ln(1-U) - \ln U$. Nous connaissons déjà la loi et l'espérance de $\ln U$. La loi de $1-U$ est la même que celle de U, ce que l'on peut vérifier en calculant sa fonction de répartition comme suit. On remarque d'abord que

$$P(1-U \le t) = P(U \ge 1-t) = 1 - P(U < 1-t) = 1 - P(U \le 1-t),$$

la dernière égalité étant justifiée par la continuité de la f.d.r. de U. On en déduit

$$P(1-U \le t) = \begin{cases} 1-0 & \text{si } 1-t \le 0 \\ 1-(1-t) & \text{si } 0 < 1-t \le 1 \\ 1-1 & \text{si } 1-t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \ge 1 \\ t & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

On constate ainsi que $P(1-U \le t) = P(U \le t)$ pour tout réel t (noter que la différence entre inégalités stricte et large en 0 et 1 avec la formule pour $P(U \le t)$ est sans importance en raison de la continuité de la f.d.r. de U en ces points).

L'égalité des lois de U et $1-U$ entraîne l'égalité des lois des v.a. réelles $\ln U$ et $\ln(1-U)$. On sait que $\ln U$ est intégrable. On en déduit que $\ln(1-U)$ est aussi intégrable et de même espérance, cf. exercice 2-3). Finalement, $X = \ln U - \ln(1-U)$ est intégrable comme différence de deux v.a. intégrables et

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}(\ln U) - \mathbf{E}(\ln(1-U)) = 0.$$

Ce résultat est conforme à la symétrie de la loi de X. Cette observation est générale. Si une variable aléatoire X a une loi symétrique (*i. e.* X et $-X$ ont même loi) et si X est intégrable, $\mathbf{E}X = 0$ (pourquoi ?). La condition d'intégrabilité est indispensable ici car il existe des lois symétriques n'ayant pas d'espérance, par exemple la loi de Cauchy standard de densité $t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.

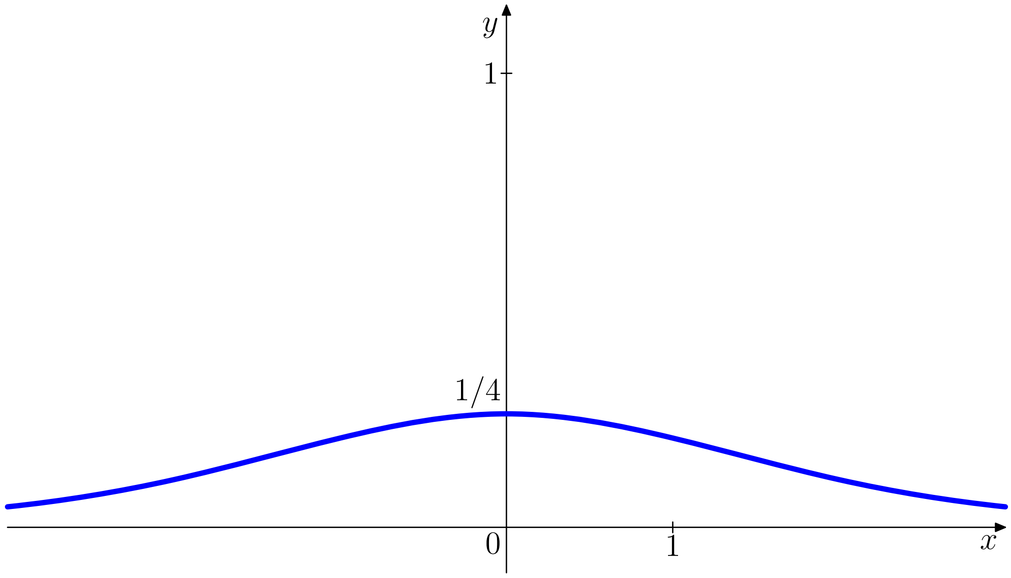

FIG. 4 – Densité f de la v.a. $X = \ln\left(\frac{1-U}{U}\right)$

Ex 4. *Une somme doublement aléatoire*

Sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on suppose définies

– une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$,

– une suite de variables aléatoires positives $(X_i)_{i\geq 1}$, ayant toutes même loi.

On pose alors $S_0 := 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. On définit la variable aléatoire

$$T := \sum_{i=1}^{N} X_i, \tag{6}$$

autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, $T(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega)$. On suppose de plus que N est *indépendante de la suite* $(X_i)_{i\geq 1}$, ce qui implique notamment que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tous boréliens B et B' de $\mathbb{R}$, les évènements $\{S_j \in B\}$ et $\{N \in B'\}$ sont indépendants.

1) L'énoncé demande d'examiner le raisonnement erronné suivant. *Par additivité de l'espérance des variables aléatoires positives,*

$$\mathbf{E}T = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}X_i = N\mathbf{E}X_1.$$

Comme la variable aléatoire T est positive, $\mathbf{E}T$ existe bien comme élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Cette espérance ne peut pas être égale à $N\mathbf{E}X_1$ car cette dernière expression est une variable aléatoire, en général non constante, alors que $\mathbf{E}T$ est une constante dépendant seulement de la loi de T. L'erreur vient d'une utilisation abusive de l'additivité de l'espérance. Il est exact que si n est un entier *fixé* et les $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. positives $\mathbf{E}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i$. Mais T *n'est pas* la somme d'un nombre fixé de variables aléatoires puisque le nombre de termes dans $T(\omega)$ est $N(\omega)$ qui peut *varier* avec ω.

2) Soit $A \in \mathcal{F}$ un évènement et Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tels que pour tout $t \geq 0$, les évènements $\{Y > t\}$ et A soient indépendants. Montrons que

$$\forall t \geq 0, \quad P(Y\mathbf{1}_A > t) = P(Y > t)P(A). \tag{7}$$

0n part de la décomposition

$$P\big(Y\mathbf{1}_A > t\big) = P\big(\{Y\mathbf{1}_A > t\} \cap A\big) + P\big(\{Y\mathbf{1}_A > t\} \cap A^c\big). \tag{8}$$

On remarque alors que

$$\forall t \geq 0, \quad \{Y\mathbf{1}_A > t\} \cap A^c = \emptyset.$$

En effet si $\omega \in A^c$, $Y(\omega)\mathbf{1}_A(\omega)$ est nul et ne peut donc être *strictement* supérieur à t qui est lui même positif ou nul. Par conséquent

$$\forall t \geq 0, \quad P\big(\{Y\mathbf{1}_A > t\} \cap A^c\big) = 0. \tag{9}$$

D'autre part, on a

$$\forall t \geq 0, \quad \{Y\mathbf{1}_A > t\} \cap A = \{Y > t\} \cap A.$$

En effet si $\omega \in A$, $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ et donc *sur* A les variables aléatoires $Y\mathbf{1}_A$ et Y sont égales. En utilisant l'indépendance des évènements A et $\{Y > t\}$, on en déduit que :

$$\forall t \geq 0, \quad P\big(\{Y\mathbf{1}_A > t\} \cap A\big) = P\big(\{Y > t\} \cap A\big) = P(Y > t)P(A). \tag{10}$$

L'égalité (7) découle maintenant de (8), (9) et (10).

3) Considérons maintenant la variable aléatoire positive $S_j\mathbf{1}_{\{N=j\}}$. Par définition, son espérance est

$$\mathbf{E}\big(S_j\mathbf{1}_{\{N=j\}}\big) = \int_0^{+\infty} P\big(S_j\mathbf{1}_{\{N=j\}} > t\big)\,\mathrm{d}t.$$

En appliquant (7) avec $Y = S_j$ et $A = \{N = j\}$, on en déduit

$$\mathbf{E}\big(S_j\mathbf{1}_{\{N=j\}}\big) = \int_0^{+\infty} P(S_j > t)P(N = j)\,\mathrm{d}t.$$

Dans cette intégrale, $P(N = j)$ est constante relativement à la variable d'intégration t et peut donc « sortir » de l'intégrale :

$$\mathbf{E}\big(S_j\mathbf{1}_{\{N=j\}}\big) = P(N = j)\int_0^{+\infty} P(S_j > t)\,\mathrm{d}t = P(N = j)\mathbf{E}S_j.$$

La variable aléatoire S_j est somme d'un nombre fixé j de v.a. positives X_i, donc par additivité de l'espérance $\mathbf{E}S_j = \mathbf{E}X_1 + \cdots + \mathbf{E}X_j$ et comme les X_i ont même loi, elles ont même espérance (cf. exercice 2), d'où $\mathbf{E}S_j = j\mathbf{E}X_1$. On a supposé implicitement dans ce calcul que $j \geq 2$, mais les cas $j = 0$ ou 1 sont évidents directement. Finalement nous avons établi que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}\big(S_j \mathbf{1}_{\{N=j\}}\big) = P(N = j) j \mathbf{E} X_1. \tag{11}$$

4) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $T_n := T\mathbf{1}_{\{N \leq n\}}$. De la décomposition en union d'évènements deux à deux disjoints

$$\{N \leq n\} = \mathop{\cup}_{j=0}^{n} \{N = j\},$$

on déduit cf. exercice 2-1),

$$\mathbf{1}_{\{N \leq n\}} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{1}_{\{N=j\}},$$

puis

$$T_n = \sum_{j=0}^{n} T\mathbf{1}_{\{N=j\}}.$$

Vérifions maintenant que $T\mathbf{1}_{\{N=j\}} = S_j \mathbf{1}_{\{N=j\}}$. En effet si $\omega \notin \{N = j\}$, alors $\mathbf{1}_{\{N=j\}}(\omega) = 0$, d'où $T(\omega)\mathbf{1}_{\{N=j\}}(\omega) = 0 = S_j(\omega)\mathbf{1}_{\{N=j\}}(\omega)$. Si $\omega \in \{N = j\}$, alors $\mathbf{1}_{\{N=j\}}(\omega) = 1$ et $N(\omega) = j$, $T(\omega) = S_j(\omega)$, d'où $T(\omega)\mathbf{1}_{\{N=j\}}(\omega) = S_j(\omega)\mathbf{1}_{\{N=j\}}(\omega)$. On en déduit l'égalité

$$T_n = \sum_{j=0}^{n} S_j \mathbf{1}_{\{N=j\}}. \tag{12}$$

En prenant l'espérance de cette somme d'un nombre fixé n de v.a. positives et compte-tenu de (11), on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E} T_n = \mathbf{E} X_1 \sum_{j=0}^{n} j P(N = j). \tag{13}$$

5) Vérifions que la suite de variables aléatoires positives $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en croissant vers T. La croissance résulte de l'inclusion d'évènements $\{N \leq n\} \subset \{N \leq n+1\}$ qui implique l'inégalité $\mathbf{1}_{\{N \leq n\}} \leq \mathbf{1}_{\{N \leq n+1\}}$, cf. la question 2) de l'exercice 2. Pour établir la convergence de T_n vers T on montre que $T_n(\omega) = T(\omega)$ pour n assez grand, plus précisément pour tout $n \geq N(\omega)$ (noter que N est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc finies). Rappelons que $T(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega)$. D'autre part, pour $n \geq N(\omega)$, $T_n(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega)$ d'après (12) car les $\mathbf{1}_{\{N=j\}}(\omega)$ sont tous nuls sauf pour l'indice $j = N(\omega)$ qui figure parmi $0, 1, \ldots, n$ puisque $n \geq N(\omega)$.

Par le théorème de Beppo Levi, la convergence croissante de la suite de v.a. positives T_n vers T implique la convergence croissante de $\mathbf{E} T_n$ vers $\mathbf{E} T$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans (13), on en déduit :

$$\mathbf{E} T = \mathbf{E} X_1 \sum_{j=0}^{+\infty} j P(N = j) = (\mathbf{E} X_1)(\mathbf{E} N). \tag{14}$$

6) On peut retrouver (14) à partir de (11) en commençant par établir directement la formule

$$T = \sum_{j \in \mathbb{N}} S_j \mathbf{1}_{\{N=j\}} \tag{15}$$

Pour cela on compare les valeurs prises par les deux membres en un ω quelconque. D'abord, rappelons que $T(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega)$. D'autre part

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} S_j(\omega) \mathbf{1}_{\{N=j\}}(\omega) = \sum_{j \neq N(\omega)} S_j(\omega) \mathbf{1}_{\{N=j\}}(\omega) + S_{N(\omega)}(\omega) = 0 + S_{N(\omega)}(\omega),$$

car pour tout $j \neq N(\omega)$, ω n'appartient pas à $\{N = j\}$ donc $\mathbf{1}_{\{N=j\}}(\omega) = 0$. Les deux membres de (15) prennent donc la même valeur $S_{N(\omega)}(\omega)$ en tout $\omega \in \Omega$, ce qui établit (15). Ainsi T apparaît comme la somme d'une série de variables aléatoires positives et cette série converge sur tout Ω (puisque $T(\omega)$ est fini pour tout ω). Par le corollaire « interversion série-espérance » du théorème de Beppo Levi, on en déduit :

$$\mathbf{E}T = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbf{E}\big(S_j \mathbf{1}_{\{N=j\}}\big).$$

En utilisant (11), on en déduit

$$\mathbf{E}T = \sum_{j \in \mathbb{N}} P(N = j) j \mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}X_1 \sum_{j \in \mathbb{N}} j P(N = j) = (\mathbf{E}X_1)(\mathbf{E}N).$$

Extrait du courrier des lecteurs

S'il est toujours temps, j'ai une petite remarque, soit à rajouter au corrigé, soit à faire oralement en le distribuant (ce qui te semble le plus efficace pour qu'ils le retiennent). C'est la remarque habituelle, mais ils n'ont pas l'air de la connaître : Plus de la moitié (pratiquement 3/4*) des points que je n'ai pas pu mettre viennent d'une erreur (de raisonnement ou de calcul) que l'étudiant aurait facilement pu détecter lui-même. Les étudiants n'ont pas l'air conscients de cette particularité des probas, pourtant bien pratique en examen. Ils ne l'exploitent pas, c'est dommage. Si chacun avait eradiqué les erreurs aboutissant à une probabilité pas dans* $[0, 1]$*, une fonction de répartition non croissante, une densité non positive ou une moyenne (esperance) négative pour une quantité positive, plein de gens auraient une copie sans fautes.*