IS Math314 **Année 2010**

Corrigé du partiel du 2 avril 2010

Ex 1. On note $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de v.a. réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour $n \geq 1$. On suppose vérifiées les conditions :

i) Il existe une variable aléatoire intégrable Z telle que pour tout $k \geq 1$, $|X_k| \leq Z$ p.s.

ii) Les X_k ont même espérance.

iii) $\dfrac{S_n}{n}$ converge presque-sûrement quand n tend vers l'infini vers un réel a.

1) On remarque que grâce à i), il existe un évènement Ω' de probabilité 1 sur lequel

$$\forall n \geq 1, \quad \left|\frac{S_n}{n}\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^n X_k\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |X_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Z = Z.$$

En effet chaque $\Omega_k := \{\omega \in \Omega;\ |X_k(\omega)| \leq Z(\omega)\}$ est de probabilité 1 par hypothèse et $\Omega' := \cap_{k\in\mathbb{N}^*}\Omega_k$ est encore un évènement de probabilité 1 comme intersection *dénombrable* d'évènements de probabilité 1. Nous venons ainsi de vérifier que :

$$\text{presque-sûrement,} \quad \forall n \geq 1, \quad \left|\frac{S_n}{n}\right| \leq Z.$$

La suite de variables aléatoires $(n^{-1}S_n)_{n\geq 1}$ est ainsi dominée [1] par une variable aléatoire intégrable Z. Comme elle converge presque sûrement vers la v.a. constante a par l'hypothèse iii), le théorème de convergence dominée pour les variables aléatoires nous dit que cette convergence a lieu aussi au sens L^1, autrement dit :

$$\mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

2) La convergence L^1 implique la convergence des espérances car

$$\left|\mathbf{E}\frac{S_n}{n} - a\right| = \left|\mathbf{E}\frac{S_n}{n} - \mathbf{E}a\right| = \left|\mathbf{E}\left(\frac{S_n}{n} - a\right)\right| \leq \mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n} - a\right|.$$

D'autre part d'après ii) et par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{E}X_k = \frac{1}{n}(n\mathbf{E}X_1) = \mathbf{E}X_1.$$

La suite de réels $(\mathbf{E}n^{-1}S_n)_{n\geq 1}$ est donc constante et égale à $\mathbf{E}X_1$. Comme elle converge vers le réel a, l'unicité de la limite d'une suite réelle impose l'égalité $\mathbf{E}X_1 = a$.

1. En fait pour appliquer le théorème de convergence dominée, il suffit de vérifier que pour tout $n \geq 1$ $|n^{-1}S_n| \leq Z$ sur un évènement Ω'_n de probabilité 1, par exemple ici $\Omega'_n = \cap_{k\leq n}\Omega_k$. Mais cela ne coûte pas plus cher de vérifier cette majoration sur Ω' indépendant de n.

3) En particulier les conditions i) et ii) sont satisfaites lorsque les X_k sont de même loi vérifiant $P(|X_1| \leq c) = 1$ pour une certaine constante c. En effet, cette condition signifie que $|X_1|$ est bornée p.s. par la constante c. Ceci implique l'intégrabilité de X_1 et donc l'existence de $\mathbf{E}X_1$. Il en va donc de même pour les X_k et $\mathbf{E}X_k = \mathbf{E}X_1$, puisque l'existence et la valeur de l'espérance d'une v.a. ne dépendent que de sa loi. La condition ii) est donc satisfaite. La condition i) l'est aussi en prenant pour Z la v.a. constante c car $P(|X_k| \leq c) = P(|X_1| \leq c) = 1$ puisque X_k a même loi que X_1.

Ex 2. *Convergence p.s. de séries*

On note $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite de réels.

1) On suppose que les séries

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_k \neq a_k)$$

sont convergentes. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k := \{\omega \in \Omega;\ X_k(\omega) \neq a_k\}$ et

$$A = \{\omega \in \Omega;\ \omega \text{ appartient à une infinité de } A_k\}.$$

Par le premier lemme de Borel-Cantelli, l'hypothèse de convergence de $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} P(A_k)$ nous donne $P(A) = 0$ et donc $P(A^c) = 1$. Le complémentaire de A est l'ensemble des ω appartenant à au plus un nombre fini de A_k (y compris ceux qui n'appartiennent à aucun A_k). Donc pour tout $\omega \in A^c$, il existe un rang $k_0(\omega)$ tel que pour tout $k \geq k_0(\omega)$, $\omega \notin A_k$, autrement dit $X_k(\omega) = a_k$. Réciproquement si un évènement élémentaire ω vérifie cette condition, il appartient à au plus un nombre fini de A_k et est donc dans A^c. Finalement

$$A^c = \{\omega \in \Omega;\ \exists k_0(\omega) \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \geq k_0(\omega),\ X_k(\omega) = a_k\}.$$

Pour tout $\omega \in A^c$, les séries $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega)$ ont *même terme général* à partir d'un certain rang $k_0(\omega)$. Elles sont donc de même nature et comme la première converge par hypothèse, la deuxième converge aussi. Et puisque $P(A^c) = 1$, ceci établit la convergence presque-sûre de la série de variables aléatoires $\sum_{k=1}^{+\infty} X_k$.

2) Si $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge et $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_k \neq a_k)$ converge, le raisonnement ci-dessus montre que les séries $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ sont de même nature sur l'évènement A^c de probabilité 1. Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ diverge presque sûrement.

3) On suppose que pour $k \geq 1$, X_k suit la loi de Poisson de paramètre λ_k et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k$ converge. Montrons que $\sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire S à valeurs entières.

Première façon. On va utiliser le résultat de la question 1) avec $a_k = 0$ pour tout k, la convergence de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ étant alors triviale. On remarque que

$$P(X_k \neq 0) = 1 - P(X_k = 0) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_k} \sim \lambda_k,$$

puisque λ_k tend vers 0 en raison de la convergence de $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k$. Les séries à termes *positifs* $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_k \neq 0)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k$ ont leur termes généraux équivalents, donc sont de même nature, ce qui entraîne la convergence de $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_k \neq 0)$. Par le résultat de la question 1), $\sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire S. Comme les sommes partielles sont (presque sûrement) à valeurs entières, leur limite p.s. S l'est aussi (la limite d'une suite $(S_n(\omega))_n$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ est forcément un entier, et cette limite ne peut exister que si cette suite est constante à partir d'un certain rang, ce qui correspond bien au fait que $X_k(\omega) = 0$ à partir de ce rang).

Deuxième façon. Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. La suite de variables aléatoires *positives* $(S_n)_{n\geq 1}$ est *croissante*. Notons S sa limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Par le théorème de Beppo Levi, $\mathbf{E}S_n$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vers $\mathbf{E}S$. D'autre part par additivité de l'espérance et parce que l'espérance d'une v.a. de loi de Poisson est égale au paramètre de la loi :

$$\mathbf{E}S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}X_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Ainsi $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ converge vers $\mathbf{E}S$ quand n tend vers l'infini. On en déduit que

$$\mathbf{E}S = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k.$$

Comme cette série converge dans $\mathbb{R}_+$ (sa somme est finie) par hypothèse, on en déduit que la variable aléatoire positive S est intégrable ($\mathbf{E}S = \mathbf{E}|S| < +\infty$). En particulier, S est finie presque-sûrement, ce qui signifie que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ converge p.s.

Ex 3. *Surréservation aérienne*

Il arrive que le nombre de réservations pour une liaison aérienne soit supérieur au nombre de passagers se présentant le jour du vol. Cela est dû à des empêchements imprévisibles de certains passagers et à une politique systématique de certains d'entre eux qui réservent des places sur plusieurs vols de façon à choisir au dernier moment celui qui leur convient le mieux (en raison de la concurrence, les compagnies ne pénalisent pas les clients qui se désistent et ne font payer effectivement que ceux qui embarquent). Pour compenser ce phénomène, une compagnie exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation en prenant pour chaque vol un nombre $n > 300$ de réservations. S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

1) On considère que les passagers sont mutuellement indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est 10%. On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné et S_n le nombre (aléatoire) de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol. On peut écrire S_n sous la forme $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, où X_k indique le comportement du k^{e} client ayant pris une réservation :

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{s'il se présente à l'embarquement} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En raison de l'indépendance des passagers [2], les X_k sont des variables de Bernoulli indépendantes. Et comme tous les passagers ont même probabilité de désistement de 10%,

2. Ceci suppose qu'il n'y a pas de réservations de groupes ou de familles.

les X_k ont même paramètre $p = 0{,}9$. La loi exacte de S_n est donc la loi binomiale de paramètres n et p. Il est bien connu que dans ce cas :

$$\mathbf{E}S_n = np = 0{,}9n \quad \text{et} \quad \operatorname{Var} S_n = np(1-p) = 0{,}09n.$$

2) Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaître la valeur maximale de n telle que : $P(S_n \leq 300) \geq 0{,}99$. La valeur exacte de cette probabilité est

$$P(S_n \leq 300) = \sum_{k=0}^{300} C_n^k (0{,}9)^k (0{,}1)^{n-k}.$$

La résolution analytique de l'inéquation $P(S_n \leq 300) \geq 0{,}99$ d'inconnue n semble hors de portée. En utilisant le théorème de De Moivre-Laplace, on peut néanmoins proposer une solution approchée assez simple de ce problème. Posons

$$S_n^* = \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} = \frac{S_n - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}.$$

Par le théorème limite central (ou son corollaire le théorème de De Moivre Laplace),

$$S_n^* \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} Z,$$

où Z est une v.a. de loi gaussienne standard $\mathfrak{N}(0,1)$. En pratique, cela légitime l'approximation $P(S_n^* \leq t) \simeq P(Z \leq t)$ pour n « grand », puisque la loi de Z a une f.d.r. continue en tout point t de $\mathbb{R}$. Ici, on considère $n > 300$ comme grand et on note que :

$$S_n \leq 300 \quad \Leftrightarrow \quad S_n^* \leq \frac{300 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}.$$

En utilisant l'approximation de la loi de S_n^* par celle de Z, on réduit le problème à la recherche de n maximal tel que

$$P\left(Z \leq \frac{300 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}99.$$

Cette inégalité s'écrit encore en notant Φ la f.d.r. de $\mathfrak{N}(0,1)$:

$$\Phi(t_n) \geq 0{,}99 \quad \text{avec} \quad t_n = \frac{300 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}.$$

Remarquons que t_n est une fonction décroissante de n, par exemple en l'écrivant

$$t_n = \frac{1000}{\sqrt{n}} - 3\sqrt{n},$$

comme somme de deux fonctions décroissantes de n. Donc chercher le n maximal tel que $\Phi(t_n) \geq 0{,}99$ revient à résoudre l'équation $\Phi(t_n) = 0{,}99$ et à prendre la partie entière de la solution. La table des valeurs de Φ nous donne $\Phi(2{,}33) = 0{,}990\,1$. On pourrait affiner par interpolation linéaire pour obtenir $\Phi(2{,}326\,6) \simeq 0{,}99$, mais cette précision serait illusoire au regard de l'approximation gaussienne déjà utilisée. On résout donc

$$\frac{1000}{\sqrt{n}} - 3\sqrt{n} = 2{,}33,$$

ce qui équivaut à

$$-3n - 2{,}33\sqrt{n} + 1000 = 0.$$

En posant $x = \sqrt{n}$, on se ramène à l'équation du second degré

$$-3x^2 - 2{,}33x + 1000 = 0,$$

dont on cherche les solutions supérieures à $\sqrt{300}$ ($n > 300$). Le discriminant vaut

$$\Delta = (-2{,}33)^2 - 4 \times (-3) \times 1000 = 12\,005{,}428\,9$$

et $\sqrt{\Delta} \simeq 109{,}569$. Les deux solutions sont donc

$$x_1 = \frac{2{,}33 - 109{,}569}{-6} = 17{,}873, \quad x_2 = \frac{2{,}33 + 109{,}569}{-6} < 0.$$

La solution x_2 étant négative n'est pas admissible et on vérifie que $x_1^2 = 319{,}444 > 300$.

On peut donc proposer comme solution approchée du problème $n = 319$.

Commentaires. La méthode approchée utilisée ci-dessus est certainement critiquable. La principale objection est l'utilisation de l'approximation gaussienne $P(S_n^* \leq t) \simeq \Phi(t)$ avec un $t = t_n$ dépendant de n. En toute rigueur le théorème limite central ne suffit pas pour la légitimer car il énonce seulement la convergence simple (pour tout t fixé) de $P(S_n^* \leq t)$ vers $\Phi(t)$. On pourrait lever cette objection en recourant au théorème de Berry-Esséen qui donne une convergence *uniforme* permettant de remplacer t par t_n. Mais comme t_n tend vers $-\infty$ à la même vitesse que $-3\sqrt{n}$, $\Phi(t_n)$ tend vers 0 à vitesse exponentielle et il n'est pas clair que l'utilisation de la borne de Berry-Esséen (en $n^{-1/2}$) soit judicieuse ici.

Il se trouve que l'on peut calculer numériquement $P(S_n \leq 300)$ par exemple en utilisant Scilab. Le calcul des coefficients binomiaux par la méthode du triangle de Pascal[3] est possible jusqu'à $n = 1023$. On peut donc calculer $P(S_n \leq 300)$ avec une bonne précision pour n « voisin » de 300. Et on voit ainsi que la vraie valeur cherchée est … $n = 319$, cf. table 1.

Voici le script Scilab qui a servi a générer la table 1.

```
p=0.9; q=1-p;
// Calcul des coefficients binomiaux pour n=300 (triangle de Pascal)
C=[1]; for i=1:300, C=[C 0]+[0 C];end
// Coefficients binomiaux et P(S_n>300) à partir de n=301
for n=301:325,
```

3. La seule qui évite de faire intervenir dans les calculs des nombres plus grands que le résultat final. De ce point de vue l'utilisation des factorielles pour le calcul des coefficients binomiaux est à proscrire.

```
    C=[C 0]+[0 C];
   //Proba de refuser du monde à l'embarquement P(S_n>300)
   // P_Refus(1) = P(S_{301}>300)
   P_Refus(n-300)=sum(C(301:(n+1)).*p.^(300:n).*q.^(n-(300:n)));
end
// meilleur n :
n=300+max(find(P_Refus<0.01))
// affichage des valeurs de P(S_j<=300) sur 5 colonnes
P_OK = matrix(1-P_Refus,5,5)';
M=zeros(10,5);
M(2:2:10,:) = P_OK; M(1:2:10,:)= matrix(301:325,5,5)';
M
```

n	301	302	303	304	305
$P(S_n \leq 300)$	1	1	1	1	1
n	306	307	308	309	310
$P(S_n \leq 300)$	1	1	1	0,999 998	0,999 995
n	311	312	313	314	315
$P(S_n \leq 300)$	0,999 985	0,999 959	0,999 897	0,999 758	0,999 468
n	316	317	318	319	320
$P(S_n \leq 300)$	0,998 897	0,997 835	0,995 965	0,992 835	0,987 842
n	321	322	323	324	325
$P(S_n \leq 300)$	0,980 234	0,969 133	0,953 593	0,932 677	0,905 571

TAB. 1 – Valeurs de $P(S_n \leq 300)$ calculées par Scilab, *arrondies* à 10^{-6} près

Ex 4. *Temps d'attente : du discret au continu*

On souhaite mesurer le temps d'attente du premier éclair d'un orage. La durée observée à l'aide d'une horloge H_0 sera un multiple entier de la plus petite durée u_0 mesurable par l'horloge H_0. On découpe alors le temps en intervalles $[0, u_0[$, $[u_0, 2u_0[$, $[2u_0, 3u_0[$, etc. Si l'éclair se produit pour la première fois dans l'intervalle de temps $[ku_0, (k+1)u_0[$, $k \in \mathbb{N}$, son temps d'attente mesuré par H_0 aura été ku_0. Si l'on remplace H_0 par une horloge dix fois plus précise H_1, la plus petite unité de temps mesurable sera $u_1 = u_0/10$ et le temps d'attente observé sera l'un des 10 nombres $10ku_1$, $(10k+1)u_1, \dots, (10k+9)u_1$.

Prenons comme unité de départ $u_0 = 1$ seconde et notons $A_{[s,t[}$, l'évènement « il n'y a pas d'éclair pendant l'intervalle $[s, t[$ ». On suppose ici que s et t sont des réels ($0 \leq s < t$) mesurant le temps en secondes avec une précision infinie, ce qui est évidemment inaccessible à l'expérience. Nous ferons les hypothèses suivantes :

a) Les $A_{[s,t[}$ indexés par des intervalles de temps 2 à 2 disjoints sont indépendants ;

b) Pour tout réels $0 \leq s < t$, $P(A_{[s,t[})$ ne dépend que de la durée $t - s$. Autrement dit, il existe une fonction $h : \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ telle que $P(A_{[s,t[}) = h(t - s)$.

1) Soit X_0 le temps d'attente du premier éclair mesuré par l'horloge H_0. La variable aléatoire discrète X_0 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour trouver sa loi, on remarque d'abord

que $p_0 := P(X_0 = 0) = P(A^c_{[0,1[}) = 1 - h(1)$. L'évènement $\{X_0 = k\}$ équivaut à l'absence d'éclair dans chacun des intervalles $[i-1, i[$ pour $1 \leq i \leq k$ et à l'apparition du premier éclair dans l'intervalle $[k, k+1[$. Ceci se traduit par la décomposition en intersection :

$$\{X_0 = k\} = \Big(\bigcap_{i=1}^{k} A_{[i-1,i[} \Big) \cap A^c_{[k,k+1[}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

En raison de l'hypothèse a), les évènements $A_{[0,1[}, \dots, A_{[k-1,k[}, A^c_{[k,k+1[}$ sont mutuellement indépendants. Par conséquent pour tout $k \geq 1$,

$$P(X_0 = k) = \left(\prod_{i=1}^{k} P\Big(A_{[i-1,i[}\Big) \right) P\Big(A^c_{[k,k+1[}\Big) = q_0^k p_0,$$

en notant que par l'hypothèse b), $P\Big(A_{[i-1,i[}\Big) = h(1) = q_0$.

On suppose désormais que $0 < q_0 < 1$ et on calcule la fonction de survie de X_0. Comme X_0 est une variable aléatoire à valeurs *entières*, on a l'identité d'évènements :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \{X_0 > x\} = \{X_0 > [x]\}.$$

Le calcul de $P(X > x)$ se ramène alors au calcul du reste d'une série géométrique convergente de raison q_0 :

$$P(X_0 > [x]) = \sum_{k=[x]+1}^{+\infty} P(X_0 = k) = \sum_{k=[x]+1}^{+\infty} q_0^k p_0 = q_0^{[x]+1} p_0 \sum_{j=0}^{+\infty} q^j = q_0^{[x]+1} p_0 \frac{1}{1-q_0}$$

et comme $1 - q_0 = p_0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad P(X_0 > x) = P(X_0 > [x]) = q_0^{[x]+1}. \tag{1}$$

On pouvait aussi obtenir ce résultat en notant que $X_0 > [x]$ si et seulement si aucun éclair ne se produit dans l'intervalle $[0, [x]+1\,[$, d'où

$$\{X_0 > [x]\} = \bigcap_{i=1}^{[x]+1} A_{[i-1,i[},$$

intersection de $[x] + 1$ évènements indépendants de même probabilité q_0.

2) Maintenant, supposons que l'on dispose d'une suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'horloges où la plus petite unité de temps mesurable par H_n est $u_n = 10^{-n}$ secondes. Notons X_n le temps d'attente du premier éclair mesuré par cette horloge dans l'unité u_n. Notons Y_n ce même temps d'attente converti en secondes. Il est clair que la loi de X_n se calcule comme celle de X_0 en remplaçant q_0 par $q_n = h(10^{-n})$ et p_0 par $p_n = 1 - q_n$. En utilisant la décomposition

$$A_{[0,1[} = \bigcap_{i=1}^{10^n} A_{[10^{-n}(i-1), 10^{-n}i[}$$

et les hypothèses a) et b), il vient immédiatement

$$h(1) = P\Big(A_{[0,1[}\Big) = \prod_{i=1}^{10^n} P\Big(A_{[10^{-n}(i-1), 10^{-n}i[}\Big) = h(10^{-n})^{10^n}.$$

3) Pour alléger les écritures, notons $h(1) = \exp(-a)$, ce qui est toujours possible avec un paramètre $a > 0$ puisque $0 < h(1) < 1$. Avec cette notation, $q_n = h(10^{-n}) = \exp(-a10^{-n})$. En utilisant (1) avec q_n à la place de q_0, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$P(Y_n > x) = P(X_n > 10^n x) = q_n^{[10^n x]+1} = \exp\Big(-a10^{-n}([10^n x] + 1)\Big).$$

Cherchons la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini (x étant fixé). Par définition de la partie entière on a l'encadrement :

$$[10^n x] \leq 10^n x < [10^n x] + 1 \quad \text{équivalent à} \quad 10^n x - 1 < [10^n x] \leq 10^n x,$$

d'où

$$x < 10^{-n}([10^n x] + 1) \leq x + 10^{-n}.$$

Cet encadrement et la continuité de la fonction exponentielle nous donnent

$$\exp\Big(-a10^{-n}([10^n x] + 1)\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(-ax),$$

pour tout x réel positif. Pour tout x négatif, $P(Y_n > x) = 1$ converge trivialement vers 1. Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(Y_n > x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} G(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ \exp(-ax) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On reconnaît en G la fonction de survie de la loi exponentielle de paramètre a et ceci établit la convergence en loi de $(Y_n)_{n\geq 0}$ vers *n'importe quelle* variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre a.

4) La suite de réels $(Y_n(\omega))_{n\geq 0}$ est croissante par construction. Si cela ne vous paraît pas évident, on peut toujours écrire que $Y_n(\omega) = 10^{-n} X_n(\omega)$ et que $X_{n+1}(\omega) = 10X_n(\omega) + R_n(\omega)$, où $R_n(\omega)$ est un entier entre 0 et 9 (c'est le chiffre décimal supplémentaire apporté par l'utilisation d'une horloge 10 fois plus précise quand on passe de H_n à H_{n+1}). En particulier $X_{n+1}(\omega) \geq 10X_n(\omega)$, d'où $Y_{n+1}(\omega) = 10^{-n-1}X_{n+1}(\omega) \geq 10^{-n-1}(10X_n(\omega)) = Y_n(\omega)$. D'autre part $Y_n(\omega) < Y_0(\omega) + 1$. Si cela ne vous paraît pas évident, on peut noter que $R(\omega) < 10$ d'où $X_{n+1}(\omega) < 10(X_n(\omega) + 1)$ et $Y_{n+1}(\omega) < Y_n(\omega) + 10^{-n}$. En itérant cette inégalité, on arrive à $Y_{n+1}(\omega) < Y_0(\omega) + 1$. Finalement, pour tout $\omega \in \Omega$, la suite de réels $(Y_n(\omega))_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par le réel $Y_0(\omega)+1$. Elle converge donc vers un réel $T(\omega) \in [Y_0(\omega), Y_0(\omega)+1[$. Ceci étant vrai pour tout $\omega \in \Omega$, $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge presque-sûrement vers la variable aléatoire T que l'on peut interpréter comme le véritable temps d'attente du premier éclair, mesuré avec une horloge infiniment précise. Et comme la convergence presque sûre implique la convergence en loi, la question 4) nous permet de voir que T suit la loi exponentielle de paramètre a.