Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math314 **Année 2009**

Corrigé du partiel du 17 avril 2009.

Ex 1. *Dé et compensations exactes (4 points)*

On lance indéfiniment un dé équilibré. On dit qu'un lancer réalise une compensation exacte si une fois ce lancer effectué, chacune des faces du dé est apparue le même nombre de fois depuis le début des lancers. Le nombre total de lancers effectués lorsque l'on observe un tel évènement est donc nécessairement un multiple de 6. Pour n entier, on note E_n l'évènement « le lancer n° $6n$ » réalise une compensation exacte.

1) Le vecteur aléatoire N de $\mathbb{N}^6$ des nombres d'apparitions de chacune des faces en m lancers suit la loi multinomiale de paramètres m (nombre total de lancers) et $p = (p_1, \dots, p_6)$ où p_i est la probabilité d'apparition de la face n° i lors d'un lancer. On a donc pour tout sextuple $(j_1, \dots, j_6)$ d'entiers de somme m,

$$P\Big(N = (j_1, \dots, j_6)\Big) = \frac{m!}{j_1! \dots j_6!} p_1^{j_1} \dots p_6^{j_6}.$$

Puisque le dé est « équilibré », on peut prendre chaque p_i égal à $1/6$. En prenant $j_1 = j_2 = \cdots = j_6 = n$ dans la formule ci-dessus, on obtient alors

$$P(E_n) = \frac{(6n)!}{(n!)^6} \left(\frac{1}{6}\right)^{6n}.$$

2) On rappelle que par la formule de Stirling, $k!$ est équivalent à $\sqrt{2\pi} k^{k+1/2} \mathrm{e}^{-k}$ quand k tend vers l'infini. En appliquant cette formule avec $k = 6n$ et avec $k = n$, on obtient :

$$P(E_n) \sim \left(\sqrt{2\pi}(6n)^{6n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-6n}\right) \left(\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}\right)^{-6} 6^{-6n} = 6^{1/2} (2\pi)^{-5/2} n^{-5/2}.$$

3) Ainsi $P(E_n) \sim cn^{-5/2}$ avec c constante positive et comme l'exposant $5/2$ est strictement supérieur à 1, la *série* de terme général positif $P(E_n)$ converge. Le premier lemme de Borel-Cantelli nous dit alors que l'évènement « réalisation d'une infinité de E_n » est de probabilité nulle. Autrement dit, presque-sûrement, dans une suite infinie de lancers d'un dé équilibré, il ne se produit qu'un nombre fini de compensations exactes.

Ex 2. *Dé, TLC et correction de Berry-Esséen (8 points)*

1) Calculons l'espérance d'une variable aléatoire X de loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \frac{1}{6}(1 + \cdots + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

La variance peut se calculer comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \operatorname{Var} X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 &= \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X = k) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - \frac{49}{4} = \frac{91}{6} - \frac{49}{4},\end{aligned}$$

soit après réduction au même dénominateur et simplification :

$$\operatorname{Var} X = \frac{35}{12}.$$

2) On effectue 3 600 lancers d'un dé équilibré et on note X_i le nombre de points indiqués par le dé au i^{e} lancer, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ le nombre total de points en n lancers. On cherche un entier k minimal tel que :

$$P(S_{3\,600} > k) \leq 0{,}05, \tag{1}$$

en négligeant l'erreur d'approximation gaussienne sur la probabilité.

Les variables aléatoires X_i sont indépendantes, de même loi et bornées ($1 \leq X_i \leq 6$), donc *a fortiori* de carré intégrable. Leur variance σ^2 calculée ci-dessus est non nulle. Les hypothèses du théorème limite central étant ainsi satisfaites, on sait alors que $S_n^* = (S_n - n\mathbf{E}X)/(\sigma n^{1/2})$ converge en loi vers une variable aléatoire Z de loi normale $\mathfrak{N}(0, 1)$ quand n tend vers l'infini. Cette convergence peut aussi s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(S_n^* \leq x) = \Phi(x) + \varepsilon_n(x), \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n(x) = 0, \tag{2}$$

où Φ désigne la fonction de répartition de $\mathfrak{N}(0, 1)$. La quantité $\varepsilon_n(x)$ est l'erreur commise en utilisant l'approximation gaussienne $P(S_n^* \leq x) \simeq \Phi(x)$. Il est usuel de négliger cette erreur d'approximation pour les « grandes valeurs » de n.

En considérant $n = 3\,600$ comme une « grande valeur », on peut alors écrire :

$$P(S_n > k) = 1 - P(S_n \leq k) = 1 - P\left(S_n^* \leq k^*\right) \simeq 1 - \Phi(k^*),$$

où l'on a posé :

$$k^* = \frac{k - n\mathbf{E}X}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{k - 3{,}5 \times 3\,600}{\sqrt{\frac{35\times3600}{12}}} = \frac{k - 12\,600}{10\sqrt{105}} = \frac{k - 12\,600}{102{,}469\,508}. \tag{3}$$

En négligeant l'erreur d'approximation gaussienne, on est ainsi amené à trouver k^* minimal[1] tel que $1 - \Phi(k^*) \leq 0{,}05$, ce qui équivaut à $\Phi(k^*) \geq 0{,}95$. Comme Φ est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$, la valeur minimale recherchée est donc :

$$k^* = \Phi^{-1}(0{,}95) \simeq 1{,}645.$$

La valeur minimale de k (réel) telle que $P(S_{3\,600} > k) \leq 0{,}05$ est donc donnée par

$$\frac{k - 12\,600}{102{,}469\,508} = 1{,}645.$$

En fait, comme k est entier, on prendra la partie entière *supérieure* du nombre obtenu en résolvant l'équation ci-dessus, à savoir $12\,600 + 1{,}645 \times 102{,}469\,508 \simeq 12\,768{,}562$. On retiendra donc qu'en négligeant l'erreur d'approximation gaussienne, la valeur minimale de k telle que $P(S_{3\,600} > k) \leq 0{,}05$ est $k = 12\,769$.

On peut noter que cette valeur est relativement basse, en effet elle ne dépasse $\mathbf{E}S_{3\,600} = 12\,600$ que de 1,4%.

3) On rappelle l'inégalité de Berry-Esséen pour une somme S_n de variables aléatoires i.i.d. (vérifiée sous l'hypothèse de finitude de $\mathbf{E}|X_1|^3$) :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |P(S_n^* \leq x) - \Phi(x)| \leq C\frac{\rho^3}{\sigma^3}\frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{4}$$

où σ est l'écart-type de X_1, $\rho^3 = \mathbf{E}|X_1 - \mathbf{E}X_1|^3$, $S_n^* = (S_n - n\mathbf{E}X_1)(\sigma n)^{-1/2}$ et Φ est la fonction de répartition de la loi gaussienne $\mathfrak{N}(0,1)$. Une valeur possible pour la constante universelle C est 0,797 5. On se propose de calculer explicitement le coefficient de $1/\sqrt{n}$ au second membre de (4) lorsque S_n est la somme des points d'un dé définie à la question 2.

Il nous faut pour cela calculer ρ^3, moment centré absolu d'ordre 3 de la v.a. discrète X de loi uniforme sur $\{1,\dots,6\}$.

$$\begin{aligned}\rho^3 = \sum_{k=1}^{6}\left|k - \frac{7}{2}\right|^3 P(X=k) &= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{5}{2}\right)^3\right] \\ &= \frac{1}{24}(125 + 27 + 1) = \frac{51}{8}.\end{aligned}$$

Le coefficient de $n^{-1/2}$ au second membre de (4) est donc :

$$C\frac{\rho^3}{\sigma^3} = 0{,}797\,5 \times \frac{51}{8} \times \left(\frac{35}{12}\right)^{-3/2} \simeq 1{,}020\,7 \quad \text{par excès.}$$

En reportant ceci dans (4), on en déduit que lorsque S_n est la somme des points obtenus en n lancers d'un dé équilibré,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |P(S_n^* \leq x) - \Phi(x)| \leq \frac{1{,}020\,7}{\sqrt{n}}, \tag{5}$$

1. Noter que k^* est une fonction croissante de k, donc il revient au même de minimiser k ou k^*.

4) L'erreur d'approximation gaussienne commise à la question 2 est la différence $\varepsilon_n(x) = P(S_n^* \leq x) - \Phi(x)$. On n'en connaît pas le signe et on ne sait pas *a priori* à quel x on va l'appliquer (en fait à $x = k^*$, valeur que l'on cherche à obtenir). L'inégalité (5) nous fournit une majoration *uniforme* de $|\varepsilon_n(x)|$ qui s'écrit :

$$\|\varepsilon_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varepsilon_n(x))| \leq \frac{1{,}020\ 7}{\sqrt{n}}. \tag{6}$$

En particulier pour $n = 3\ 600$, on obtient

$$\|\varepsilon_{3\ 600}\|_\infty \leq \frac{1{,}020\ 7}{60} \leq 0{,}017\ 1. \tag{7}$$

À ce stade, on peut déjà affirmer avec certitude que le k minimal trouvé à la question 2 vérifie $P(S_{3\ 600} > k) \leq 0{,}05 + 0{,}017\ 1 \leq 0{,}062$ (à vous de rédiger ce point en détail).

Mais comme on tient à la borne 0,05 pour $P(S_{3\ 600} > k)$, il nous faut reprendre la résolution de la question 2 en contrôlant l'erreur d'approximation gaussienne. Avec k^* toujours défini par (3), on commence par noter que :

$$P(S_n > k) = P(S_n^* > k^*) = 1 - P(S_n^* \leq k^*) = 1 - \Phi(k^*) - \varepsilon_n(k^*).$$

On est donc ramené à trouver k^* minimal tel que $1 - \Phi(k^*) - \varepsilon_n(k^*) \leq 0{,}05$, inégalité équivalente à

$$\Phi(k^*) \geq 0{,}95 - \varepsilon_n(k^*). \tag{8}$$

Rappelons que l'on ne connaît pas le signe de $\varepsilon_n(k^*)$, donc tout ce que l'on peut dire ici avec certitude est que l'inégalité (8) *est impliquée par*

$$\Phi(k^*) \geq 0{,}95 + \|\varepsilon_n\|_\infty. \tag{9}$$

Ainsi, tout k^* vérifiant (9) vérifie aussi (8), ce qui nous amène à proposer comme valeur minimale[2] :

$$k^* = \Phi^{-1}\big(0{,}95 + \|\varepsilon_n\|_\infty\big).$$

L'application numérique nous donne en utilisant (7) :

$$k^* = \Phi^{-1}\big(0{,}967\ 1\big) = 1{,}84.$$

Finalement[3] le k minimal cherché est la partie entière supérieure de

$$12\ 600 + 1{,}84 \times 102{,}469\ 508 \simeq 12\ 788{,}544,$$

soit $k = 12\ 789$.

2. obtenue par *cette méthode*. La *vraie* valeur minimale de k est certainement inférieure à celle-ci et n'est pas accessible sans le calcul explicite de la f.d.r. de $S_{3\ 600}$.

3. Le fait que 0,967 1 figure dans la table des valeurs de Φ fournie avec l'énoncé est un coup de chance (je jure ne pas l'avoir fait exprès !). Si vous avez une autre valeur que 0,967 1, il vous faut faire une interpolation linéaire ou utiliser les quantiles de Φ fournis par un ordinateur.

Ex 3. *Une marche aléatoire dans* $\mathbb{R}^2$ *(12 points)*

On se propose d'étudier le comportement asymptotique de la trajectoire d'une particule qui partie de O, choisit à chaque instant $k \in \mathbb{N}$ une direction au hasard et parcourt une distance 1 dans cette direction, avant de choisir une nouvelle direction à l'instant $k+1$. Dans cet exercice, on choisit une fois pour toutes comme norme la *norme euclidienne* canonique de $\mathbb{R}^2$: $\|(x,y)\| = (x^2+y^2)^{1/2}$.

1) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Calculons l'espérance et la matrice de covariance du vecteur aléatoire $M = (X, Y) = (\cos U, \sin U)$. Remarquons en préalable que X et Y étant des variables aléatoires bornées, $\mathbf{E}\|M\|^2 = \mathbf{E}(X^2+Y^2)$ est fini, ce qui justifie l'existence de l'espérance et de la matrice de covariance.

L'espérance du vecteur aléatoire (X, Y) est le vecteur $(\mathbf{E}X, \mathbf{E}Y)$ et comme X et Y sont des fonctions continues de la v.a. U à densité $(2\pi)^{-1}\mathbf{1}_{[0,2\pi]}$, leur espérance peut se calculer comme suit.

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}\cos U = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos t)\frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[0,2\pi]}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos t\,\mathrm{d}t = 0.$$

De même

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}\sin U = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 0.$$

Calculons maintenant les variances. Par la même méthode que ci-dessus et en notant que X est centré, on obtient :

$$\operatorname{Var} X = \mathbf{E}X^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Pour calculer $\operatorname{Var} Y = \mathbf{E}Y^2$, il suffit de noter que $X^2+Y^2 = 1$, d'où $\mathbf{E}X^2 + \mathbf{E}Y^2 = 1$ et $\mathbf{E}Y^2 = 1 - \mathbf{E}X^2 = 1 - 1/2$. Ainsi

$$\operatorname{Var} X = \operatorname{Var} Y = \frac{1}{2}.$$

En utilisant à nouveau le fait que $\mathbf{E}X = 0$, la covariance s'écrit $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}X\mathbf{E}Y = \mathbf{E}(XY)$, d'où

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(\cos U \sin U) = \mathbf{E}\left(\frac{\sin 2U}{2}\right) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin 2t\,\mathrm{d}t = 0.$$

La matrice de covariance K du vecteur aléatoire (X, Y) est donc :

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Si deux variables aléatoires de carré intégrable sont indépendantes, elles ont une covariance nulle, la réciproque étant fausse. On ne peut donc pas conclure à l'indépendance de X et Y à partir du calcul de covariance ci-dessus. En fait, il est assez facile de voir que X et Y *ne sont pas indépendantes*, d'abord intuitivement car elles sont fonctions déterministes de la même variable aléatoire U. Ensuite pour une preuve formelle, on peut noter que l'indépendance de X et Y entraînerait celle de X^2 et Y^2, or la relation $X^2+Y^2=1$ empêche cela. Par exemple $A=\{X^2<1/4\}$ et $B=\{Y^2<1/4\}$ sont deux évènements de probabilité non-nulle (calculez-la à l'aide du cercle trigonométrique) et d'intersection vide (pourquoi ?), donc ne peuvent vérifier $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

2) Soit $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi et h une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. Posons pour tout entier $k\geq 1$, $V_k:=h(U_k)$. Comme h est continue, donc mesurable pour la tribu borélienne, V_k est bien une variable aléatoire. La suite $(V_k)_{k\geq 1}$ hérite de l'indépendance de $(U_k)_{k\geq 1}$ et de son équidistribution (car les U_k ont même loi et h ne dépend pas de k). Comme h est bornée, $V_1=h(U_1)$ est bornée, donc intégrable ($\mathbf{E}|V_1|<+\infty$). Ainsi la suite $(V_k)_{k\geq 1}$ vérifie toutes les hypothèses de la loi forte des grands nombres, d'où :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(U_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{E}h(U_1). \tag{10}$$

3) Revenant à la marche aléatoire décrite en introduction, on note M_n la position occupée par la particule à l'instant n, avec $M_0=O=(0,0)$. En notant S_n et T_n les coordonnées de M_n dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$, on a donc

$$M_n=(S_n,T_n),\qquad S_n=\sum_{k=1}^{n}\cos U_k,\qquad T_n=\sum_{k=1}^{n}\sin U_k,$$

où $(U_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,2\pi]$ représentant la succession des choix de direction « au hasard ». La distance OM_n de la particule à l'origine à l'instant n vérifie :

$$\frac{1}{n^2}OM_n^2=\left(\frac{S_n}{n}\right)^2+\left(\frac{T_n}{n}\right)^2.$$

En utilisant la question précédente avec pour h la fonction cosinus ou la fonction sinus (noter que d'après la question 1, dans les deux cas $\mathbf{E}h(U_1)=0$), on voit que :

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0 \quad\text{et}\quad \frac{T_n}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Comme la convergence presque-sûre se conserve par image continue [4], on en déduit que $n^{-2}OM_n^2$ converge presque-sûrement vers 0, ce qui équivaut à la convergence presque-sûre de $n^{-1}OM_n$ vers 0, autrement dit OM_n est presque-sûrement un $o(n)$.

4) Posons $Z_k=(\cos U_k,\sin U_k)=g(U_k)$, où g est la fonction continue $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par $g(t)=(\cos t,\sin t)$. Avec ces notations, il est clair que la suite de vecteurs aléatoires $(Z_k)_{k\geq 1}$ hérite de l'indépendance et de l'équidistribution de la suite de variables aléatoires i.i.d. $(U_k)_{k\geq 1}$. De plus comme g est bornée ($\|g(t)\|=1$ pour tout $t\in\mathbb{R}$), $\mathbf{E}\|Z_1\|^2<+\infty$. On peut donc appliquer le théorème limite central vectoriel à la suite $(Z_k)_{k\geq 1}$. Remarquons ici que $\sum_{k=1}^{n} Z_k=(S_n,T_n)$ et que $\mathbf{E}(S_n,T_n)=(0,0)$

4. En exercice, justifiez cette affirmation et dites précisément comment elle s'applique ici.

par additivité de l'espérance et équidistribution des Z_k, puisque d'après la question 1, $\mathbf{E}Z_1 = \mathbf{E}(X,Y) = (0,0)$. Le TLC vectoriel nous donne ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n, T_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} W, \tag{11}$$

où W est un vecteur aléatoire de loi gaussienne $\mathfrak{N}(\mu, K)$ ayant même espérance et même matrice de covariance que $Z_1 = (\cos U_1, \sin U_1)$, soit d'après la question 1 :

$$\mu = (0,0), \qquad K = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dans le cas d'un vecteur aléatoire *gaussien* de $\mathbb{R}^2$, la nullité de la covariance des deux composantes implique leur indépendance.

Chacune de ces composantes de W étant gaussienne d'espérance 0 et de variance 1/2, donc non constante, admet pour densité $t \mapsto (\pi)^{-1/2}\exp(-t^2)$. Comme elles sont indépendantes, le couple W admet pour densité le produit (tensoriel) de ces densités, soit la fonction :

$$f : (x,y) \longmapsto \frac{1}{\pi}\exp\big(-(x^2+y^2)\big).$$

5) Soit D_r le disque de centre O et de rayon r. La densité f de W obtenue ci-dessus permet de calculer facilement $P(W \in D_r)$. En effet cette probabillité s'écrit comme l'intégrale (double) de f sur D_r :

$$P(W \in D_r) = \int_{D_r} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_{D_r} \exp\big(-(x^2+y^2)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Le passage en coordonnées polaires s'impose naturellement et nous donne :

$$\begin{aligned} P(W \in D_r) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r \exp(-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^r \exp(-\rho^2)2\rho\,\mathrm{d}\rho\right\}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^r \exp(-\rho^2)2\rho\,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^{r^2} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

d'où finalement

$$P(W \in D_r) = 1 - \exp(-r^2).$$

6) La signification pratique du résultat de la question 3 est que pour n « grand », le point M_n va se trouver dans un disque de centre O et de rayon *très inférieur* à n. On peut préciser ce résultat en remarquant que $n^{-1/2}OM_n = \|n^{-1/2}(S_n,T_n)\|$ est une fonction *continue* du vecteur aléatoire $n^{-1/2}(S_n,T_n)$ ce qui permet de déduire sa convergence en loi vers $\|W\|$ de (11). Comme la fonction de répartition H de $\|W\|$ est continue[5] sur $\mathbb{R}$ (on vient de la calculer, elle vaut 0 sur $]-\infty, 0]$ et $H(r) = 1 - \exp(-r^2)$

5. En fait ici on a seulement besoin qu'elle soit continue en tout point $r > 0$.

sur $]0, +\infty[$), on en déduit en appliquant la première définition de la convergence en loi que pour tout $r > 0$,

$$P(OM_n \leq r\sqrt{n}) = P(\|n^{-1/2}(S_n, T_n)\| \leq r) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P(\|W\| \leq r) = 1 - \exp(-r^2).$$

7) Voici une petite application numérique en guise d'illustration. On prend comme unité 1 cm (distance parcourue par la particule entre l'instant k et l'instant $k+1$). On cherche à la localiser à l'instant $n = 10\ 000$. L'inégalité triangulaire nous donne

$$OM_n \leq \sum_{k=1}^{n} \|Z_k\| = n$$

puisque chaque segment de trajectoire entre k et $k+1$ a pour longueur $\|Z_k\| = 1$. Avec $n = 10\ 000$ cm, on est donc sûr de trouver la particule dans le disque de centre O et de rayon 100 m. En acceptant un faible risque d'erreur, on peut diminuer sensiblement le disque de recherche. En effet la convergence établie à la question précédente légitime l'approximation $P(OM_n \leq r\sqrt{n}) \simeq 1 - \exp(-r^2)$ pour n « grand ». En appliquant ceci avec $n = 10\ 000$, on voit que pour localiser M_n dans le disque de centre O et de rayon $r\sqrt{n}$ avec une probabilité de 99%, il suffit de prendre r tel que $1 - \exp(-r^2) = 0,99$, soit $r = \frac{1}{2}\ln 100 \simeq 2{,}303$. Comme ici $\sqrt{n} = 100$, on voit qu'un disque de rayon 2,303 mètres suffit. Si le coût de la recherche dans un disque est proportionnel à l'aire de ce disque, on voit qu'en acceptant un faible risque d'erreur (un peu plus que 1% à cause de l'approximation gaussienne), on divise le coût par $(100/2{,}303)^2 \simeq 1\ 885$.