Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math314 **Année 2008**

Corrigé du Partiel du 5 avril 2008.

Ex 1. *Une convergence L^1*

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et de même loi telle que $\mathbf{E}|X_1| < +\infty$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. On note $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et on se propose de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left|h\bigl(n^{-1}S_n\bigr) - h\bigl(\mathbf{E}X_1\bigr)\right| = 0. \tag{1}$$

On commence par remarquer que $(X_k)_{k\geq 1}$ vérifie les hypothèses de la loi forte des grands nombres, d'où

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{E}X_1.$$

Par continuité de h sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$h\bigl(n^{-1}S_n\bigr) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} h\bigl(\mathbf{E}X_1\bigr).$$

Puisque h est bornée sur $\mathbb{R}$, il existe une constante positive C telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|h(x)| \leq C$. Par conséquent la suite des variables aléatoires $Y_n := h\bigl(n^{-1}S_n\bigr)$ est bornée par C. La constante C est trivialement une v.a. intégrable. Ainsi $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers la v.a. constante $Y := h\bigl(\mathbf{E}X_1\bigr)$, cette convergence étant *dominée* par la v.a. intégrable C. Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que cette convergence a lieu aussi au sens L^1, ce qui donne exactement (1).

Ex 2. *Records et loi des grands nombres*

On note X une variable aléatoire positive dont la loi vérifie $P(X > t) = t^{-r}$ pour tout réel $t \geq 1$. Dans tout l'exercice, on suppose que la constante r est dans $]0, 1[$. On note $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, de même loi que X et on pose :

$$M_n := \max_{1\leq k\leq n} X_k, \qquad S_n := \sum_{k=1}^n X_k.$$

1) La fonction de survie G de la v.a. X vérifie $G(t) = P(X > t) = t^{-r}$ pour $t \geq 1$. Cette formule n'est évidemment plus valable pour $t < 1$ puisqu'elle fournirait une probabilité supérieure à 1. Il est néanmoins facile de voir que pour tout $t < 1$,

on a par décroissance de G, $1 \geq P(X > t) \geq G(1) = 1$, d'où $P(X > t) = 1$. Ainsi $P(X > 1/2) = 1$.

Comme X est une variable aléatoire positive, son espérance (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) est donnée par

$$\mathbf{E}X = \int_0^{+\infty} P(X > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^{-r}\,\mathrm{d}t = +\infty,$$

car $r < 1$.

2) Pour calculer la fonction de répartition de M_n, on remarque d'abord que chacun des X_i est supérieur à 1 avec probabilité 1, donc leur maximum aussi. Il suffit donc de calculer pour tout réel $x \geq 1$, $F_n(x) := P(M_n \leq x)$, étant bien entendu que $F_n(x) = 0$ pour tout $x < 1$. On note alors que $M_n \leq x$ *si et seulement si* $X_k \leq x$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Cette équivalence logique se traduit par l'égalité d'évènements :

$$\{M_n \leq x\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \leq x\}.$$

En invoquant successivement l'indépendance des X_k, puis leur équidistribution, on en déduit que

$$\forall x \geq 1, \quad F_n(x) = P(M_n \leq x) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x) = \bigl(1 - G(x)\bigr)^n = \bigl(1 - x^{-r}\bigr)^n. \tag{2}$$

Remarquons à titre de vérification que cette fonction de x est continue sur $[1, +\infty[$, croissante comme composée de deux fonctions décroissantes et d'une fonction croissante. Sa limite quand x tend vers $+\infty$ est 1.

Finalement, la fonction de répartition F_n de la v.a. M_n est donnée par

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \bigl(1 - x^{-r}\bigr)^n & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

3) Pour étudier la convergence en loi de $n^{-1/r}M_n$, la définition de cette convergence par les fonctions de répartition nous conduit à chercher la limite pour x réel fixé de

$$H_n(x) := P\bigl(n^{-1/r}M_n \leq x\bigr).$$

Notons qu'en raison de la présence du facteur de normalisation $n^{-1/r}$, la v.a. $n^{-1/r}M_n$ peut prendre des valeurs inférieures à 1 avec probabilité non nulle, mais qu'elle reste une v.a. *positive*. On écartera donc d'emblée le cas trivial $x < 0$ pour lequel $H_n(x) = 0$. De même pour $x = 0$, $H_n(0) = 0$ car $H_n(0) \leq P(X_1 \leq 0) = 0$.

Pour $x > 0$, on se ramène à F_n en écrivant que

$$H_n(x) = P\bigl(n^{-1/r}M_n \leq x\bigr) = P\bigl(M_n \leq n^{1/r}x\bigr) = F_n\bigl(n^{1/r}x\bigr).$$

Notons $n_0 = n_0(x)$ la partie entière supérieure de x^{-r}. Alors pour $n \geq n_0$, $n^{1/r}x \geq 1$ et on peut appliquer (2) :

$$\forall n \geq n_0, \qquad H_n(x) = \bigl(1 - (n^{1/r}x)^{-r}\bigr)^n = \Bigl(1 - \frac{1}{nx^r}\Bigr)^n.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, x restant fixé, cette expression présente une forme indéterminée du type « 1^∞ ». Il est facile de lever l'indétermination en notant que

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln\Big(1 - \frac{1}{nx^r}\Big) = -\frac{1}{x^r},$$

d'où en repassant à l'exponentielle (fonction continue),

$$\lim_{n\to+\infty} H_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \exp\Big(n\ln\Big(1-\frac{1}{nx^r}\Big)\Big) = \exp(-x^{-r}).$$

Récapitulons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to+\infty} H_n(x) = H(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \exp(-x^{-r}) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La fonction H est croissante sur $\mathbb{R}$ comme limite ponctuelle d'une suite d'applications croissantes sur $\mathbb{R}$ (vous pouvez aussi vérifier cette croissance sur la formule ci-dessus ... sans calculer de dérivée !). Elle est continue sur $\mathbb{R}$: la continuité est claire sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et au point de raccord 0, on remarque que quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $-x^{-r}$ tend vers $-\infty$, donc son exponentielle tend vers 0. La limite de H en $-\infty$ est trivialement 0. En $+\infty$, H tend vers 1 car $-x^{-r}$ tend vers 0. Ainsi H est une fonction de répartition. On a donc vérifié que $n^{-1/r}M_n$ converge en loi vers une v.a. Z de fonction de répartition H.
Nota bene. Pour avoir la convergence en loi, il est indispensable de vérifier que la fonction limite H obtenue ci-dessus est bien une fonction de répartition.

4) La série de terme général $\exp(-n^\delta)$ est convergente pour tout $\delta > 0$ car ce terme général *positif* tend plus vite vers 0 que disons n^{-2}. Pour le vérifier on forme le quotient

$$\frac{\exp(-n^\delta)}{n^{-2}} = n^2\exp(-n^\delta) = \exp(-n^\delta + 2\ln n) = \exp\Big(-n^\delta\Big(1 - \frac{2\ln n}{n^\delta}\Big)\Big),$$

qui sous cette forme, tend clairement vers 0 quand n tend vers l'infini.

$$\forall \delta > 0, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n^\delta) < +\infty.$$

5) Soit a une constante telle que $0 < a < 1/r$. Montrons que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(M_n \leq n^a) < +\infty. \tag{3}$$

Puisque $a > 0$, $n^a \geq 1$ pour tout $n \geq 1$ et on peut appliquer (2), d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(M_n \leq n^a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(1 - n^{-ar}\big)^n.$$

Comme cette série est à termes *positifs*, il suffit de montrer que l'on peut majorer son terme général par celui d'une série convergente. On remarque alors que

$$\bigl(1-n^{-ar}\bigr)^n = \exp\bigl(n\ln(1-n^{-ar})\bigr).$$

Par concavité de la fonction logarithme [1], $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u > -1$. En appliquant ceci avec $u = -n^{-ar} > -1$, on obtient la majoration

$$\exp\bigl(n\ln(1-n^{-ar})\bigr) \leq \exp\bigl(-n^{1-ar}\bigr). \tag{4}$$

D'après la question précédente, ceci est bien le terme général d'une série convergente, puisque $\delta := 1 - ar > 0$ car $a < 1/r$.

Nota bene. Attention, de l'équivalence $n\ln(1-n^{-ar}) \sim -n^{1-ar}$ quand n tend vers $+\infty$, on ne peut pas déduire l'équivalence des exponentielles « $\exp(n\ln(1-n^{-ar})) \sim \exp(-n^{1-ar})$ ». En effet, la première équivalence s'écrit $n\ln(1-n^{-ar}) = -n^{1-ar}(1+\varepsilon(n))$, avec $\varepsilon(n)$ tendant vers 0. En prenant l'exponentielle, il vient $\exp(n\ln(1-n^{-ar})) = \exp(-n^{1-ar})\exp(-n^{1-ar}\varepsilon(n))$ et on ne peut conclure à l'équivalence des exponentielles que si $\exp(-n^{1-ar}\varepsilon(n))$ tend vers 1, ce qui équivaut à $n^{1-ar}\varepsilon(n)$ tend vers 0. Cette dernière condition n'est en général pas réalisée. On peut néanmoins conclure avec cette approche en remarquant que $\varepsilon(n) \geq 0$ pour n assez grand (parce que $\varepsilon(n) \sim \frac{1}{2}n^{-ar}$, comme on peut le voir en développant $\ln(1-u)$ à l'ordre 2). On en déduit que pour n assez grand, $\exp(-n^{1-ar}\varepsilon(n)) \leq 1$, ce qui nous permet de retomber sur la majoration (4).

6) Grâce au premier lemme de Borel Cantelli, la convergence de série (3) nous dit que l'évènement

$$A := \bigl\{\omega \in \Omega;\ M_n(\omega) \leq n^a \text{ pour une infinité d'indices } n\bigr\}$$

est de probabilité nulle. Son complémentaire $\Omega' = A^c$ est donc de probabilité 1. L'appartenance d'un ω à Ω' signifie que l'inégalité $M_n(\omega) \leq n^a$ ne peut avoir lieu que pour un nombre fini (éventuellement nul) d'indices n, donc qu'il existe un rang $N = N(\omega)$ tel que pour tout $n \geq N$, $M_n(\omega) > n^a$. Comme $P(\Omega') = 1$, ceci implique que presque-sûrement $M_n > n^a$ pour tout $n \geq N$, avec N aléatoire (c'est à dire dépendant de ω).

7) En prenant $a > 1$, on en déduit que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty.$$

En effet comme les X_k sont positives, on a pour tout $\omega \in \Omega$, $M_n(\omega) \leq S_n(\omega)$. Si de plus $\omega \in \Omega'$, on a un entier $N(\omega)$ tel que :

$$\forall n \geq N(\omega), \qquad \frac{S_n(\omega)}{n} \geq \frac{M_n(\omega)}{n} > \frac{n^a}{n} = n^{a-1}.$$

Comme $a > 1$, ce minorant tend vers $+\infty$ avec n et comme $P(\Omega') = 1$, on en déduit que S_n/n tend presque sûrement vers $+\infty$. Ceci ne contredit pas la loi forte des grands nombres qui ne s'applique pas ici puisque pour $r \leq 1$, X_1 n'est pas intégrable.

1. L'inégalité qui suit exprime simplement que la courbe représentative de $u \mapsto \ln(1+u)$ est « en dessous » de sa tangente au point $u = 0$.

8) En fait

$$\frac{S_n}{n^c} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty,$$

pour tout exposant c tel que $0 < c < 1/r$. Pour le voir, on intercale un a entre c et $1/r$ et on adapte immédiatement le raisonnement ci-dessus en remplaçant le dénominateur n par n^c. Le minorant presque sûr à partir du rang aléatoire N devient n^{a-c} qui tend encore vers $+\infty$.

Ex 3. *Convergences de moyennes géométriques*

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé, à valeurs dans $]0,+\infty[$, indépendantes, de même loi telle que $\mathbf{E}|\ln X_1| < +\infty$. On note $b := \mathbf{E}\ln X_1$.

1) On note $T_n = X_1 \cdots X_n$ le produit des n premières variables aléatoires de la suite $(X_k)_{k\geq 1}$, leur moyenne géométrique est $T_n^{1/n}$.

Posons pour tout $k \geq 1$, $Z_k := \ln X_k$. Comme X_k est à valeurs dans $]0,+\infty[$ et ln est définie et continue (donc borélienne) sur cet ensemble, on définit bien ainsi une variable aléatoire. La suite $(Z_k)_{k\geq 1}$ hérite de l'indépendance et de l'équidistribution de $(X_k)_{k\geq 1}$, par image par la même fonction continue ln. De plus l'hypothèse ci-dessus s'écrit $\mathbf{E}|Z_1| < +\infty$. La loi forte des grands nombres nous dit alors que la *moyenne arithmétique* de $Z_1,\dots,Z_n$ converge presque-sûrement vers $b = \mathbf{E}Z_1$. En prenant l'image par la fonction *continue* exponentielle, on en déduit que

$$T_n^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}(Z_1+\cdots+Z_n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mathrm{e}^b = \exp(\mathbf{E}\ln X_1). \tag{5}$$

2) Calculons cette limite dans le cas des v.a. X_k de l'exercice précédent. La fonction de répartition de X_1 est

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 1 - t^{-r} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Cette fonction est C^1 par morceaux avec raccord continu au point 1. La loi de X_1 a donc une densité f, obtenue par dérivation de F :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1, \\ rt^{-r-1} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

La variable aléatoire X_1 étant p.s. supérieure à 1, $\ln X_1$ est p.s. positive, il n'y a donc pas lieu de vérifier l'intégrabilité avant de calculer $\mathbf{E}\ln X_1$.

$$\mathbf{E}\ln X_1 = \int_0^{+\infty} f(t)\ln t\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} rt^{-r-1}\ln t\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a rt^{-r-1}\ln t\,\mathrm{d}t.$$

On calcule $\int_1^a rt^{-r-1}\ln t\,\mathrm{d}t$ par parties en posant $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = rt^{-r-1}$, ce qui donne :

$$\int_1^a rt^{-r-1}\ln t\,\mathrm{d}t = \left[-t^{-r}\ln t\right]_1^a + \int_1^a t^{-r-1}\,\mathrm{d}t = -a^{-r}\ln a - \frac{1}{r}(a^{-r}-1).$$

Quand a tend vers $+\infty$, cette expression tend vers $1/r$, d'où

$$\mathbf{E}\ln X_1 = 1/r \quad \text{et} \quad T_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \exp(1/r).$$

On pouvait aussi calculer $\mathbf{E}\ln X_1$ sans passer par la densité f. En effet, comme $X_1 \geq 1$ p.s., $\ln X_1$ est positive p.s., d'où

$$\mathbf{E}\ln X_1 = \int_0^{+\infty} P(\ln X_1 > x)\,\mathrm{d}x.$$

Or la fonction exponentielle réalise une bijection croissante de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$, d'où pour tout $x \in [0,+\infty[$, $\ln X_1 > x \Leftrightarrow X_1 > \mathrm{e}^x$ et par suite $P(\ln X_1 > x) = P(X_1 > \mathrm{e}^x)$. Comme $t = \mathrm{e}^x \geq 1$, $P(X_1 > \mathrm{e}^x) = t^{-r} = \mathrm{e}^{-rx}$. En reportant ceci dans l'intégrale ci-dessus, il vient : $\mathbf{E}\ln X_1 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-rx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r}$.

3) On revient au cas général et on pose $Y_k := \mathrm{e}^{-b}X_k$ et $R_n := Y_1 \cdots Y_n$. Au vu de (5), on a

$$R_n^{1/n} = \exp\Big(\frac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n) - b\Big).$$

Par la loi forte des grands nombres appliquée à $(Z_k)_{k\geq 1}$, $n^{-1}(Z_1 + \cdots + Z_n) - b$ converge presque sûrement vers 0. Par continuité, son exponentielle converge presque-sûrement vers $\mathrm{e}^0 = 1$.

4) Commençons par remarquer que $R_n^{1/\sqrt{n}} = (R_n^{1/n})^{\sqrt{n}}$ en sorte que si l'on essaie d'étudier la convergence presque-sûre de $R_n^{1/\sqrt{n}}$, on se heurte à une forme indéterminée du type « 1^∞ ». En fait nous allons montrer que si $\mathbf{E}Z_1^2 < +\infty$, il y a convergence *en loi* vers une v.a. non constante W, ce qui montrera au passage qu'il ne peut y avoir convergence p.s. vers une constante (pourquoi ?).

Pour alléger les écritures, posons $\sigma^2 = \operatorname{Var} Z_1 = \operatorname{Var}\ln X_1$ (on suppose [2] $\sigma > 0$) et

$$S_n := Z_1 + \cdots + Z_n, \qquad S_n^* := \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} = \frac{S_n - nb}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Par le théorème limite central (cas i.i.d.), S_n^* converge en loi vers une v.a. V de loi gaussienne $\mathfrak{N}(0,1)$.

On remarque alors que

$$\ln\big(R_n^{1/\sqrt{n}}\big) = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln R_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - nb) = \sigma S_n^*,$$

ce qui s'écrit aussi

$$R_n^{1/\sqrt{n}} = \exp\big(\sigma S_n^*\big).$$

Par conservation de la convergence en loi par image par la fonction *continue* $t \mapsto \exp(\sigma t)$, on en déduit que

$$R_n^{1/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \exp(\sigma V) =: W.$$

La loi de σV est gaussienne $\mathfrak{N}(0,\sigma)$. La loi de W est appelée *log-normale* car $\ln W$ est gaussienne.

2. L'auteur de l'énoncé avait oublié de le préciser. Le cas où $\sigma = 0$ donne X_k constante p.s. et rend le problème sans intérêt.