Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math306 **Année 2005-2006**

Corrigé du Partiel du 3 novembre 2005

Ex 1. *Un peu de sommabilité*

On définit la famille de réels $\mathcal{U} := \big(u_{i,j}\big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{i,j} := \frac{1}{18}\Big(\frac{5}{6}\Big)^i\Big(\frac{2}{3}\Big)^j.$$

1) $\mathcal{U}$ est une famille de réels *positifs*, sa somme S a donc toujours un sens comme élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$, on peut d'ailleurs la définir directement comme le supremum des sommes S_K où K décrit l'ensemble de toutes les parties finies de $\mathbb{N}^2$. Dans ce cas la famille est sommable si S est finie. Nous pouvons appliquer à cette famille le théorème de sommation par paquets dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, en découpant $\mathbb{N}^2$ en la réunion des « paquets » $\{i\}\times\mathbb{N}$, où i décrit $\mathbb{N}$. Nous obtenons ainsi

$$S := \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i\in\mathbb{N}}\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{18}\Big(\frac{5}{6}\Big)^i\Big(\frac{2}{3}\Big)^j\right\} = \frac{1}{18}\sum_{i\in\mathbb{N}}\Big(\frac{5}{6}\Big)^i\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\Big(\frac{2}{3}\Big)^j\right\}.$$

Rappelons ici que $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$, série géométrique standard de raison $q\in\mathbb{R}$, converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $|q|<1$ et que sa somme est alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad (|q|<1).$$

En appliquant cette règle successivement à la série indexée par j avec $q = 2/3$ puis à celle indexée par i avec $q = 5/6$, nous obtenons[1] :

$$S = \frac{1}{18}\sum_{i\in\mathbb{N}}\Big(\frac{5}{6}\Big)^i\left\{\frac{1}{1-2/3}\right\} = \frac{3}{18}\sum_{i\in\mathbb{N}}\Big(\frac{5}{6}\Big)^i = \frac{1}{6}\frac{1}{1-5/6} = 1 < +\infty.$$

La famille $\mathcal{U}$ est donc sommable et sa somme S vaut 1.

2) On note L le sous ensemble de $\mathbb{N}^2$ défini par $L := \big\{(i,j)\in\mathbb{N}^2;\ 0\le i\le j\big\}$ et on s'intéresse à la famille $\mathcal{U}_L := \big(u_{i,j}\big)_{(i,j)\in L}$.

1. Lorsque q est positif, on peut écrire indifféremment $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ ou $\sum_{k\in\mathbb{N}} q^k$, avant même de savoir s'il y a convergence absolue dans $\mathbb{R}$, en raison de la convergence commutative dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ des séries à termes positifs.

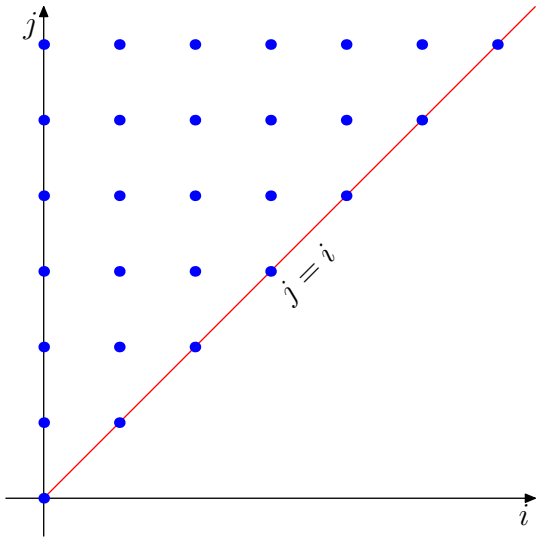

FIG. 1 – Ensemble d'indices L

a) Une représentation graphique de L est proposée figure 1.

b) La famille $\mathcal{U}_L$ est sommable comme sous-famille de la famille sommable $\mathcal{U}$.

c) Pour calculer la somme S_L de cette famille, on peut utiliser le théorème de sommation par paquets en découpant L en paquets « horizontaux » $\{0, \ldots, j\} \times \{j\}$, avec j décrivant $\mathbb{N}$, cf. figure 2.

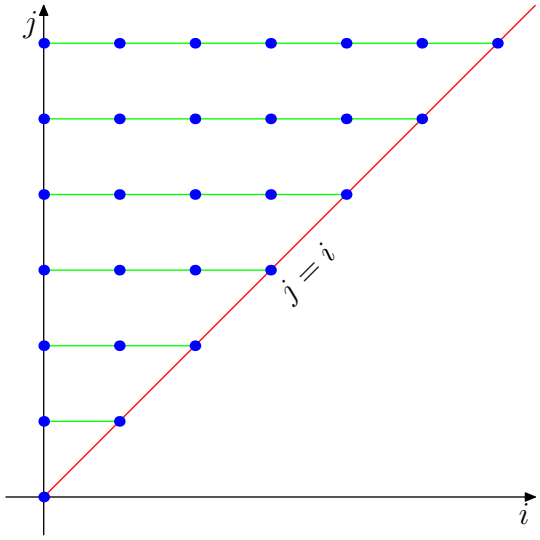

FIG. 2 – Découpage de L en paquets « horizontaux »

$$S_L := \sum_{(i,j)\in L} u_{i,j} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{18}\left(\frac{5}{6}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^j \right\} = \frac{1}{18} \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^j \left\{ \sum_{i=0}^{j} \left(\frac{5}{6}\right)^i \right\} \tag{1}$$

Rappelons ici que la somme des termes d'une suite géométrique finie de raison q est donnée par la formule

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \forall q \neq 1.$$

En appliquant ceci avec $q = 5/6$ et en reportant dans (1), il vient

$$S_L = \frac{1}{18}\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^j \left\{\frac{1-(5/6)^{j+1}}{1-5/6}\right\} = \frac{1}{3}\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^j \left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{j+1}\right).$$

On voit ainsi que S_L peut s'écrire comme la différence de deux séries géométriques de raison $q = \frac{2}{3} < 1$ et $q' = \frac{2}{3}\times\frac{5}{6} = \frac{5}{9} < 1$. La convergence de ces deux séries légitime cette écriture comme différence.

$$S_L = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j - \frac{5}{18}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j\left(\frac{5}{6}\right)^j = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-2/3} - \frac{5}{18}\,\frac{1}{1-10/18} = 1-\frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

Une autre façon de calculer S_L est d'appliquer le théorème de sommation par paquets en découpant L en paquets « verticaux » $\{i\}\times\{j\in\mathbb{N};\, j\geq i\}$, i décrivant $\mathbb{N}$, cf. figure 3. On obtient ainsi

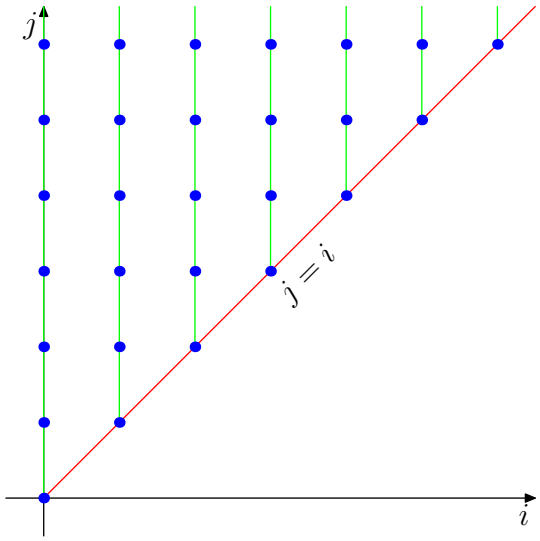

FIG. 3 – Découpage de L en paquets « verticaux »

$$S_L = \sum_{i=0}^{+\infty}\left\{\sum_{j=i}^{+\infty}\frac{1}{18}\left(\frac{5}{6}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^j\right\} = \frac{1}{18}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^i\left\{\sum_{j=i}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j\right\}. \tag{2}$$

C'est l'occasion de rappeler le calcul de la somme d'une série géométrique amputée de ses premiers termes. Il suffit de mettre en facteur le premier terme pour faire apparaître

la série géométrique standard :

$$\sum_{k=m}^{+\infty} q^k = q^m \sum_{k=m}^{+\infty} q^{k-m} = q^m \sum_{\ell=0}^{+\infty} q^\ell = \frac{q^m}{1-q}, \quad (|q|<1).$$

En reportant ceci dans (2) avec $m = j$ et $q = 2/3$, il vient

$$S_L = \frac{1}{18} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^i \frac{1}{1-2/3} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^i = \frac{1}{6} \frac{1}{1-5/9} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{8}.$$

Ex 2. *Un double temps d'attente*

On dispose d'un dé bleu et d'un dé rouge *équilibrés* et on effectue une suite infinie de lancers de cette paire de dés. Pour un lancer nous pouvons modéliser cette expérience par l'ensemble $E := \{1,2,3,4,5,6\}^2$ des couples à composantes dans $\{1,\dots,6\}$, la première composante représentant le nombre indiqué par le dé bleu et la deuxième celui indiqué par le rouge. Pour représenter la suite infinie de lancers, nous utiliserons l'ensemble

$$\Omega := E^{\mathbb{N}^*} = \left\{(\omega_n)_{n\geq 1};\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega_n = (\omega_{n,1}, \omega_{n,2}) \in E\right\}$$

des suites infinies de couples éléments de E. Définissons les évènements suivants.

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, A_k est l'évènement « la première obtention du chiffre 2 avec le dé bleu a lieu lors du k^{e} lancer ».
- A' est l'évènement « le dé bleu ne donne jamais le chiffre 2 ».
- Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, B_ℓ est l'évènement « la première obtention du chiffre 3 ou du chiffre 6 avec le dé rouge a lieu lors du ℓ^{e} lancer ».
- B' est l'évènement « le dé rouge ne donne jamais le chiffre 3 ni le 6 ».

Dans tout cet exercice, on n'essaie pas d'expliciter la tribu $\mathcal{F}$ et la mesure de probabilité P telles que le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ soit une modélisation « correcte » de la suite infinie des lancers. On admet l'existence d'un tel triplet et on se contente de s'appuyer sur des hypothèses naturelles d'indépendance des lancers pour effectuer les calculs.

1) *Non dénombrabilité de A' et B'.*

Pour montrer que ces deux ensembles sont infinis non dénombrables, on commence par les écrire comme des produits cartésiens infinis, *i.e.* ici des ensembles de suites. Pour cela on introduit les ensembles

$$J := \{1,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \quad \text{et} \quad K := \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,4,5\},$$

représentés[2] figure 4. Avec ces notations, il est clair que

$$A' = J^{\mathbb{N}^*}, \quad B' = K^{\mathbb{N}^*}.$$

Pour montrer que A' et B' sont non dénombrables, on peut utiliser la méthode vue en cours pour établir la non-dénombrabilité de $[0,1]$. Cette méthode est résumée par le lemme suivant.

2. Pour cette figure nous adoptons la convention « matricielle » de représentation du couple (i,j) par la case à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. La convention « cartésienne » représenterait le couple (i,j) à l'intersection de la « verticale » i et de l'« horizontale » j.

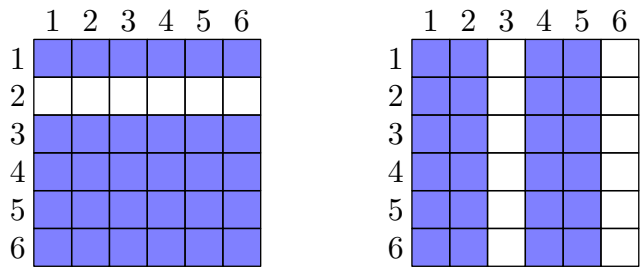

FIG. 4 – Ensembles J (à gauche) et K (à droite)

Lemme 1. *Si H est un ensemble contenant au moins deux éléments, $H^{\mathbb{N}^*}$ est infini non dénombrable.*

Preuve. Puisque H a au moins deux éléments distincts, choisissons en deux que nous noterons a et b. On a alors l'inclusion $\{a,b\}^{\mathbb{N}^*} \subset H^{\mathbb{N}^*}$. Or $\{a,b\}^{\mathbb{N}^*}$ est déjà infini non dénombrable puisqu'en bijection évidente avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, lequel est infini non dénombrable (cf. cours). □

Pour conclure, il ne reste plus qu'à appliquer ce lemme avec $H = J$ puis $H = K$, en notant au passage que $\operatorname{card} J = 30$ et $\operatorname{card} K = 24$.

2) *Calcul de $P(A_k)$, $P(B_\ell)$ et $P(A_k \cap B_\ell)$, pour $k, \ell \in \mathbb{N}^*$.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$\begin{aligned}
F_n &:= \{\text{au } n^{\text{e}} \text{ lancer, le dé bleu donne le chiffre } 2\}\\
F_n^c &:= \{\text{au } n^{\text{e}} \text{ lancer, le dé bleu donne un chiffre autre que } 2\}\\
G_n &:= \{\text{au } n^{\text{e}} \text{ lancer, le dé rouge donne un chiffre multiple de } 3\}\\
G_n^c &:= \{\text{au } n^{\text{e}} \text{ lancer, le dé rouge donne un chiffre non multiple de } 3\}.
\end{aligned}$$

L'hypothèse d'équilibre des dés nous permet d'attribuer à ces évènements les probabilités suivantes :

$$P(F_n) = \frac{1}{6},\ P(F_n^c) = \frac{5}{6}, \quad P(G_n) = \frac{1}{3},\ P(G_n^c) = \frac{2}{3}.$$

Avec les notations d'évènements introduites ci-dessus, on a clairement

$$A_1 = F_1 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2,\ A_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i^c\right) \cap F_k.$$

Pour $k = 1$, on a donc $P(A_1) = P(F_1) = \frac{1}{6}$. Pour $k \geq 2$, en utilisant l'hypothèse d'indépendance des lancers, qui induit l'indépendance mutuelle des évènements $F_1^c, \ldots, F_{k-1}^c, F_k$, on obtient

$$P(A_k) = P(F_1^C) \times \cdots \times P(F_{k-1}^c) P(F_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

et on constate que cette formule générale reste valable dans le cas particulier $k = 1$, d'où

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(A_k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}. \tag{3}$$

La même argumentation avec « G » à la place de « F » nous donne

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad P(B_\ell) = \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{\ell-1}. \tag{4}$$

Enfin, notons que l'évènement A_k ne dépend que du comportement du dé bleu et que de même, B_ℓ ne dépend que du comportement du dé rouge. L'hypothèse naturelle d'indépendance des deux dés induisant l'indépendance des évènements A_k et B_ℓ, on en déduit

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad P(A_k \cap B_\ell) = P(A_k)P(B_\ell) = \frac{1}{18}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{k-1}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{\ell-1}. \tag{5}$$

3) *Calcul de* $P\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\big)$*, nullité de* $P(A')$ *et* $P(B')$

Les évènements A_k sont deux à deux incompatibles (disjoints) car pour un même ω, *i.e.* pour une même suite infinie de lancers, la *première* apparition du 2 pour le dé bleu ne peut avoir lieu *à la fois* aux lancers k et $k' \neq k$. Autrement dit, si $k \neq k'$, $A_k \cap A_{k'} = \emptyset$. Par σ-additivité de P et un calcul de somme de série géométrique de raison $5/6$, on en déduit que

$$P\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{6}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{k-1} = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{+\infty}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{i} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{1-5/6} = 1.$$

Ce résultat signifie qu'il y a une probabilité 1 que le dé bleu marque au moins une fois le chiffre 2 en une infinité de lancers. Pour autant, cet évènement $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$ (« le dé bleu marque au moins une fois le chiffre 2 ») n'est pas confondu avec Ω. Son complémentaire dans Ω est A' (« le dé bleu ne marque jamais le chiffre 2 »). On en déduit que

$$P(A') = 1 - P\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\Big) = 1 - 1 = 0.$$

Ainsi, bien qu'étant infini non dénombrable, A' est de probabilité nulle. On vérifie de même que $P(B') = 0$ en s'appuyant sur le calcul de série géométrique :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{\ell-1} = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{+\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{j} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-2/3} = 1.$$

4) *Calcul de* $P(A' \cup B')$

Par sous-additivité de P, on a

$$0 \leq P(A' \cup B') \leq P(A') + P(B') = 0, \quad \text{d'où} \quad P(A' \cup B') = 0.$$

C'est certainement la méthode la plus rapide, à condition d'avoir résolu la question précédente. Remarquons que A' et B' ne sont pas disjoints[3] c'est pour cela que l'on a eu recours ici à la sous-additivité de P et pas à l'additivité.

3. Leur intersection est même un ensemble infini non dénombrable, vérifiez !

Une autre façon de vérifier que $A' \cup B'$ est de probabilité nulle est de remarquer que son complémentaire est l'évènement [4] « le dé bleu finit par sortir un 2 *et* le dé rouge finit par sortir un multiple de 3 ». Ce dernier évènement peut encore s'écrire comme la réunion pour (k, ℓ) décrivant $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ des évènements deux à deux disjoints $C_{k,\ell} := A_k \cap B_\ell$. Pour le voir, il suffit de partitionner suivant les instants de première sortie d'un 2 pour le dé bleu et de première sortie d'un multiple de 3 pour le dé rouge. Par σ-additivité, on a alors

$$1 - P(A' \cap B') = P\Big(\bigcup_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2} C_{k,\ell}\Big) = \sum_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2} P(A_k \cap B_\ell) = \sum_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{18}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{k-1}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{\ell-1}.$$

Le changement d'indice $(i, j) = (k - 1, \ell - 1)$ nous donne

$$1 - P(A' \cap B') = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{18}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{i}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{j} = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = 1,$$

en exploitant le calcul fait à la première question de l'exercice 1. On retrouve bien ainsi la nullité de $P(A' \cap B')$.

5) On introduit les notations $A_k = \{X = k\}$, $B_\ell = \{Y = \ell\}$. Les nombres aléatoires X et Y s'interprètent comme les temps d'attente respectifs, exprimés en nombre de lancers, de la première obtention d'un 2 avec le dé bleu et de la première obtention d'un 3 ou d'un 6 avec le dé rouge. On note C l'évènement « le dé bleu donne 2 pour la première fois au bout de X lancers, le rouge donne un 3 ou un 6 pour la première fois au bout de Y lancers *et* $X \leq Y$ ». Avec un léger abus [5], on pourra écrire $C = \{X \leq Y\}$. Notons que C est inclus dans A'^c et dans B'^c.

Avec les notations ci-dessus, il est clair que C est l'union des $A_k \cap B_\ell$ tels que $k \leq \ell$.

$$C = \bigcup_{\substack{(k,\ell)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \\ k\leq\ell}} A_k \cap B_\ell. \tag{6}$$

Pour vérifier que les évènements $C_{k,\ell} = A_k \cap B_\ell$ sont deux à deux disjoints, on peut écrire :

$$C_{k,\ell} \cap C_{k',\ell'} = (A_k \cap B_\ell) \cap (A'_k \cap B'_\ell) = (A_k \cap A'_k) \cap (B_\ell \cap B'_\ell). \tag{7}$$

Or si $(k, \ell) \neq (k', \ell')$, ces deux couples diffèrent par au moins une composante. Si c'est la première $k \neq k'$ et alors $A_k \cap A'_k = \emptyset$, comme nous l'avons vu à la question 3, d'où en reportant dans (7), $C_{k,\ell} \cap C_{k',\ell'} = \emptyset$. Sinon, $\ell \neq \ell'$ et on obtient de même $B_\ell \cap B'_\ell = \emptyset$

4. Le complémentaire de $A' \cup B'$ est $A'^c \cap B'^c$, ce qui se traduit par la phrase « le dé bleu finit par sortir un 2 *et*... ».

5. Pour ceux qui connaissent les variables aléatoires, l'abus vient du fait que $X : \omega \mapsto X(\omega)$ n'est pas défini sur tout Ω, mais seulement sur $\Omega \setminus A'$ et de même Y n'est défini que sur $\Omega \setminus B'$. Donc si on veut tester l'appartenance à C d'un ω quelconque, l'inégalité à tester est $X(\omega) \leq Y(\omega)$, mais il se peut qu'elle n'ait pas de sens. On pourrait lever cette difficulté en posant $X(\omega) := +\infty$ si $\omega \in A'$ et $Y(\omega) := +\infty$ si $\omega \in B'$. On aurait alors $\{X \leq Y\} = C \cup B'$, ce qui ne changerait pas la valeur obtenue pour $P(X \leq Y)$ puisque $P(B') = 0$.

puis $C_{k,\ell} \cap C_{k',\ell'} = \emptyset$. L'ensemble d'indexation de la réunion dans (6) étant dénombrable comme partie infinie de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, nous pouvons donc appliquer la σ-additivité de P pour obtenir

$$P(C) = \sum_{\substack{(k,\ell)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \\ k\leq\ell}} P(A_k \cap B_\ell) = \sum_{\substack{(k,\ell)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \\ k\leq\ell}} \frac{1}{18}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{k-1}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{\ell-1}.$$

En effectuant le changement d'indices $(i,j) = (k-1, \ell-1)$, l'ensemble d'indexation devient $L = \big\{(i,j) \in \mathbb{N}^2;\ 0 \leq i \leq j\big\}$ et en utilisant le calcul de la question 2 de l'exercice 1 on obtient

$$P(C) = \sum_{(i,j)\in L} \frac{1}{18}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{i}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{j} = \sum_{(i,j)\in L} u_{i,j} = \frac{3}{8}.$$

6) *Calcul de $P(C)$ par les probabilités conditionnelles*

Nous allons maintenant retrouver la valeur de $P(C)$ en conditionnant par la partition $\{A_1, A_1^c \cap B_1, A_1^c \cap B_1^c\}$. Pour vérifier que cette famille est bien une partition de Ω, on peut le voir de manière formelle, en montrant que c'est vrai indépendamment de la définition des ensembles A_1 et B_1, pourvu que les trois éléments de cette famille soient non vides. En effet si A_1 et A_1^c sont non vides, ils constituent clairement une partition de Ω. Ensuite on écrit que $A_1^c = (A_1^c \cap B_1) \cup (A_1^c \cap B_1^c)$, ce qui revient à découper A_1^c en deux parties disjointes. On a alors

$$\Omega = A_1 \cup A_1^c = A_1 \cup (A_1^c \cap B_1) \cup (A_1^c \cap B_1^c)$$

Les trois ensembles A_1, $A_1^c \cap B_1$, $A_1^c \cap B_1^c$ sont deux à deux disjoints par construction, leur réunion est Ω, donc si aucun des trois n'est vide on a une partition de Ω.

Une autre façon de voir que l'on a bien une partition est de dire que l'on a trois cas possibles pour le résultat du premier lancer :

1. Le dé bleu marque le chiffre 2 (réalisation de A_1) ;
2. Le dé bleu marque un chiffre autre que 2 et le dé rouge marque 3 ou 6 (réalisation de $A_1^c \cap B_1$) ;
3. Le dé bleu marque un autre chiffre que 2 et le dé rouge marque un autre chiffre que 3 ou 6 (réalisation de $A_1^c \cap B_1^c$) ;

Rappelons que $P(A_1) = 1/6$ et $P(B_1) = 1/3$. En utilisant l'indépendance des deux dés, on a

$$P(A_1^c \cap B_1) = P(A_1^c)P(B_1) = \frac{5}{18}, \quad P(A_1^c \cap B_1^c) = P(A_1^c)P(B_1^c) = \frac{5}{9}.$$

Chacun des évènements constituant la partition $\{A_1, A_1^c \cap B_1, A_1^c \cap B_1^c\}$ ayant une probabilité non nulle[6], on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(C \mid A_1)P(A_1) + P(C \mid A_1^c \cap B_1)P(A_1^c \cap B_1) + P(C \mid A_1^c \cap B_1^c)P(A_1^c \cap B_1^c). \quad (8)$$

Il nous faut maintenant *attribuer* une valeur aux probabilités conditionnelles qui interviennent dans (8).

6. Ce qui, soit dit en passant, montre qu'il est non vide, même si ce point était évident directement.

a) $P(C \mid A_1) = 1$. À première vue, on pourrait justifier cette égalité en disant que si A_1 est réalisé, autrement dit si $X = 1$, Y ne peut prendre qu'une valeur supérieure ou égale à 1, donc ici à X, donc C est réalisé. Il y a un point faible dans ce raisonnement, c'est qu'il ne prend pas en compte la possibilité (théorique) que le dé rouge ne sorte jamais un multiple de 3, donc que Y n'ait pas de valeur définie. Voici une façon de rétablir la situation. On remarque d'abord que si A_1 est réalisé, ou bien le dé rouge finit par sortir un multiple de 3 et alors C est réalisé, ou bien il ne sort jamais de multiple de 3 et c'est B' qui se réalise. En d'autres termes, $A_1 \subset C \cup B'$. On en déduit que $P(C \cup B' \mid A_1) = 1$. D'autre part, B' ayant une P-probabilité nulle a aussi une $P(. \mid A_1)$-probabilité nulle puisque

$$0 \leq P(B' \mid A_1) = \frac{P(B' \cap A_1)}{P(A_1)} \leq \frac{P(B')}{P(A_1)} = 0.$$

Notons aussi que $C \cap B' = 0$, puisque $C \subset B'^c$. En utilisant l'additivité de la probabilité $P(. \mid A_1)$, on en déduit que

$$1 = P(C \cup B' \mid A_1) = P(C \mid A_1) + P(B' \mid A_1) = P(C \mid A_1) + 0,$$

d'où finalement, $P(C \mid A_1) = 1$.

b) $P(C \mid A_1^c \cap B_1) = 0$. En effet si au premier lancer le dé bleu ne marque pas le 2 et le dé rouge marque un multiple de 3, il est impossible que le dé bleu marque le 2 à un numéro de lancer inférieur ou égal à 1 ! D'un point de vue ensembliste, on pourrait aussi dire que $C \cap A_1^c \cap B_1 = \emptyset$.

c) $P(C \mid A_1^c \cap B_1^c) = P(C)$. En effet si au premier lancer de la paire de dés, ni le dé bleu ne donne un 2 ni le rouge ne donne un multiple de 3, on a « un coup pour rien » et tout se passe comme si on n'avait pas lancé une première fois la paire de dés. L'hypothèse d'indépendance des lancers nous permet de dire que dans ce contexte, le hasard est « sans mémoire ». Bien sûr ceci ne prétend pas être une preuve mathématique rigoureuse[7]. C'est seulement une approche heuristique.

En revenant à (8) on obtient finalement

$$P(C) = 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{18} + P(C) \times \frac{5}{9},$$

d'où

$$\frac{4}{9} P(C) = \frac{1}{6},$$

ce qui se résout en $P(C) = 3/8$. On retrouve bien la valeur calculée par une autre méthode à la question 5.

7. Pour produire une telle preuve, il faudrait commencer par construire le modèle $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ choisi pour cette expérience et ensuite faire du calcul de probabilités dans ce modèle. Ceci nous emmènerait bien au-delà du programme d'I.P.E.

Ex 3. *Une fête Ch'ti (6 points)*

Lors de la grande fête annuelle d'une cité du Nord, le maire lance du haut du beffroi n poupées de chiffons sur la foule massée sur les deux rives d'un canal. Compte tenu de la hauteur du beffroi, de la force et de la direction du vent (et de l'expérience des années précédentes !), on estime que le point d'atterrissage d'une poupée suit la loi uniforme Q sur le rectangle représenté figure 5.

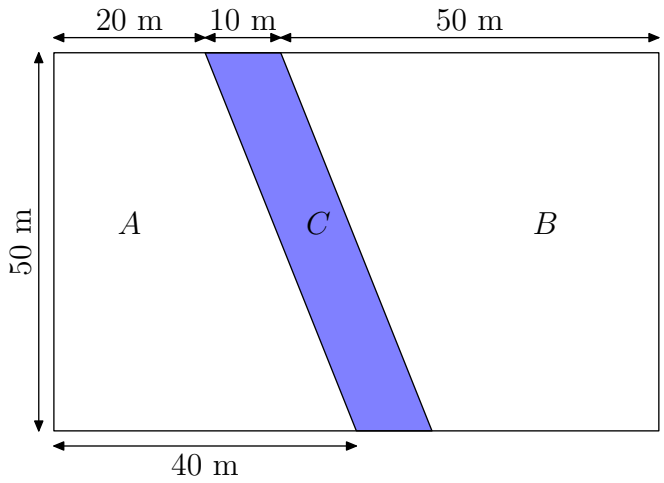

FIG. 5 – Zones d'atterrissage

1) *Probabilités d'atterrissage en zone A, B ou C*

Notons λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et R le rectangle représenté figure 5. La probabilité Q est la loi uniforme sur R. Cela signifie que pour tout borélien D de $\mathbb{R}^2$,

$$Q(D) = \frac{\lambda_2(D \cap R)}{\lambda_2(R)}. \tag{9}$$

Rappelons que λ_2 généralise la notion d'aire et que l'aire d'un trapèze est égale au produit de la hauteur par la moyenne des bases. Remarquons aussi que pour tout segment de droite S, $\lambda_2(S) = 0$ puisque S est inclus dans une droite qui est un sous-espace affine propre de $\mathbb{R}^2$. Ceci nous permet de ne pas nous préoccuper de la mesure des frontières des figures dont nous allons calculer les aires. En appliquant (9) dans le cas particulier où $D \subset R$, donc avec $\lambda_2(D \cap R) = \lambda_2(D)$, on obtient :

$$Q(A) = \frac{\lambda_2(A)}{\lambda_2(R)} = \frac{50 \times (20+40)/2}{50 \times 80} = \frac{3}{8}.$$

$$Q(B) = \frac{\lambda_2(B)}{\lambda_2(R)} = \frac{50 \times (30+50)/2}{50 \times 80} = \frac{1}{2}.$$

Pour calculer $Q(C)$, on remarque que $\lambda_2(R) = \lambda_2(A) + \lambda_2(B) + \lambda_2(C)$, d'où

$$Q(C) = \frac{\lambda_2(R) - \lambda_2(A) - \lambda_2(B)}{\lambda_2(R)} = 1 - Q(A) - Q(B) = \frac{1}{8}.$$

On aurait pu aussi calculer directement $\lambda_2(C)$ en notant que l'aire d'un parallélogramme est égale au produit ℓd où ℓ est la longueur d'un côté et d la distance entre les deux droites parallèles engendrées par ce côté et son côté opposé[8]. Donc ici $\lambda_2(C) = 10 \times 50 = 500$, d'où $Q(C) = 500/(50 \times 80) = 1/8$.

2) On s'intéresse désormais aux lancers des n poupées que l'on considère comme *indépendants* et on note $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé modélisant cette expérience. On note X, Y et Z les nombres aléatoires de poupées tombant respectivement en zone A, B et C. Ces trois nombres sont liés par la relation $X + Y + Z = n$. On se propose de calculer $P\big((X, Y, Z) = (i, j, k)\big)$.

Remarquons d'abord que si $i+j+k \neq n$, l'évènement $\big\{(X, Y, Z) = (i, j, k)\big\}$ se réduit à l'ensemble vide puisque $X + Y + Z$ est toujours égal à n. On a donc

$$P\big((X, Y, Z) = (i, j, k)\big) = 0, \qquad \text{si } i + j + k \neq n.$$

Fixons maintenant un triplet d'entiers (i, j, k) tels que $i + j + k = n$. Numérotons les poupées de 1 à n et introduisons les notations d'évènements suivantes :

$$\begin{aligned} A_\ell &:= \{\text{la poupée n}^{\text{o}}\ \ell \text{ tombe dans } A\}, \\ B_\ell &:= \{\text{la poupée n}^{\text{o}}\ \ell \text{ tombe dans } B\}, \\ C_\ell &:= \{\text{la poupée n}^{\text{o}}\ \ell \text{ tombe dans } C\}. \end{aligned}$$

Pour exploiter l'indépendance des lancers, il nous faut arriver à écrire l'évènement $\big\{(X, Y, Z) = (i, j, k)\big\}$ en fonction des A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ. Cette écriture étant un peu compliquée, nous allons procéder en deux temps en fixant d'abord les numéros ℓ des i poupées tombant dans A, ceux des j poupées tombant dans B et ceux des k poupées tombant dans C. Cela revient à choisir un partage[9] $\{I, J, K\}$ de $\{1, \ldots, n\}$ en trois sous-ensembles I, J, K, deux à deux disjoints, de réunion $\{1, \ldots, n\}$ et tels que $\operatorname{card} I = i$, $\operatorname{card} J = j$, $\operatorname{card} K = k$. Notons au passage que nos conditions sur I, J, K sont un peu redondantes puisque si $I \cup J \cup K = \{1, \ldots, n\}$ et $i + j + k = n$, alors I, J, K sont nécessairement deux à deux disjoints. Posons maintenant

$$E_{I,J,K} := \{\text{les poupées indexées par } I,\ J,\ K \text{ tombent respectivement dans } A,\ B,\ C\}.$$

Traduite en notations ensemblistes, la définition de l'évènement $E_{I,J,K}$ peut se réécrire

$$E_{I,J,K} = \Big(\bigcap_{\ell \in I} A_\ell\Big) \cap \Big(\bigcap_{\ell \in J} B_\ell\Big) \cap \Big(\bigcap_{\ell \in K} C_\ell\Big).$$

Par indépendance des lancers, nous en déduisons que

$$P\big(E_{I,J,K}\big) = Q(A)^{\operatorname{card} I} Q(B)^{\operatorname{card} J} Q(C)^{\operatorname{card} K} = a^i b^j c^k.$$

Ensuite on remarque que l'évènement $\big\{(X, Y, Z) = (i, j, k)\big\}$ est la réunion disjointe des $E_{I,J,K}$ où le triplet d'ensembles I, J, K décrit la famille de partages $\Pi_{i,j,k}$ définie par

$$\Pi_{i,j,k} = \big\{(I, J, K);\ I, J, K \subset \{1, \ldots, n\},\ \operatorname{card} I = i,\ \operatorname{card} J = j,\ \operatorname{card} K = k\big\}.$$

8. La justification de cette formule est un exercice qui ne peut vous faire que du bien...
9. On ne peut pas dire « partition » car si par exemple $k = 0$, on doit prendre $K = \emptyset$.

Cette famille étant finie, on en déduit par additivité de P que

$$\begin{aligned} P\big((X,Y,Z)=(i,j,k)\big) &= P\Big(\bigcup_{(I,J,K)\in\Pi_{i,j,k}} E_{I,J,K}\Big) \\ &= \sum_{(I,J,K)\in\Pi_{i,j,k}} P(E_{I,J,K}) \\ &= \big(\operatorname{card}\Pi_{i,j,k}\big)a^i b^j c^k. \end{aligned}$$

Il nous reste à calculer $\operatorname{card}\Pi_{i,j,k}$. Pour cela on note que pour construire un partage $(I,J,K)\in\Pi_{i,j,k}$, il nous faut d'abord choisir un sous-ensemble I de $\{1,\dots,n\}$, ce qui peut se faire de C_n^i façons. Ensuite on choisit un sous-ensemble J de cardinal j dans $\{1,\dots,n\}\setminus I$, ce qui peut se faire de C_{n-i}^j façons. Enfin il ne reste plus qu'un seule possibilité de choix pour K, c'est $K=\{1,\dots,n\}\setminus(I\cup J)$. Par conséquent,

$$\operatorname{card}\Pi_{i,j,k} = C_n^i C_{n-i}^j = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}\,\frac{(n-i)!}{j!\,(n-i-j)!} = \frac{n!}{i!\,j!\,k!}.$$

En conclusion :

$$P\big((X,Y,Z)=(i,j,k)\big) = \begin{cases} \dfrac{n!}{i!\,j!\,k!}a^i b^j c^k & \text{si } i+j+k=n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10}$$

3) *Calcul de la probabilité qu'aucune poupée ne tombe dans le canal.*

L'évènement « aucune poupée dans le canal » peut s'écrire aussi $\{Z=0\}$. La façon la plus rapide de calculer $P(Z=0)$ est de noter que

$$\{Z=0\} = \bigcap_{\ell=1}^{n} C_\ell^c,$$

d'où par indépendance des C_ℓ,

$$P(Z=0) = \prod_{\ell=1}^{n} P(C_\ell^c) = (1-c)^n = \Big(\frac{7}{8}\Big)^n.$$

Une autre méthode plus longue, mais instructive s'appuie sur (10) en notant que

$$\{Z=0\} = \bigcup_{\substack{0\le i,j\le n\\ i+j=n}} \big\{(X,Y,Z)=(i,j,0)\big\},$$

d'où par additivité de P,

$$\begin{aligned} P(Z=0) = \sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ i+j=n}} P\big((X,Y,Z)=(i,j,0)\big) &= \sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ i+j=n}} \frac{n!}{i!\,j!\,0!}a^i b^j c^0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!\,(n-i)!}a^i b^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} \\ &= (a+b)^n = (1-c)^n. \end{aligned}$$

4) *Probabilité qu'exactement k poupées tombent dans le canal.*

Il s'agit de calculer $P(Z=k)$ pour $k=1,\dots,n$. Comme pour la deuxième méthode de calcul de $P(Z=0)$, utilisons (10) en notant que

$$\{Z=k\} = \bigcup_{\substack{0\le i,j\le n-k\\ i+j=n-k}} \big\{(X,Y,Z)=(i,j,k)\big\},$$

Par addidivité de P, nous avons

$$\begin{aligned}
P(Z=k) = \sum_{\substack{0\le i,j\le n-k\\ i+j=n-k}} P\big((X,Y,Z)=(i,j,k)\big) &= \sum_{\substack{0\le i,j\le n-k\\ i+j=n-k}} \frac{n!}{i!\,j!\,k!} a^i b^j c^k \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} \frac{n!}{i!\,(n-k-i)!\,k!} a^i b^{n-k-i} c^k \\
&= \frac{n!}{k!} c^k \sum_{i=0}^{n-k} \frac{1}{i!\,(n-k-i)!} a^i b^{n-k-i} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} c^k \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{i!\,(n-k-i)!} a^i b^{n-k-i} \\
&= C_n^k c^k \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i a^i b^{(n-k)-i} \\
&= C_n^k c^k (a+b)^{n-k} = C_n^k c^k (1-c)^{n-k}.
\end{aligned}$$

En tenant compte du résultat de la question 3, on a ainsi

$$P(Z=k) = \begin{cases} C_n^k c^k (1-c)^{n-k} & \text{si } k\in\{0,1,\dots,n\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On aurait abouti au même résultat en considérant une suite de n épreuves répétés indépendantes avec pour chacune probabilité de « succès » c. Autrement dit, la variable aléatoire Z suit la loi binomiale de paramètres n et c.

Pour ne pas finir ce corrigé sur une page numérotée 13, les figures 6 et 7 ci-dessous vous montrent le résultat de deux simulations informatiques du lancer de 100 poupées. Ces simulations ont été réalisées en exploitant le générateur de nombres aléatoires du logiciel METAPOST, utilisé pour réaliser les figures de ce document.

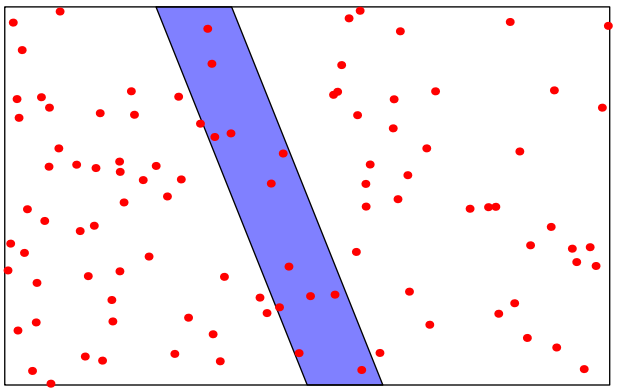

FIG. 6 – Simulation du lancer de 100 poupées

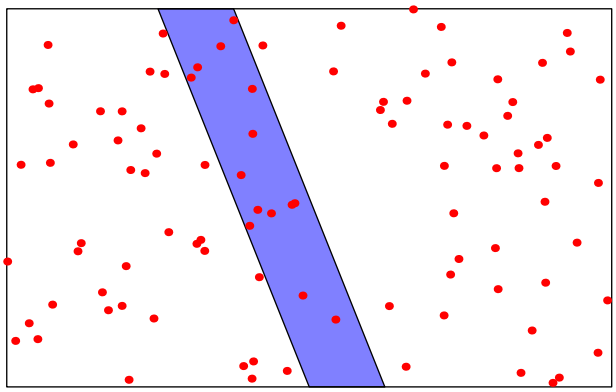

FIG. 7 – Simulation du lancer de 100 poupées

La Fête des Berlouffes a lieu chaque deuxième dimanche de septembre à Wattrelos. Une fête qui puise son origine dans un épisode tragique de la « Guerre des Gueux » : en effet, le 27 décembre 1 566, en pleine réforme religieuse et au moment du mouvement iconoclaste, une troupe de « Gueux », se retrouva encerclée dans le cimetière puis dans l'église de Wattrelos. Les troupes catholiques du Duc d'Albe incendièrent l'édifice religieux où les révoltés trouvèrent la mort en se jetant du clocher de l'église. Cet événement est à l'origine de la fête des Berlouffes, mot tiré du patois, qui signifie guenille, chiffons dont étaient vêtus les gueux. C'est pourquoi, en fin de journée, on procède au lancer des poupées Berlouffes du haut du clocher de l'église Saint-Maclou et l'on brûle le bonhomme « Berlouffe ».

Source : http://www.lilletourisme.com/traditions.html