Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2007–2008**

Corrigé du D.S. du 12 janvier 2008

Ex 1. *Une variable aléatoire tronquée*

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X est une variable aléatoire de loi exponentielle. Soient a et b deux réels fixés $0 < a < b$. On définit sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la variable aléatoire Y par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leq a, \\ X(\omega) & \text{si } a < X(\omega) \leq b, \\ b & \text{si } X(\omega) > b. \end{cases}$$

1) L'allure de la représentation graphique de la fonction de répartition de Y est donnée par la figure 1.

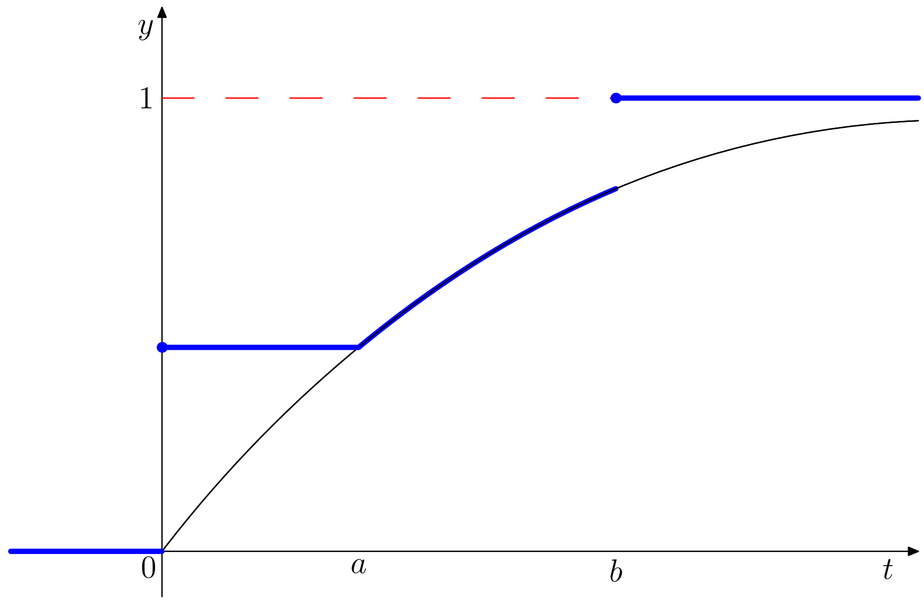

FIG. 1 – Les f.d.r. de X (trait fin) et de Y (trait épais)

Voici les justifications. Il s'agit de calculer $H(t) := P(Y \leq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. On notera F la fonction de répartition de X.

Première façon, partant de l'intuition. On pressent que les valeurs de t qui vont jouer un rôle important sont 0, a et b. On va donc essayer de calculer H sur chacun des 4 intervalles découpés sur la droite réelle par ces trois nombres.

1. Pour $t \in]-\infty, 0[$, l'évènement $\{Y \leq t\}$ est inclus dans $\{Y < 0\}$ lequel se réduit à l'ensemble vide puisque par construction, Y ne peut prendre que des valeurs positives ou nulles. Donc $P(Y \leq t) \leq P(\emptyset) = 0$ et pour $t \in]-\infty, 0]$, $H(t) = 0$.
2. Calculons $H(0)$. D'après ce qui précède, $P(Y \leq 0) = P(Y < 0) + P(Y = 0) = P(Y = 0)$. La définition de Y nous montre que $Y(\omega) = 0$ si et seulement si $X(\omega) \leq a$. On a donc l'égalité d'évènements $\{Y = 0\} = \{X \leq a\}$, d'où $H(0) = P(Y = 0) = P(X \leq a) = F(a)$.
3. Pour $t \in]0, a[$, l'évènement $\{Y \leq t\}$ se réduit à l'évènement $\{Y = 0\}$ puisque Y ne peut prendre que soit la valeur 0 soit une valeur supérieure ou égale à a. Donc $H(t) = P(Y = 0) = H(0) = F(a)$. Ainsi la fonction H est constante, égale à $F(a)$, sur l'intervalle $[0, a[$.
4. Pour $t \in [a, b[$, l'évènement $\{Y \leq t\}$ est la réunion des deux évènements disjoints $\{Y = 0\}$ et $\{a \leq Y \leq t\}$. D'après la définition de Y, le deuxième s'écrit aussi $\{a \leq X \leq t\}$. On a donc $H(t) = P(Y = 0) + P(a \leq X \leq t) = F(a) + F(t) - F(a-) = F(t)$ car F étant continue sur $\mathbb{R}$ donc au point a, $F(a-) = F(a)$. Ainsi H coïncide avec F sur $[a, b[$.
5. Calculons $H(b)$. La définition de Y nous montre que pour tout $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) \leq b$. Donc $\{Y \leq b\} = \Omega$ et $H(b) = P(Y \leq b) = 1$. On a ainsi une discontnuité de H au point b car la limite à gauche de H en b est $F(b)$ par le cas précédent et la continuité de F au point b. Or $F(b) < 1$ car X suivant une loi exponentielle, $P(X > b) > 0$.
6. Pour $t > b$, on a $1 = H(b) \leq H(t) \leq 1$, donc $H(t) = 1$.

Deuxième façon, plus automatique. On décompose l'évènement $\{Y \leq t\}$ sur la partition de Ω constituée des trois évènements $\{X \leq a\}$, $\{a < X \leq b\}$ et $\{X > b\}$. On obtient ainsi l'union disjointe $\{Y \leq t\} = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, avec $E_1 = \{Y \leq t\} \cap \{X \leq a\}$, $E_2 = \{Y \leq t\} \cap \{a < X \leq b\}$ et $E_3 = \{Y \leq t\} \cap \{X > b\}$. Pour simplifier les écritures, on se limite au cas où $t \geq 0$, puisque Y étant une v.a. positive, on a clairement $H(t) = 0$ pour tout $t < 0$. On peut alors vérifier les égalités suivantes (faites-le) :

$$E_1 = \{X \leq a\}, \qquad E_2 = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t \leq a \\ \{a < X \leq t\} & \text{si } a < t \leq b \\ \{a < X \leq b\} & \text{si } t > b \end{cases} \qquad E_3 = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t < b \\ \{X > b\} & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

En recollant soigneusement les morceaux, on retrouve les résultats de la 1$^{\text{re}}$ méthode.

2) La fonction de répartition H de la variable aléatoire Y n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (discontinuités en 0 et en b), la loi de Y ne peut donc avoir de densité. Rappelons que la continuité de la fonction de répartition est *nécessaire* mais *pas suffisante* pour que la loi ait une densité.

Ex 2. *Contrôleur contre fraudeur*

Une compagnie de métro pratique les tarifs suivants. Le ticket donnant droit à un trajet coûte 1 €; les amendes sont fixées à 20 € pour la première infraction constatée, 40€ pour la deuxième et 400€ pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur d'être contrôlé au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie. Un fraudeur décide de prendre systématiquement le métro sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter alors de frauder. On note T le nombre de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende (T est le numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la deuxième fois). On note $q = 1 - p$ la probabilité de faire un trajet sans contrôle.

1) Pour $1 \leq j < k$, notons $E_{j,k}$ l'évènement : « le premier contrôle du fraudeur a lieu lors de son j-ème trajet et le deuxième contrôle lors du k-ième trajet ». On a clairement la décomposition en union disjointe

$$\forall k \geq 2, \quad \{T = k\} = \bigcup_{j=1}^{k-1} E_{j,k}. \tag{1}$$

Par additivité de la probabilité, le calcul de $\mathbf{P}(T = k)$ se ramène donc à celui des $\mathbf{P}(E_{j,k})$. Notons F_i l'évènement « le fraudeur n'est pas contrôlé lors de son i-ème trajet ». Son complémentaire F_i^c est donc l'évènement « le fraudeur est contrôlé lors de son i-ème trajet ». L'évènement $E_{j,k}$ peut s'écrire sous la forme

$$E_{j,k} = F_j^c \cap F_k^c \cap \Big(\bigcap_{\substack{1 \leq i < k \\ i \neq j}} F_i \Big),$$

avec le cas particulier $E_{1,2} = F_1^c \cap F_2^c$. Nous faisons maintenant l'hypothèse d'indépendance[1] de la suite d'évènements $(F_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. Alors les k évènements F_i $(i \neq j, k)$ et F_j^c, F_k^c sont mutuellement indépendants et

$$\mathbf{P}(E_{j,k}) = \mathbf{P}(F_j^c)\mathbf{P}(F_k^c) \prod_{\substack{1 \leq i < k \\ i \neq j}} \mathbf{P}(F_i) = p^2 q^{k-2}.$$

On note au passage que $\mathbf{P}(E_{j,k})$ ne dépend pas de j. En utilisant l'additivité de $\mathbf{P}$ et (1), on aboutit à :

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbf{P}(T = k) = \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{P}(E_{j,k}) = (k-1)p^2 q^{k-2}.$$

La variable aléatoire T suit ainsi la loi binomiale négative de paramètres 2 et p. C'est la loi du temps d'attente du deuxième succès (ici pour le contrôleur !) dans une suite d'épreuves répétées indépendantes.

2) La probabilité $\mathbf{P}(T > n)$ s'exprime à l'aide des $\mathbf{P}(T = k)$ par σ-additivité :

$$\mathbf{P}(T > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(T = k) = p^2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (k-1) q^{k-2}.$$

1. Cette hypothèse revient pratiquement à dire que les contrôles sont faits au hasard, sans tenir compte des résultats des contrôles précédents. Elle ne serait pas pertinente si par exemple, le fraudeur était pris en filature par un contrôleur particulièrement hargneux et décidé à le coincer.

On voit ainsi que
$$\mathbf{P}(T > n) = p^2 f_n'(q), \tag{2}$$
où la fonction f_n est définie comme la somme de la série entière
$$f_n(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-1}.$$
Cette série est une série géométrique de raison x, donc de rayon de convergence $R = 1$. On sait alors que sa somme est dérivable sur l'intervalle $]-R, R[$ et que sa dérivée peut se calculer par dérivation terme à terme :
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f_n'(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} (k-1)x^{k-2}.$$
Comme $0 < p < 1$ (sinon le problème est sans intérêt), $q := 1 - p$ est aussi dans l'intervalle $]0, 1[$ et on peut appliquer l'égalité ci-dessus avec $x = q$. Par ailleurs, on peut calculer explicitement $f_n(x)$ comme somme d'une série géométrique :
$$f_n(x) = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \dots \dots = x^n \sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \frac{x^n}{1-x},$$
formule valable pour tout $x \in]-1, 1[$. On en déduit une formule explicite pour la dérivée :
$$f_n'(x) = \frac{(1-x)nx^{n-1} + x^n}{(1-x)^2} = \frac{(n-(n-1)x)x^{n-1}}{(1-x)^2}.$$
En faisant $x = q$ (donc $1 - x = p$) et en reportant ce résultat dans (2), il vient :
$$\mathbf{P}(T > n) = (n - (n-1)q)q^{n-1} = (np + q)q^{n-1}.$$

3) Le bilan financier de la stratégie du fraudeur est la variable aléatoire $S := T - 60$. En effet lorsqu'il arrête de frauder après son deuxième contrôle, il a dépensé en tout 60 € d'amende et gagné T € en ne payant pas ses tickets de métro. La probabilité que sa stratégie soit bénéficiaire est donc $\mathbf{P}(S > 0) = \mathbf{P}(T > 60)$.

Le calcul numérique donne
$$\mathbf{P}(T > 60) \simeq \begin{cases} 0{,}013\ 8 & \text{pour } p = 1/10; \\ 0{,}191\ 6 & \text{pour } p = 1/20. \end{cases}$$

4) Le calcul de l'espérance de T utilise la même technique que celui de $P(T > n)$ ci-dessus. En effet
$$\mathbf{E}T = \sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbf{P}(T = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)p^2 q^{k-2} = p^2 f''(q),$$

où $f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ est une série entière de rayon de convergence $]-1,1[$, donc dérivable m fois terme à terme sur $]-1,1[$ pour tout entier $m \geq 1$. Notons que la dérivation à l'ordre 2 fait disparaître les termes d'indices $k=0$ et $k=1$ dans le développement de f.

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3},$$

d'où

$$\mathbf{E}T = p^2 f''(q) = \frac{2p^2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p}.$$

Ce résultat n'est pas surprenant car en raison de l'indépendance des contrôles, la loi du temps d'attente T_2 du deuxième contrôle *à partir du premier* est la même que celle du temps d'attente T_1 du premier contrôle. $T = T_1 + T_2$ est donc la somme de deux variables aléatoires géométriques de paramètre p, donc d'espérance $1/p$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(T_1 + T_2) = 2/p$.

5) D'un point de vue financier, le fraudeur a intérêt à avoir une idée de la valeur de p. Entre les deux exemples ci-dessus ($p = 1/10$ et $p = 1/20$), la division par 2 de la probabilité de contrôle du fraudeur multiplie par presque 14 sa probabilité d'être bénéficaire. Pour diminuer son ignorance de p, le fraudeur peut l'estimer sur la base d'un grand nombre d'observations.

Considérons d'abord le cas du fraudeur « névrotique » : son objectif est de faire un bénéfice, peu lui importe lequel. Dans ce cas, la valeur critique de p est celle pour laquelle $\mathbf{P}(T > 60) = 1/2$, soit approximativement $p \simeq 0{,}028$. En dessous de cette valeur de p, la stratégie du fraudeur lui donne plus d'une chance sur deux d'être bénéficiaire.

Voyons maintenant le cas plus réaliste du fraudeur « économique » : ce qui lui importe n'est pas tant la probabilité de faire un bénéfice, même minime, que le gain moyen qu'il peut espérer de sa stratégie. Pour lui, la quantité pertinente est non plus $\mathbf{P}(T > 60)$, mais $\mathbf{E}(T - 60) = \mathbf{E}T - 60$. La valeur critique de p en dessous de laquelle sa stratégie est gagnante « en moyenne » est alors donnée par l'équation $2/p = 60$, c'est $p = 1/30 \simeq 0{,}033\,3$. Notons que pour cette valeur de p, $\mathbf{P}(T > 60) \simeq 0{,}401\,5$, ce qui montre bien que la prise en compte du montant des gains peut conduire à considérer comme gagnante une stratégie qui a moins d'une chance sur deux de générer un bénéfice.

N.B. L'auteur de l'énoncé *Contrôleur contre fraudeur* et de son corrigé récuse par avance toute accusation d'incitation à la fraude et décline toute responsabilité en cas de fraude de l'un de ses lecteurs. Il fait observer que des calculs du type ci-dessus[2] sont utiles à la compagnie de métro qui en a besoin pour déterminer le nombre de contrôleurs qu'elle doit employer (avec le coût salarial que cela implique)...

Ex 3. *Un peu de trigonométrie aléatoire (6 points)*

On définit une variable aléatoire X grâce à la construction représentée à la figure 2. L'angle $\big(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}\big)$ a pour mesure en radians U, *variable aléatoire* de loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. La distance AO vaut 1 et X est l'abscisse du point M sur la droite de

2. Notamment le cas du fraudeur « économique », en raison de la loi des grands nombres.

repère $(O, \vec{i}\,)$: $\overrightarrow{OM} = X\vec{i}$. Les angles sont orientés dans le sens trigonométrique, la figure est faite pour U positif. Pour $U = 0$, M coïncide avec le point O et pour $-\pi/2 < U < 0$, M est « à gauche » de O.

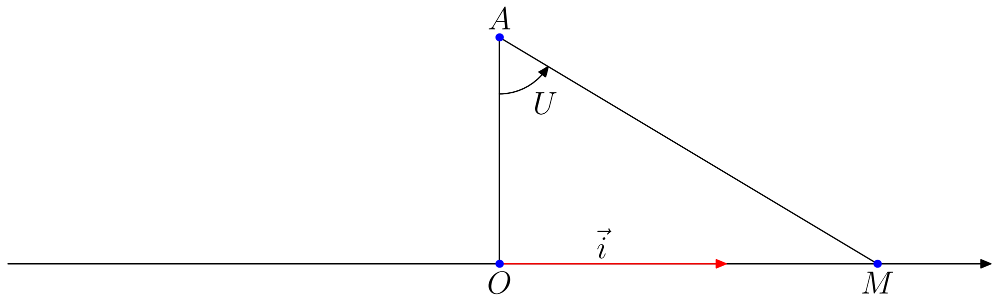

Fig. 2 – Construction de M

1) En utilisant le triangle rectangle AOM et en tenant compte de l'orientation, on obtient :

$$X = \tan U.$$

En effet si U est positif, l'angle aigu non orienté OAM a pour mesure U et $OM = X$. Or $\tan(OAM) = \frac{OM}{OA}$. Si U est négatif, OAM a pour mesure $-U = |U|$, $X = -OM$ donc la relation $\tan(OAM) = \frac{OM}{OA}$ donne $\tan(-U) = -X$ d'où $\tan U = X$ car la fonction tangente est impaire.

Une autre façon de vérifier la formule $X = \tan U$ est de tracer le cercle « trigonométrique » de centre A et de rayon 1, en prenant l'origine des angles au point O et d'utiliser l'interprétation géométrique de la fonction tangente. Par retrouver la figure à laquelle vous êtes habitués (?), il vous suffit de tourner la feuille de $\pi/2$ dans le sens trigonométrique...

2) En notant F la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X, on a pour tout x réel,

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\tan U \leq x) = P(U \leq \arctan x).$$

La dernière égalité se justifie comme suit. Rappelons d'abord que la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ est continue strictement croissante avec pour limite à droite $-\infty$ en $-\pi/2$ et pour limite à gauche $+\infty$ en $\pi/2$. Cette restriction réalise donc une bijection[3] de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. La fonction arctan est la réciproque de cette bijection. En particulier elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $u \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\arctan(\tan u) = u$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$. Ceci nous permet de vérifier l'égalité d'évènements $\{\tan U \leq x\} = \{U \leq \arctan x\}$ et donc de leur probabilité. En effet on a les deux implications :

$$\tan U \leq x \Rightarrow U \leq \arctan x, \quad \text{par croissance d'arctangente et } \arctan(\tan U) = U,$$

3. L'injectivité résulte de la croissance stricte et la surjectivité vient de la continuité et des limites aux bornes $\pm\pi/2$ *via* le théorème des valeurs intermédiaires.

$$U \leq \arctan x \Rightarrow \tan U \leq x, \quad \text{par croissance de tangente et } \tan(\arctan x) = x.$$

Ceci justifie l'équivalence $(\tan U \leq x) \Leftrightarrow (U \leq \arctan x)$ et donc l'égalité des évènements correspondants.

D'autre part, U suivant la loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$, on a en notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (donc la longueur pour un segment) :

$$\forall y \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad P(U \leq y) = P(U \in]-\infty, y]) = \frac{\lambda(]-\infty, y] \cap]-\pi/2, \pi/2[)}{\lambda(]-\pi/2, \pi/2[)}$$
$$= \frac{\lambda(]-\pi/2, y[)}{\pi}$$
$$= \frac{y - (-\pi/2)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{y}{\pi}.$$

En appliquant ceci à $y = \arctan x$, on aboutit à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P(U \leq \arctan x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x.$$

On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une fonction de répartition : elle est croissante et continue sur $\mathbb{R}$ (propriétés héritées d'arctangente par composition) ; sa limite en $-\infty$ est 0, car la limite en $-\infty$ de l'arctangente est $-\pi/2$, de même sa limite en $+\infty$ est 1 car celle de l'arctangente est $\pi/2$.

3) La fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme l'arctangente. La loi de X admet donc une densité f qui s'obtient par dérivation de F :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = F'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan t\right) = \frac{1}{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\arctan t) = \frac{1}{\pi(1 + t^2)}.$$

On reconnaît la densité de la loi de Cauchy.

4) Pour calculer $P(|X| \leq 1)$, le plus simple est de remarquer que dans le triangle rectangle AOM, $OM \leq OA = 1$ si et seulement si l'angle aigu (non orienté) de sommet A a une mesure d'au plus $\pi/4$, c'est-à-dire si et seulement si $|U| \leq \pi/4$. D'où

$$P(|X| \leq 1) = P(U \in [-\pi/4, \pi/4]) = \frac{\lambda([-\pi/4, \pi/4])}{\lambda(]-\pi/2, \pi/2[)} = \frac{1}{2}.$$

Cette méthode avait l'avantage de ne pas utiliser les questions précédentes.

On pouvait retrouver ce résultat à partir de la fonction de répartition F en notant que :

$$P(|X| \leq 1) = P(X \in [-1, 1]) = F(1) - F(-1-) = F(1) - F(-1)$$
$$= \frac{\arctan(1) - \arctan(-1)}{\pi}$$
$$= \frac{\pi/4 - (-\pi/4)}{\pi} = \frac{1}{2}.$$

On a utilisé la continuité de F pour remplacer la limite à gauche $F(-1-)$ par $F(-1)$.