Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2006–2007**

Corrigé du devoir n° 2

Ex 1. Produit de deux v.a. uniformes

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

1) Déterminons la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z := XY$. Le couple (X, Y) suit la loi uniforme sur le carré unité $[0, 1]^2$ parce que X et Y sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On en déduit en particulier que $P(0 \leq X \leq 1$ et $0 \leq Y \leq 1) = 1$, donc que $P(0 \leq XY \leq 1) = 1$ puisque le produit de deux réels de $[0, 1]$ est encore dans $[0, 1]$. On peut donc dire d'emblée que $P(XY \leq t) = 0$ si $t < 0$ et $P(XY \leq t) = 1$ si $t \geq 1$. Il nous reste à calculer $P(XY \leq t)$ pour t fixé dans $[0, 1[$. Introduisons pour cela le domaine du plan $\mathcal{D}_t$ colorié en bleu figure 1 et défini

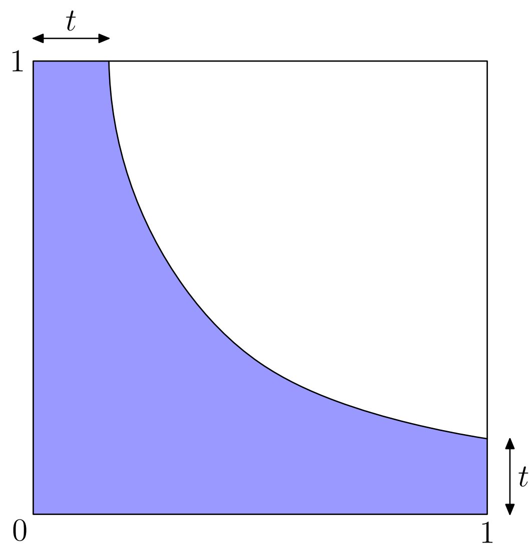

FIG. 1 – Domaine $\mathcal{D}_t$

formellement comme

$$\mathcal{D}_t := \{(x, y) \in [0, 1]^2;\ 0 \leq xy \leq t\}.$$

Sa frontière est constituée par l'arc d'hyperbole d'équation $xy = t$, $t \leq x \leq 1$ et 4 segments de droite tracés sur la frontière du carré unité. Remarquons que

$$P(XY \leq t) = P((X, Y) \in \mathcal{D}_t).$$

De plus comme le vecteur aléatoire (X,Y) suit loi uniforme sur le carré unité C, cette dernière probabilité se calcule comme un rapport d'aires :

$$P((X,Y)\in\mathcal{D}_t)=\frac{\text{aire}(\mathcal{D}_t)}{\text{aire}(C)}=\text{aire}(\mathcal{D}_t).$$

Pour calculer cette aire pour $0<t<1$, on découpe $\mathcal{D}_t$ en deux morceaux disjoints : le rectangle $[0,t[\times[0,1]$ et l'hypographe de la fonction $g:[t,1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto t/x$. On obtient ainsi

$$\text{aire}(\mathcal{D}_t)=t+\int_t^1\frac{t}{x}\,\mathrm{d}x=t+\big[\ln x\big]_t^1=t-t\ln t.$$

Dans le cas particulier $t=0$, $\mathcal{D}_t$ est réduit au point $(0,0)$ et son aire est nulle.

La fonction de répartition H de la variable aléatoire Z est donc donnée par

$$H(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\leq 0,\\ t-t\ln t & \text{si } 0<t<1,\\ 1 & \text{si } t\geq 1.\end{cases}$$

2) Le graphe de H est représenté figure 2. Il y a une demi tangente verticale à droite à l'origine car $H(t)/t$ tend vers $+\infty$ à droite en zéro. La tangente au point $(1,1)$ est horizontale. La fonction de répartition H est C^1 par morceaux avec raccords continus.

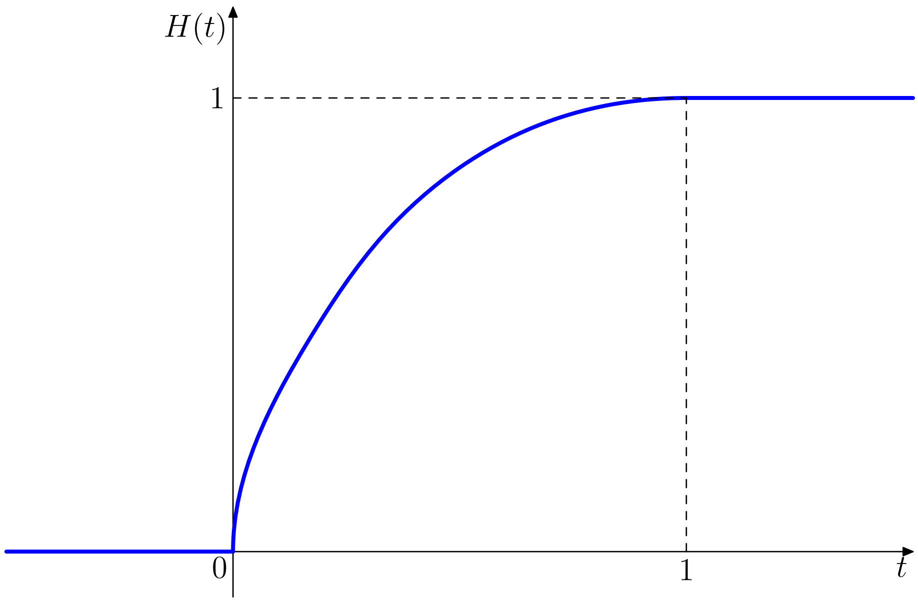

Fig. 2 – Graphe de H

On sait que dans ce cas la loi est à densité $h=H'$ définie ici sur $\mathbb{R}$ privé des deux points 0 et 1. Il est commode de compléter la définition de h en posant $h(1):=0$ (prolongement par continuité) et $h(0):=0$. La densité h peut ainsi s'écrire

$$h(t)=(-\ln t)\mathbf{1}_{]0,1]}(t),\qquad t\in\mathbb{R}.$$

3) On peut utiliser trois méthodes pour calculer $\mathbf{E}(XY)$.

1. La variable aléatoire p.s. positive Z peut-être traitée comme une v.a. positive pour le calcul de son espérance par la définition du cours. Ceci nous donne
$$\mathbf{E}Z = \int_0^{+\infty} (1 - H(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1 - t + t\ln t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t.$$
La dernière intégrale est une fausse intégrale généralisée puisque $t\ln t$ tend vers 0 à droite en zéro. En l'intégrant par parties, on trouve
$$\int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_0^1 - \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}.$$
On obtient ainsi
$$\mathbf{E}Z = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$
2. Puisque Z est à densité, on peut aussi utiliser la formule
$$\mathbf{E}Z = \int_0^{+\infty} th(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 -t\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4},$$
par la même intégration par parties que ci-dessus.
3. Une méthode sans calcul consiste à exploiter l'indépendance des v.a. X et Y qui ont même espérance $1/2$ (espérance de la loi uniforme sur $[0,1]$). Cette indépendance nous permet d'écrire $\mathbf{E}(XY) = (\mathbf{E}X)(\mathbf{E}Y)$, d'où
$$\mathbf{E}Z = (\mathbf{E}X)(\mathbf{E}Y) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Ex 2. Peut-on utiliser le th. de Beppo Levi avec une suite décroissante ?

Théorème (de convergence décroissante)**.**
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite* décroissante *de v.a. positives définies sur le même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. On suppose de plus que* $\mathbf{E}X_1 < +\infty$*. Alors la suite* $(\mathbf{E}X_n)_{n\geq 1}$ *converge en décroissant vers* $\mathbf{E}X$*, où la v.a.* X *est définie par* $X(\omega) = \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)$*, pour tout* $\omega \in \Omega$*.*

1) La décroissance de la suite de v.a. positives $(X_n)_{n\geq 1}$ signifie que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite de nombres réels positifs $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ est décroissante. Cette suite décroissante dans $\mathbb{R}_+$, donc minorée par 0, admet une limite dans $\mathbb{R}_+$ que nous notons $X(\omega)$. On a ainsi défini une application $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ qui est mesurable comme limite simple sur Ω de la suite des applications mesurables X_n. Cette application X est donc une variable aléatoire positive. Son espérance existe toujours dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et est finie car $X \leq X_1$, d'où par croissance de l'espérance : $0 \leq \mathbf{E}X \leq \mathbf{E}X_1 < +\infty$. La même propriété de croissance de l'espérance nous permet d'écrire pour tout n : $0 \leq \mathbf{E}X_{n+1} \leq \mathbf{E}X_n \leq \mathbf{E}X_1 < +\infty$. La suite de *nombres réels* $(\mathbf{E}X_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante dans $\mathbb{R}_+$ et a ainsi une limite $\ell \geq 0$. Pour prouver le théorème, il nous reste à établir l'égalité $\ell = \mathbf{E}X$.

Définissons la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ par :

$$\forall n \geq 1, \quad Y_n := X_1 - X_n.$$

Les inégalités $0 \leq X_{n+1} \leq X_n \leq X_1$ impliquent $0 \leq X_1 - X_n \leq X_1 - X_{n+1}$, ce qui s'écrit $0 \leq Y_n \leq Y_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \geq 1$, on en déduit que $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite *croissante* de variables aléatoires positives. On peut donc lui appliquer le théorème de B. Levi, ce qui donne en notant $Y := X_1 - X$ la limite de Y_n :

$$\mathbf{E}Y_n \uparrow \mathbf{E}Y \quad \text{quand } n \to +\infty. \tag{1}$$

Les inégalités $0 \leq X \leq X_n \leq X_1$ et l'intégrabilité de X_1 impliquent l'intégrabilité de X_n et X, autrement dit, la finitude de $\mathbf{E}X_n$ et $\mathbf{E}X$. On en déduit la finitude de $\mathbf{E}Y_n$ et de $\mathbf{E}Y$, puis par linéarité de l'espérance, les égalités :

$$\mathbf{E}Y_n = \mathbf{E}X_1 - \mathbf{E}X_n, \quad \mathbf{E}Y = \mathbf{E}X_1 - \mathbf{E}X.$$

Comme $\mathbf{E}X_n$ converge vers ℓ, $\mathbf{E}Y_n$ converge vers $\mathbf{E}X_1 - \ell$. En comparant avec (1), on en déduit par unicité de la limite d'une suite de réels que

$$\mathbf{E}X_1 - \ell = \mathbf{E}Y = \mathbf{E}X_1 - \mathbf{E}X,$$

d'où $\ell = \mathbf{E}X$, ce qui achève la preuve du théorème de convergence décroissante.

2) Soit U une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$, à valeurs dans $]0,1]$ et de loi uniforme sur $]0,1]$. On considère la suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par

$$X_n = \frac{1}{U}\mathbf{1}_{]0,1/n]}(U).$$

Cette écriture condensée signifie que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \omega \in \Omega, \qquad X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{U(\omega)} & \text{si } 0 < U(\omega) \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons Ω' l'évènement $\{0 < U \leq 1\}$. Pour $\omega \in \Omega'$, $1/U(\omega)$ est un réel supérieur ou égal à 1. Désignons sa partie entière par $n_0(\omega)$. Il est alors clair que

$$\forall \omega \in \Omega', \qquad X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{U(\omega)} > 0 & \text{si } 1 \leq n \leq n_0(\omega) \\ 0 & \text{si } n > n_0(\omega). \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $\omega \in \Omega'$, la suite de réels $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ est décroissante et convergente vers 0. D'autre part pour $\omega \notin \Omega'$, ces mêmes propriétés sont trivialement vérifiées puisque $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ est la suite identiquement nulle.

La variable aléatoire X_n étant positive a toujours une espérance dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Pour la calculer, déterminons la fonction de survie de X_n. Il est clair que si $t < 0$, $\{X_n > t\} = \Omega$, d'où $P(X_n > t) = 1$. Si $t = 0$, $P(X_n > 0) = P(0 < U \leq 1/n) = 1/n$ car U suit la loi uniforme sur $]0, 1]$. Pour $t > 0$ fixé, on a

$$\{X_n > t\} = \left\{0 < U \leq \frac{1}{n} \text{ et } \frac{1}{U} > t\right\} = \left\{0 < U \leq \frac{1}{n} \text{ et } U < \frac{1}{t}\right\}$$

d'où

$$P(X_n > t) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{t} \geq \frac{1}{n} \text{ (soit } t \leq n), \\ \frac{1}{t} & \text{si } \frac{1}{t} < \frac{1}{n} \text{ (soit } t > n). \end{cases}$$

En appliquant la définition de l'espérance d'une v.a. positive, on en déduit :

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{E}X_n = \int_0^{+\infty} P(X_n > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n \frac{1}{n}\,\mathrm{d}t + \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} = +\infty,$$

puisque la première intégrale vaut 1 et la deuxième diverge.

La suite $(\mathbf{E}X_n)_{n\geq 1}$ est donc trivialement convergente vers $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. D'autre part la limite simple X de $(X_n)_{n\geq 1}$ est la variable aléatoire nulle, donc $\mathbf{E}X = 0$. Nous avons ainsi construit une suite de v.a. positives X_n, qui converge en décroissant vers une v.a. X et telle que $\mathbf{E}X_n$ ne converge pas vers $\mathbf{E}X$. Ce contre exemple montre que l'on ne peut pas s'affranchir de l'hypothèse $\mathbf{E}X_1 < +\infty$ dans le théorème de convergence décroissante.

Ex 3. Fonction de répartition d'un quotient

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $]0, +\infty[$. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. On note H la fonction de répartition de Y. On se propose d'étudier la fonction F définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) := \mathbf{E}H(tX), \tag{2}$$

avec une application à la loi de certains quotients de v.a.

1) Puisque la f.d.r. H est à valeurs dans $[0, 1]$, $H(tX)$ est pour tout réel t fixé, une variable aléatoire[1] positive vérifiant $0 \leq H(tX) \leq 1$. Par croissance de l'espérance et la propriété « $\mathbf{E}c = c$ » pour c constante (appliquée ici avec $c = 0$ et $c = 1$), on en déduit que

$$0 \leq \mathbf{E}H(tX) \leq 1.$$

Ceci étant vrai pour tout réel t, la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0, 1]$.

1. En toute rigueur, pour pouvoir parler de la variable aléatoire $H(tX) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$, il faudrait commencer par vérifier que pour t fixé, cette application $H(tX)$ est $\mathcal{F}$-$\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ mesurable. On obtient cette mesurabilité par composition en notant que toute fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable pour la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ (ceci se montre en prouvant que l'image réciproque d'un intervalle par une telle application est un intervalle). Il suffit alors de remarquer que la mesurabilité de X est conservée par multiplication par la constante t et par composition par H. Ces considérations qui débordent du programme d'IPÉ n'étaient évidemment pas exigibles ici.

2) Pour montrer que F est croissante, prenons s et t réels quelconques tels que $s \leq t$ et vérifions que $F(s) \leq F(t)$. D'abord, comme X est une v.a. positive, on a pour tout $\omega \in \Omega$, $sX(\omega) \leq tX(\omega)$, puis par croissance de la fonction H, $H(sX(\omega)) \leq H(tX(\omega))$, ce qui établit l'inégalité entre variables aléatoires *positives* $H(sX) \leq H(tX)$. Par croissance de l'espérance des v.a. positives, on en déduit $\mathbf{E}(H(sX)) \leq \mathbf{E}(H(tX))$, autrement dit, $F(s) \leq F(t)$.

3) *Limites de F en $-\infty$ et $+\infty$.* Comme Y est une v.a. strictement positive, $H(0) = P(Y \leq 0) = 0$, donc H est nulle sur $]-\infty, 0]$. La v.a. X étant positive, pour tout $t \leq 0$, tX est une v.a. négative et $H(tX) = 0$, donc $F(t) = \mathbf{E}H(tX) = 0$. Ainsi F est nulle sur $]-\infty, 0]$ et donc F a pour limite 0 en $-\infty$.

Pour montrer que la limite de F en $+\infty$ vaut 1, il suffit d' établir que pour *toute* suite $(t_n)_{n\geq 1}$ croissante de réels tendant vers $+\infty$, $F(t_n)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Si $(t_n)_{n\geq 1}$ est une telle suite, comme $X > 0$, la suite de v.a. $(t_nX)_{n\geq 1}$ est croissante et de limite $+\infty$ et H étant une fonction de répartition, la suite de v.a. positives $(H(t_nX))_{n\geq 1}$ est croissante de limite 1. En appliquant le théorème de B. Levi à cette suite, on obtient $\mathbf{E}H(t_nX) \uparrow \mathbf{E}1 = 1$. Autrement dit $F(t_n)$ tend en croissant vers 1.

4) Pour vérifier la continuité à droite de F en tout point t, il suffit de montrer que pour toute suite décroissante $(t_n)_{n\geq 1}$ de limite t, $F(t_n)$ tend vers $F(t)$. Pour une telle suite $(t_n)_{n\geq 1}$, par positivité de X et croissance de H, la suite de v.a. positives $(H(t_nX))_{n\geq 1}$ est décroissante. En raison de la continuité à droite de la f.d.r. H, $(H(t_nX))_{n\geq 1}$ converge simplement sur Ω vers $H(tX)$. De plus $\mathbf{E}H(t_1X) = F(t_1) \leq 1 < +\infty$. Toutes les hypothèses du théorème de convergence décroissante étant vérifiées, on peut conclure à la convergence de $\mathbf{E}H(t_nX)$ vers $\mathbf{E}H(tX)$, c'est-à-dire de $F(t_n)$ vers $F(t)$. Comme t était fixé mais quelconque, on a établi la continuité à droite de F en tout point. Par ailleurs, en tant que fonction monotone, F a une limite à gauche en tout point.

Finalement, F est croissante, de limites 0 en $-\infty$, 1 en $+\infty$, continue à droite et limitée à gauche en tout point. C'est donc une fonction de répartition (cf. théorème 2.30 du polycopié de cours 2006–2007).

5) On suppose dans cette question que la variable aléatoire X est discrète. Alors l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs est au plus dénombrable. Comme X est à valeurs dans $]0, +\infty[$, 0 n'appartient pas à $X(\Omega)$. De plus on a la décomposition

$$\Omega = \bigcup_{x\in X(\Omega)} X^{-1}(\{x\}), \quad \text{union disjointe au plus dénombrable.} \tag{3}$$

On a alors successivement :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}H(tX) &= \sum_{x\in X(\Omega)} H(tx)P(X=x) \qquad \text{(espérance d'une v.a. discrète} \geq 0)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} P(Y\leq tx)P(X=x) \qquad (H \text{ f.d.r. de } Y)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} P\Big(\frac{Y}{x}\leq t\Big)P(X=x) \qquad (0\notin X(\Omega))\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} P\Big(\frac{Y}{x}\leq t \text{ et } X=x\Big) \qquad \text{(indépendance de } X \text{ et } Y).
\end{aligned}$$

Arrivés là, on remarque que l'évènement $A_x := \{\frac{Y}{x}\leq t \text{ et } X=x\}$ peut aussi s'écrire :

$$A_x = \Big\{\omega\in\Omega;\ \frac{Y(\omega)}{x}\leq t \text{ et } X(\omega)=x\Big\} = \Big\{\omega\in\Omega;\ \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}\leq t \text{ et } X(\omega)=x\Big\},$$

ou encore

$$A_x = \Big\{\frac{Y}{X}\leq t\Big\}\cap X^{-1}(\{x\}).$$

En utilisant la décomposition (3) et la sigma-additivité de P, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}H(tX) = \sum_{x\in X(\Omega)} P(A_x) &= P\Big(\bigcup_{x\in X(\Omega)} A_x\Big)\\
&= P\Big(\Big\{\frac{Y}{X}\leq t\Big\}\cap \bigcup_{x\in X(\Omega)} X^{-1}(\{x\})\Big)\\
&= P\Big(\Big\{\frac{Y}{X}\leq t\Big\}\cap\Omega\Big)\\
&= P\Big(\frac{Y}{X}\leq t\Big).
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi établi que

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad F(t) = \mathbf{E}H(tX) = P\Big(\frac{Y}{X}\leq t\Big), \tag{4}$$

ce qui montre que lorsque X est discète, F est la f.d.r. de Y/X.

6) Pour montrer dans le cas général que F est la f.d.r. de Y/X, nous admettons provisoirement l'existence d'une suite décroissante $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires positives *discrètes*, convergente simplement sur tout Ω vers X. On admet aussi que l'on peut la choisir de telle sorte que chaque X_n soit indépendante de X. Cette condition sera automatiquement réalisée si X_n est une fonction mesurable de la v.a. X, laquelle est indépendante de Y par hypothèse. Dans ces conditions, en appliquant (4) à chaque X_n, nous obtenons :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\mathbb{R},\quad F_n(t) := \mathbf{E}H(tX_n) = P\Big(\frac{Y}{X_n}\leq t\Big). \tag{5}$$

Pour $t \leq 0$, comme Y/X est une v.a. strictement positive, $P(Y/X \leq t) = 0 = F(t)$, donc F coïncide sur $\mathbb{R}_-$ avec la f.d.r. de Y/X. Pour $t > 0$ fixé, une application immédiate du théorème de convergence décroissante à la suite de v.a. $\big(H(tX_n)\big)_{n\geq 1}$ nous donne

$$F_n(t) = \mathbf{E}H(tX_n) \downarrow \mathbf{E}H(tX) = F(t) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty. \tag{6}$$

Pour pouvoir en déduire, compte-tenu de (5), que $F(t) = P(Y/X \leq t)$, il nous reste à montrer que

$$P\Big(\frac{Y}{X_n} \leq t\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\Big(\frac{Y}{X} \leq t\Big). \tag{7}$$

Comme $X_n \geq X > 0$, la v.a. discrète X_n est strictement positive et on a équivalence entre les inégalités $Y/X_n \leq t$ et $Y \leq tX_n$, ce qui se traduit par l'égalité d'évènements :

$$B_n := \Big\{\frac{Y}{X_n} \leq t\Big\} = \{Y \leq tX_n\}.$$

Sous cette forme, il est clair que $(B_n)_{n\geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion. En notant $B := \cap_{n\geq 1} B_n$, on a donc $P(B_n) \downarrow P(B)$ par continuité séquentielle décroissante de P. Il nous reste à voir que $B = \{Y \leq tX\}$. Pour cela, montrons l'inclusion dans les deux sens.

D'abord, $X \leq X_n$ entraîne $\{Y \leq tX\} \subset \{Y \leq tX_n\} = B_n$. Ceci étant vrai pour tout n, on en déduit que $\{Y \leq tX\} \subset \cap_{n\geq 1} B_n = B$. Dans l'autre sens, si ω est un élément quelconque de $B = \cap_{n\geq 1} B_n$, il vérifie $Y(\omega) \leq tX_n(\omega)$ pour tout entier $n \geq 1$, d'où par conservation des inégalités larges en passant à la limite, $Y(\omega) \leq tX(\omega)$, autrement dit, $\omega \in \{Y \leq tX\}$. Comme ω était quelconque dans B, ceci montre l'inclusion de B dans $\{Y \leq tX\}$. Ceci achève la justification de (7).

Le raisonnement fait ci-dessus étant valable pour tout $t > 0$, nous venons d'établir que F coïncide avec la f.d.r. de Y/X sur $]0, +\infty[$. Ces deux fonctions étant nulles sur $\mathbb{R}_-$, on conclut que F est bien la f.d.r. de Y/X.

7) Application au calcul explicite de la f.d.r. de Y/X, quand X et Y suivent des lois exponentielles de paramètre respectif a et b. Dans ce cas, on sait que

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-bt} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Comme X est à valeurs dans $]0, +\infty[$, on en déduit que si $t < 0$, $H(tX) = 0$, d'où $\mathbf{E}H(tX) = 0$. Si $t \geq 0$, $H(tX) = 1 - \mathrm{e}^{-btX}$ et en utilisant la formule pour le calcul de l'espérance d'une fonction d'une v.a. X à densité exponentielle de paramètre a, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}H(tX) = \int_0^{+\infty} \big(1 - \mathrm{e}^{-btx}\big) a\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} a\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x - a\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+bt)x}\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - \frac{a}{a+bt} = \frac{bt}{a+bt}. \end{aligned}$$

La fonction de répartition F de la v.a. positive Y/X, où X et Y suivent des lois exponentielles de paramètre respectif a et b est donc donnée par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{bt}{a+bt} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

La v.a. positive Y/X a pour espérance (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$)

$$\mathbf{E}\Big(\frac{Y}{X}\Big) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{a}{a+bt}\,\mathrm{d}t = +\infty,$$

la divergence de cette intégrale vient de ce que l'intégrande positive est équivalente à $a/(bt)$ quand t tend vers $+\infty$. Par conséquent la v.a. Y/X n'est pas intégrable.

8) *Exemple de suite $(X_n)_{n\geq 1}$ ayant les propriétés requises à la question 6).*
On pose

$$\forall n \geq 1,\ \forall \omega \in \Omega, \quad X_n(\omega) := \frac{[10^n X(\omega)] + 1}{10^n},$$

où $[x]$ désigne la *partie entière* du réel positif x, c'est-à-dire l'unique entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq x < k+1$. Les v.a. positives X_n sont discrètes car elles prennent toutes leurs valeurs dans l'ensemble dénombrable des nombres décimaux.

Pour tout réel positif x, on a $x - 1 < [x] \leq x$. En appliquant cette inégalité avec $x = 10^n X(\omega)$ pour ω quelconque dans Ω, on obtient :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \frac{10^n X(\omega) - 1 + 1}{10^n} < X_n(\omega) \leq \frac{10^n X(\omega) + 1}{10^n},$$

d'où après simplifications :

$$X(\omega) < X_n(\omega) \leq X(\omega) + 10^{-n}.$$

Ces inégalités étant valables pour tout $n \geq 1$ et tout ω, on en déduit que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge *uniformément* sur Ω vers X, ce qui est plus que nous n'en demandions.

Pour prouver la décroissance de $(X_n)_{n\geq 1}$, commençons par montrer que tout réel positif x vérifie pour tout entier $n \geq 1$:

$$[10^{n+1}x] = 10[10^n x] + r_n, \tag{8}$$

où r_n est un entier compris entre 0 et 9. Pour cela, fixons n et notons $k := [10^{n+1}x]$. On a donc l' encadrement $k \leq 10^{n+1}x < k+1$ et $j \leq 10^n x < j+1$. On en déduit que

$$\frac{k}{10} \leq 10^n x < \frac{k+1}{10},$$

puis en écrivant la division euclidienne de k par 10, $k = 10q + r$, $0 \leq r < 10$,

$$q + \frac{r}{10} \leq 10^n x < q + \frac{r+1}{10}$$

et comme $0 \leq r \leq 9$,

$$q \leq 10^n x < q + \frac{9+1}{10} = q + 1.$$

Comme q est entier, cet encadrement nous dit que $q = [10^n x]$. Nous avons donc bien $k = [10^{n+1}x] = 10[10^n x] + r$, avec r dépendant seulement de k, c'est-à-dire de n et de x. Ceci établit (8).

Pour vérifier que la suite de variables aléatoires strictement positives $(X_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, il ne nous reste plus qu'à remarquer qu'en appliquant (8) à $x = X(\omega)$, on a pour tout $n \geq 1$ et tout $\omega \in \Omega$:

$$0 < \frac{X_{n+1}(\omega)}{X_n(\omega)} = \frac{[10^{n+1}X(\omega)] + 1}{10[10^n X(\omega)] + 10} = \frac{10[10^n X(\omega)] + r_n(\omega) + 1}{10[10^n X(\omega)] + 10} \leq 1,$$

puisque $r_n(\omega) \leq 10$.