Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2007–2008**

Corrigé du devoir n° 1

Ex 1. *Probabilité de gagner un jeu sur son service au tennis*
On considère le modèle simplifié suivant du jeu de tennis : le joueur A est au service et affronte B. Un « jeu » est constitué d'un certain nombre d' « échanges » et à la fin de chaque « échange », celui des deux joueurs qui a gagné l'échange marque un point. Le joueur qui gagne le « jeu » est le premier à totaliser au moins 4 points *avec* au moins deux points d'avance sur son adversaire. On suppose que tous les échanges sont indépendants et que lors de chaque échange la probabilité pour A de gagner le point reste constante et vaut p. Notre objectif est de calculer en fonction de p la probabilité de $G := \{A \text{ gagne le jeu}\}$. On introduit les notations d'événements suivantes.

$$\begin{aligned} A_n &:= \{ A \text{ gagne le } n\text{-ième échange} \}, \quad B_n := \{ B \text{ gagne le } n\text{-ième échange} \}, \\ E_{i,j} &:= \{\text{Au bout de } i+j \text{ échanges, } A \text{ a } i \text{ points et } B \text{ en a } j\}. \end{aligned}$$

1) A peut gagner avec 4 points si le score est 4 à 0 ou 4 à 1 ou 4 à 2, autrement dit si l'un des évènements $E_{4,0}$, $E_{4,1}$ ou $E_{4,2}$ se réalise. On a donc

$$G' := \{ A \text{ gagne le jeu avec 4 points} \} = E_{4,0} \cup E_{4,1} \cup E_{4,2}.$$

L'autre possibilité est que A gagne avec plus de 4 points et cela se produit si et seulement si le jeu se termine sur un score 5 à 3 ou 6 à 4 ou 7 à 5 ou..., bref sur un score de la forme $k+2$ à k pour k décrivant l'ensemble de tous les nombres entiers à partir de 3. Ceci correspond à la réalisation de l'un des évènements de la suite infinie $(E_{k+2,k})_{k\geq 3}$. Ainsi

$$G'' := \{ A \text{ gagne le jeu avec plus de 4 points} \} = \bigcup_{k\geq 3} E_{k+2,k}.$$

Il est clair que $G = G' \cup G''$, d'où la décomposition

$$G = E_{4,0} \cup E_{4,1} \cup E_{4,2} \cup \Big(\bigcup_{k\geq 3} E_{k+2,k} \Big). \tag{1}$$

2) *Calcul de $P(E_{4,0})$, $P(E_{4,1})$ et $P(E_{4,2})$.*
Comme $E_{4,0} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$, l'indépendance des échanges nous donne :

$$P(E_{4,0}) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = p^4.$$

Le gain du jeu par A sur le score de 4 à 1 (évènement $E_{4,1}$) se réalise si et seulement si A gagne le cinquième échange (A_5) et B marque un seul point lors des quatre premiers échanges ($E_{3,1}$). Ainsi $E_{4,1} = A_5 \cap E_{3,1}$. En considérant les 5 premiers échanges comme indépendants[1] on a donc $P(E_{4,1}) = P(E_{3,1})P(A_5) = P(E_{3,1})p$. On remarque que $P(E_{3,1})$ est la probabilité que A ait exactement trois succès dans une suite de 4 épreuves répétées indépendantes, c'est donc $C_4^3 p^3(1-p) = 4p^3(1-p)$. On a donc

$$P(E_{4,1}) = P(E_{3,1})p = 4p^4(1-p).$$

Par un raisonnement analogue, on voit que $E_{4,2} = A_6 \cap E_{3,2}$ et

$$P(E_{4,2}) = P(E_{3,2})P(A_6) = C_5^3 p^3(1-p)^2 p = 10p^4(1-p)^2.$$

3) Pour tout $k \geq 3$, on a :

$$E_{k+2,k} = E_{3,3} \cap \Big(\bigcap_{4 \leq j \leq k} C_j \Big) \cap A_{2k+1} \cap A_{2k+2}, \tag{2}$$

où l'on a posé $C_j := (A_{2j-1} \cap B_{2j}) \cup (B_{2j-1} \cap A_{2j})$. Pour justifier cette décomposition, on remarque que $E_{k+2,k}$ est aussi l'évènement « A *gagne* le jeu avec $k+2$ points contre k à B ». Le jeu dure donc dans ce cas $(2k+2)$ échanges, donc au moins 8 échanges puisque $k \geq 3$. Celà implique l'égalité des 2 joueurs au bout des 6 premiers échanges. En effet, compte tenu des règles sur le gain du jeu, les seuls scores possibles au bout de 6 échanges sont 4 à 2 (et alors A remporte le jeu) ou 3 à 3 (les échanges doivent continuer) ou 2 à 4 (et B remporte le jeu). Les scores du type 6 à 0 ou 5 à 1 sont impossibles car alors un des deux joueurs serait arrivé le premier à 4 points avec plus de deux points d'avance et le jeu se serait arrêté avant le sixième échange.

Regardons d'abord le cas particulier de $E_{5,3}$. Cet évènement se réalise si et seulement si les deux joueurs sont à égalité au bout des 6 premiers échanges *et* A remporte le septième et le huitième. Donc

$$P(E_{5,3}) = E_{3,3} \cap A_7 \cap A_8.$$

Ceci est un cas particulier de la formule (2) en convenant qu'une intersection indexée par « $4 \leq j \leq 3$ » est égale à Ω (ce qui est logique puisque qu'aucun j ne vérifie cette condition, on ne met donc aucune restriction d'appartenance à un C_j pour qu'un évènement élémentaire ω soit dans cette « intersection »).

Pour $k \geq 4$, la réalisation de $E_{k+2,k}$ signifie la victoire de A au bout de $2k+2$ échanges avec cette fois $2k+2 \geq 10$. Ceci se produit si et seulement si *chacune* des trois conditions suivantes se réalise (on aura donc l'intersection des trois évènements correspondants) :

- A et B sont à égalité au bout des 6 premiers échanges
- A et B se retrouvent à égalité à l'issue de chaque paire d'échanges depuis la paire $7^{\text{ième}}$, $8^{\text{ième}}$ jusqu'à la paire $(2k-1)^{\text{ième}}$, $(2k)^{\text{ième}}$.

1. En toute rigueur, ce n'est pas vrai, mais du point de vue du calcul tout se passe comme s'ils l'étaient, voir la remarque 3 page 6.

– A gagne les deux derniers échanges : le $(2k+1)^{\text{ième}}$ et le $(2k+2)^{\text{ième}}$.
L'évènement « A et B marquent chacun un point lors de la paire d'échanges $(2j-1)^{\text{ième}}$ et $(2j)^{\text{ième}}$ » s'écrit $C_j = (A_{2j-1} \cap B_{2j}) \cup (B_{2j-1} \cap A_{2j})$ puisque ou bien A marque le premier et B égalise, ou c'est l'inverse. La justification de (2) est donc complète.

4) *Calcul des* $P(E_{k+2,k})$.

L'évènement $E_{3,3}$ se réalise si et seulement si lors des 6 premiers échanges, A marque exactement 3 points (donc B aussi). En considérant ces 6 premiers échanges comme une suite d'épreuves répétées indépendantes, on a immédiatement

$$P(E_{3,3}) = C_6^3 p^3 (1-p)^3 = 20p^3(1-p)^3.$$

Les évènements $A_{2j-1} \cap B_{2j}$ et $B_{2j-1} \cap A_{2j}$ sont incompatibles (par exemple parce que le premier implique que A remporte l'échange n$^{\text{o}}$ $(2j-1)$ tandis que le deuxième implique que B remporte ce même échange). On a donc

$$P(C_j) = P(A_{2j-1} \cap B_{2j}) + P(B_{2j-1} \cap A_{2j}) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p),$$

en utilisant l'indépendance des échanges pour la deuxième égalité. On remarque que la valeur trouvée ne dépend pas de j. On la notera r dans la suite pour alléger les écritures. Finalement, par indépendance des échanges on obtient :

$$\begin{aligned} P(E_{k+2,k}) &= P(E_{3,3}) \times \Big(\prod_{j=4}^{k} P(C_j) \Big) \times P(A_{2k+1}) P(A_{2k+2}) \\ &= 20p^3(1-p)^3 r^{k-3} p^2 \\ &= 20p^5(1-p)^3 r^{k-3}. \end{aligned}$$

Remarquons que cette formule reste valable dans le cas particulier $k=3$ où l'on a directement

$$P(E_{5,3}) = P(E_{3,3} \cap A_7 \cap A_8) = P(E_{3,3})P(A_7)P(A_8) = 20p^3(1-p)^3 p^2.$$

5) Les $E_{k+2,k}$ sont deux à deux disjoints. En effet, soient $k \neq l$, la réalisation de $E_{k+2,k}$ implique que le jeu se termine au $(2k+2)^{\text{ième}}$ échange tandis que celle de $E_{l+2,l}$ implique qu'il se termine au $(2l+2)^{\text{ième}}$ échange. Comme $k \neq l$, on a aussi $2k+2 \neq 2l+2$, donc les évènements $E_{k+2,k}$ et $E_{l+2,l}$ sont incompatibles. On peut ainsi utiliser la σ-additivité :

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{k \geq 3} E_{k+2,k} \Big) &= \sum_{k=3}^{+\infty} P(E_{k+2,k}) \\ &= 20p^5(1-p)^3 \sum_{k=3}^{+\infty} r^{k-3} \\ &= 20p^5(1-p)^3 \sum_{j=0}^{+\infty} r^j \\ &= 20p^5(1-p)^3 \frac{1}{1-r}. \end{aligned}$$

La série géométrique de raison r qui intervient dans ce calcul est bien convergente puisque $r = 2p(1-p)$ est dans $[0, 1[$. En effet si $p < 1/2$ alors $2p < 1$ et $2p(1-p) < 1-p \leq 1$, si $p > 1/2$ alors $1-p < 1/2$ et on a la même majoration stricte pour r en échangeant les rôles de p et $1-p$, enfin si $p = 1/2$, $r = 2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/2 < 1$. En fait on peut vérifier que le maximum de $2p(1-p)$ lorsque p parcourt $[0, 1]$ est atteint en $p = 1/2$.

6) Les évènements figurant dans la décomposition (1) correspondent chacun au gain du jeu sur un score différent et sont donc deux à deux incompatibles. On en déduit

$$\begin{aligned} P(G) &= P(E_{4,0}) + P(E_{4,1}) + P(E_{4,2}) + P\Big(\bigcup_{k\geq 3} E_{k+2,k}\Big) \\ &= p^4\Big(1 + 4(1-p) + 10(1-p)^2 + \frac{20p(1-p)^3}{1-2p(1-p)}\Big) =: f(p). \end{aligned} \tag{3}$$

On remarque que pour $p = 0$, $P(G) = 0$ et pour $p = 1$, $P(G) = 1$, ce qui est conforme à l'intuition.

7) L'événement $N = \{\text{le jeu continue indéfiniment sans vainqueur}\}$ s'écrit :

$$N = E_{3,3} \cap \Big(\bigcap_{j\geq 4} C_j\Big).$$

Il est donc inclus pour tout $n \geq 4$ dans l'évènement

$$N_n := E_{3,3} \cap \Big(\bigcap_{j=4}^{n} C_j\Big),$$

d'où

$$0 \leq P(N) \leq P(N_n) = 20p^3(1-p)^3 r^{n-3}.$$

Ceci étant vrai pour *tout* $n \geq 4$, ces inégalités *larges* se conservent par passage à la limite quand n tend vers l'infini. Comme $0 \leq r < 1$, la limite de $P(N_n)$ est nulle, on en déduit $P(N) = 0$. La probabilité que le jeu continue indéfiniment est nulle (bien que l'évènement N ne soit pas l'ensemble vide).

8) Notons H l'évènement « B gagne le jeu ». Les trois évènements G, H et N forment une partition de Ω, donc $P(G) + P(H) + P(N) = 1$. Comme nous venons de voir que $P(N) = 0$, cette égalité se réduit à $P(G) + P(H) = 1$. Dans le cas particulier où $p = 1/2$, A ne tire aucun avantage de son service, et on doit avoir par symétrie $P(G) = P(H)$, d'où $P(G) = 1/2$. Vérifions le sur la formule générale (3) pour $P(G)$. Elle s'écrit ici

$$P(G) = \frac{1}{16}\Big(1 + 2 + \frac{10}{4} + \frac{20/16}{1-1/2}\Big) = \frac{1}{16}\Big(3 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\Big) = \frac{1}{2}.$$

Remarque 1. On aurait pu dans le cas général calculer $P(H)$ par la même méthode qui nous a conduit à (3) pour $P(G)$. Il suffit de remarquer que la probabilité que B gagne l'échange est $q = 1-p$. Il est clair alors que $P(H) = f(q)$. Comme $P(N) = 0$, on doit avoir $f(q) + f(q) = 1$. Graphiquement ceci se traduit par le fait que la représentation

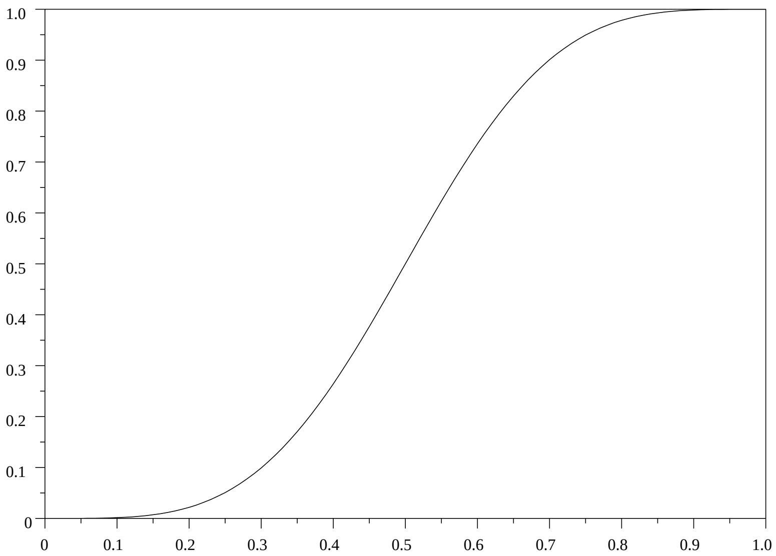

FIG. 1 – Représentation graphique de $P(G) = f(p)$

graphique de f admet le point $(1/2, 1/2)$ comme centre de symétrie. La figure 1 (réalisée à l'aide du logiciel Scilab) semble le confirmer. Il faut bien avouer que cette symétrie ne saute pas aux yeux à la lecture de (3). Pour le vérifier par le calcul, commençons par réécrire (3) sous la forme :

$$f(p) = p^4\Bigl(1 + 4q + 10q^2 + \frac{20pq^3}{1-2pq}\Bigr).$$

On a alors

$$f(p) + f(q) = p^4 + q^4 + 4pq(p^3 + q^3) + 10p^2q^2(p^2+q^2) + \frac{20p^3q^3(p^2+q^2)}{1-2pq}.$$

De là on arrive facilement à $f(p) + f(q) = 1$ grâce aux formules suivantes obtenues en développant $(p+q)^n$ par la formule du binôme en notant que $p + q = 1$:

$$p^2 + q^2 = 1 - 2pq, \quad p^3 + q^3 = 1 - 3pq, \quad p^4 + q^4 = 1 - 4pq + 2p^2q^2.$$

Remarque 2. Un coup d'oeil sur la figure 1 et sur le tableau de valeurs numériques ci-dessous permet de voir l'effet amplificateur des déséquilibres dû aux règles du tennis. Dès que p s'éloigne de $1/2$, $f(p)$ se rapproche très vite de 0 ou de 1.

p	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$f(p)$	0,001	0,022	0,099	0,264	0,500	0,736	0,901	0,978	0,999

Remarque 3. L'hypothèse d'indépendance des échanges n'est en réalité valable que pour les 4 premiers échanges (puisqu'on est sûr qu'ils auront lieu). Pour les autres échanges, en raison de l'arrêt au bout d'un nombre aléatoire d'échanges, on ne peut pas avoir indépendance. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que les évènements $E_{4,0}$ et A_5 ont des probabilités qui ne valent ni 0 ni 1 et sont *incompatibles* : la réalisation de $E_{4,0}$ impliquant le gain du jeu au bout de 4 échanges, A ne peut gagner le cinquième ! Ils ne sont donc pas indépendants. Pourtant la réalisation de $E_{4,0}$ ne dépend que du résultat des 4 premiers échanges et celle de A_5 que du résultat du cinquième échange. Si ces échanges étaient indépendants, ces deux évènements devraient l'être.

Il y a deux façons de remédier à ce problème. La première est de dire que toutes les probabilités calculées dans ce problème sont les mêmes que si les échanges continuaient indéfiniment après le gain du jeu par l'un des deux joueurs. On aurait ainsi une suite infinie d'épreuves répétées indépendantes. L'autre façon est de faire du conditionnement en chaîne en considérant que ce n'est pas $P(A_n)$ qui est constante égale à p comme le fait abusivement l'énoncé[2] mais les probabilités *conditionnelles* $P(A_n \mid H_{n-1})$ où H_{n-1} représente n'importe quelle suite de résultats détaillés des $n-1$ premiers échanges compatible avec la tenue du $n^{\text{ième}}$ échange. Par exemple pour $n = 5$, on peut mettre à la place de H_4 les évènements $A_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap A_4$ ou $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap A_4$.

2. En fait on doit même clairement avoir $P(A_5) < P(A_4)$ à cause de la possibilité de gain du jeu dès le quatrième échange...

Ex 2. *Sommes d'indicatrices indépendantes*

Soit $(A_i)_{i\geq 1}$ une suite d'événements *indépendants*. On note $p_i = P(A_i)$ et on suppose que :

$$a := \sum_{i=1}^{+\infty} p_i < +\infty.$$

Pour tout $n \geq 1$, on définit l'application $S_n : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}(\omega).$$

Le but de cet exercice est de prouver l'inégalité :

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^*, \quad P\Big(S_n \geq k\Big) \leq \frac{a^k}{k!}.$$

1) Remarquons d'abord que si $k > n$, $P(S_n \geq k) = P(\emptyset) = 0$. En effet comme $\mathbf{1}_{A_i}(\omega)$ est majoré par 1, on a pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) \leq n$ et par conséquent l'évènement $\{S_n \geq k\}$ se réduit à l'ensemble vide. La majoration $P(S_n \geq k) \leq \frac{a^k}{k!}$ est alors trivialement vérifiée. Dans tout ce qui suit, on suppose $1 \leq k \leq n$.

2) On note $B_{n,k} := \{\omega \in \Omega;\ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}(\omega) \geq k\}$. C'est l'évènement « réalisation d'*au moins* k des A_i ». Si ω appartient à $B_{n,k}$ (ou réalise l'évènement $B_{n,k}$), il existe donc un ensemble d'indices $F = F_\omega$ de cardinal k tel que ω réalise chacun des A_i pour $i \in F$. Ceci s'écrit :

$$\forall \omega \in B_{n,k},\ \exists F = F_\omega \subset \{1, \dots, n\},\ \operatorname{card} F = k, \quad \omega \in \bigcap_{i\in F} A_i,$$

soit encore :

$$\forall \omega \in B_{n,k}, \quad \omega \in \bigcup_{\substack{F\subset\{1,\dots,n\}\\ \operatorname{card} F = k}} \bigcap_{i\in F} A_i,$$

ce qui justifie l'inclusion :

$$B_{n,k} \subset \bigcup_{\substack{F\subset\{1,\dots,n\}\\ \operatorname{card} F = k}} \bigcap_{i\in F} A_i.$$

3) En utilisant successivement la sous-additivité de P et l'indépendance des A_i, on en déduit immédiatement que

$$P(B_{n,k}) \leq \sum_{\substack{F\subset\{1,\dots,n\}\\ \operatorname{card} F = k}} P\left(\bigcap_{i\in F} A_i\right) = \sum_{\substack{F\subset\{1,\dots,n\}\\ \operatorname{card} F = k}} \prod_{i\in F} p_i.$$

4) On note $a_n := \sum_{i=1}^{n} p_i$. On peut alors voir a_n^k comme le produit de k sommes identiques de n termes. La formule de développement d'un produit de sommes nous donne :

$$a_n^k = \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,n\}^k} p_{i_1} \dots p_{i_k}.$$

Sous cette forme, on a une somme de n^k termes *tous positifs ou nuls*. En laissant tomber tous ceux d'entre eux qui correspondent à un vecteur d'indices $(i_1, \dots, i_k)$ où les i_j ne sont pas tous distincts, on obtient la minoration suivante de a_n^k :

$$a_n^k \geq \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,n\}^k \\ \text{les } i_j \text{ tous distincts}}} p_{i_1}\dots p_{i_k} = k! \sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_k\leq n} p_{i_1}\dots p_{i_k} = k! \sum_{\substack{F\subset\{1,\dots,n\} \\ \operatorname{card} F=k}} \prod_{i\in F} p_i.$$

5) Comme a_n est la n^{e} somme partielle d'une série à termes positifs ou nuls, elle vérifie $a_n \leq \sum_{i=1}^{+\infty} p_i = a$. En combinant ceci avec les résultats des questions 3) et 4), on aboutit à

$$\forall n \geq 1,\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P\Big(S_n \geq k\Big) = P(B_{n,k}) \leq \frac{a_n^k}{k!} \leq \frac{a^k}{k!}.$$

Ce dernier majorant est aussi valable pour $k > n$ d'après la question 1).

6) *Application à un problème de tir.* Dans un stand de tir, une cible mobile traverse le champ visuel d'un tireur (une traversée par épreuve). À chaque épreuve, le tireur tire un coup sur la cible. D'une épreuve à la suivante, la vitesse de la cible augmente de 20%. On suppose que pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible est *inversement proportionnelle* à la vitesse de la cible. Les tirs sont supposés indépendants, le tireur dispose d'autant de cartouches qu'il le souhaite et le défi qu'il doit relever est celui de toucher au moins 20 fois la cible. Notons p la probabilité que le tireur touche la cible lors du premier passage.

En utilisant le résultat démontré ci-dessus, nous nous proposons de majorer indépendamment de p la probabilité de réussir le défi. On note n le nombre de tirs et on suppose dans un premier temps que ce nombre est choisi par le tireur *avant* le début de l'épreuve. Pour $i \geq 1$, v_i et p_i désignent respectivement la vitesse de la cible et la probabilité qu'elle soit touchée au i^{e} passage. Soit S_n le nombre de tirs réussis. Nous devons majorer $P(S_n \geq 20)$.

Les hypothèses de l'énoncé se traduisent par les égalités :

$$p_1 = p, \quad \text{et} \quad \forall i \geq 1, \quad p_i = \frac{c}{v_i}, \quad v_{i+1} = 1{,}2 v_i,$$

où c est une constante. On en déduit immédiatement :

$$\forall i \geq 1, \quad \frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{\frac{c}{v_{i+1}}}{\frac{c}{v_i}} = \frac{v_i}{v_{i+1}} = \frac{1}{1{,}2} = \frac{5}{6}.$$

On voit ainsi que $(p_i)_{i\geq 1}$ est la suite géométrique de premier terme $p_1 = p$ et de raison $5/6$, d'où

$$\forall i \geq 1, \quad p_i = p\Big(\frac{5}{6}\Big)^{i-1}.$$

La série géométrique associée de raison $5/6$ est donc convergente ($|5/6| < 1$) et sa somme a se calcule comme suit :

$$a = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i = p \sum_{j=0}^{+\infty} \Big(\frac{5}{6}\Big)^j = \frac{p}{1 - 5/6} = 6p.$$

En majorant la probabilité inconnue p par 1, on voit alors, grâce au résultat de la question 5), que

$$\forall n \geq 1, \quad P(S_n \geq 20) \leq \frac{(6p)^{20}}{20!} \leq \frac{6^{20}}{20!} \leq 1{,}51 \times 10^{-3}.$$

Remarque 4. On peut donc dire que quel que soit le nombre de tirs choisi *a priori* par le tireur, sa probabilité de gagner le défi est majorée par 0,001 51. On notera cependant que l'énoncé était un peu flou et ne précisait pas que le nombre de tirs devait être choisi *avant* le début de l'épreuve. Une modélisation plus réaliste serait de considérer que le nombre de tirs est une variable aléatoire N : le tireur s'arrête quand il a gagné, ou quand il renonce. La valeur de N n'est pas connue à l'avance. On peut quand même répondre à la question de l'énoncé dans ce cas, en s'appuyant sur les hypothèses suivantes.

- Pour tout $i \leq n$, $P(A_i \mid N = n) = p_i$ ne dépend pas de n.
- L'indépendance des tirs a lieu conditionnellement à N. Cela revient à dire que pour tout $n \geq 1$ tel que $P(N = n) \neq 0$, les n premiers tirs sont $P(\,.\,|N = n)$-indépendants.

Notons I l'ensemble des entiers n tels que $P(N = n) > 0$ et S_N le nombre de succès en N tirs. Avec les hypothèses formulées ci-dessus, la majoration établie aux questions 1)–5) reste valable sous la forme : $P(S_n \geq k \mid N = n) \leq \frac{a^k}{k!}$. En appliquant la formule de conditionnement par tous les cas possibles, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
P(S_N \geq 20) &= \sum_{n \in I} P(S_N \geq 20 \mid N = n) P(N = n) \\
&= \sum_{n \in I} P(S_n \geq 20 \mid N = n) P(N = n) \\
&\leq \sum_{n \in I} \frac{6^{20}}{20!} P(N = n) \\
&= \frac{6^{20}}{20!} \sum_{n \in I} P(N = n) = \frac{6^{20}}{20!}.
\end{aligned}$$

On retrouve ainsi le même majorant qu'avec un nombre de tirs non aléatoire.