Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2006–2007**

Corrigé du Devoir nº 1

Un nombre *décimal* est un rationnel qui peut s'écrire $\frac{k}{10^n}$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est évidemment dénombrable puisque :

1. $\mathbb{D}$ contient $\mathbb{N}$, donc $\mathbb{D}$ est infini.
2. $\mathbb{D}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$ ensemble des nombres rationnels qui est dénombrable.

On sait que tout sous-ensemble infini d'un ensemble dénombrable est dénombrable (cf. polycopié de cours IPÉ 2006–2007, prop. 1.31 p. 14).

Ex 1. Développement(s) décimaux d'un réel

Par définition, l'écriture $x = 0{,}379\,999\,999\,999\dots$ signifie que

$$x = \frac{37}{100} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{9}{10^k}.$$

La série $\sum_{k\geq 3}$ ci-dessus est une série géométrique de premier terme $9/1000$ et de raison $1/10$. Sa somme est donc

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{1000} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^j = \frac{9}{1000} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{1000}\frac{10}{9} = \frac{1}{100}.$$

Par conséquent

$$x = \frac{37}{100} + \frac{1}{100} = 0{,}38.$$

L'écriture $0{,}379\,999\,999\,999\dots$ porte le nom de « développement décimal illimité impropre » du nombre 0,38. On appelle « développement décimal illimité propre » d'un réel x, un développement qui ne comporte pas la répétition indéfinie du chiffre 9 à partir d'un certain rang.

Pour généraliser le calcul fait ci-dessus, il est utile d'établir une fois pour toutes la formule suivante :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad R_m := \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^m}. \tag{1}$$

En effet, la série $\sum_{k=m+1}^{+\infty}$ ci-dessus est géométrique de premier terme $9 \times 10^{-m-1}$ et de raison $1/10$. Sa somme se calcule en mettant en facteur le premier terme de façon à se ramener à la série géométrique standard de raison $1/10$, ce qui donne :

$$R_m = \frac{9}{10^{m+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^j = \frac{9}{10^{m+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10^{m+1}}\frac{10}{9} = \frac{1}{10^m}.$$

Cherchons une caractérisation des nombres réels *positifs* ayant un développement décimal illimité impropre. Soit x un tel réel. Dans ce cas le développement impropre de x peut s'écrire $x = c_{-n} \dots c_0, c_1 \dots c_m 999999 \dots$, pour des entiers $n \geq 0$, $m \geq 0$ (si $m = 0$, la partie $c_1 \dots c_m$ disparaît) avec $c_m \neq 9$ si $m \geq 1$. Bien entendu dans cette écriture, les c_i sont des « chiffres décimaux » pris dans $\{0, 1, \dots, 9\}$. On a alors :

$$x = \frac{a}{10^m} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k}, \quad \text{où } a \text{ est l'entier } \sum_{i=-n}^{m} c_i 10^{m-i}.$$

Grâce à (1), on en déduit que

$$x = \frac{a}{10^m} + \frac{1}{10^m} = \frac{a+1}{10^m}.$$

Comme $a + 1$ est entier, x est donc un nombre décimal *non nul* (car $a \geq 0$). Réciproquement, tout nombre décimal x strictement positif admet un développement décimal illimité impropre. En effet si $x = \frac{b}{10^m}$ avec $b \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, on peut toujours écrire

$$x = \frac{b-1}{10^m} + \frac{1}{10^m} = \sum_{i=-n}^{m} c_i 10^{m-i} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k},$$

où $\sum_{i=-n}^{m} c_i 10^{m-i}$ est l'écriture en base 10 de l'entier positif ou nul $b - 1$. Ceci nous fournit le développement décimal illimité $x = c_{-n} \dots c_0, c_1 \dots c_m 9999 \dots$.

La (ou les) représentation(s) décimale(s) illimitée(s) d'un nombre réel strictement négatif x s'obtient par symétrie en écrivant la représentation correspondante de $-x$ précédée d'un signe moins. Compte-tenu de ce que nous venons de voir pour les réels positifs, on en déduit que $x < 0$ admet un développement décimal illimité impropre si et seulement s'il est décimal.

Reste à examiner le cas particulier de 0. Tout développement décimal illimité de 0 est de la forme

$$0 = \sum_{i=-n}^{+\infty} c_i 10^{-i} \quad \text{ou} \quad 0 = -\sum_{i=-n}^{+\infty} c_i 10^{-i},$$

où les c_i sont dans les deux cas des chiffres décimaux pris dans $\{0, 1, \dots, 9\}$. Dans le premier cas, la série est à termes positifs et sa somme ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls, donc tous les c_i valent 0. C'est la même chose dans le deuxième cas après multiplication des deux membres de l'égalité par -1.

En conclusion, l'ensemble des réels qui n'ont pas de développement décimal illimité impropre est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{D}^*$. Dans cet ensemble, on trouve des rationnels non décimaux (exemple $1/3$), des nombres algébriques non rationnels comme $\sqrt{2}$ et des nombres transcendants comme π.

Ex 2. Tirer au hasard un nombre réel

On décide de « tirer au hasard » un réel $x \in [0, 1[$. Pour cela on effectue une infinité de tirages avec remise dans une urne contenant des boules marquées chacune d'un chiffre décimal. On construit x en écrivant son développement décimal illimité, le numéro sorti au i^{e} tirage fournissant le i^{e} chiffre décimal de x. La composition précise de l'urne est inconnue. On sait seulement qu'il y a au moins une boule marquée 0, qu'il n'y a aucune boule marquée 9 et qu'il y a au moins une boule marquée d'un autre chiffre que 0. Comme aucune boule dans l'urne n'est marquée 9, le développement décimal illimité ainsi obtenu est forcément propre. On note p la probabilité de sortir une boule marquée 0 au i^{e} tirage. En raison du mode de tirage (une boule avec remise) et de la composition de l'urne, il est clair que p ne dépend pas de i et que $0 < p < 1$.

Pour chaque i de $\mathbb{N}^*$ on note N_i l'événement :

$$N_i := \{\text{le } i^{\text{e}} \text{ chiffre de } x \text{ après la virgule est un zéro}\}$$

Les N_i sont indépendants et tous de probabilité p.

1) Expression de D_n, D et E par des opérations ensemblistes sur les N_i.

D_n est l'évènement « l'écriture décimale illimitée de x ne comporte que des zéros à partir du rang n ». Autrement dit D_n se réalise si et seulement si *chacun* des N_i pour $i \geq n$ se réalise, d'où

$$D_n = \bigcap_{i \geq n} N_i.$$

La composition de l'urne excluant les développements décimaux illimités impropres, le nombre aléatoire x généré par les tirages est décimal si et seulement si à partir d'un certain rang n, tous ses chiffres sont nuls (c'est-à-dire si tous les tirages donnent une boule numérotée 0). Autrement dit l'évènement D « x est un nombre décimal » se réalise si et seulement s'il existe un entier $n \geq 1$, pour lequel D_n se réalise. Ceci s'écrit :

$$D = \bigcup_{n \geq 1} D_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{i \geq n} N_i.$$

L'évènement E « l'écriture de x comporte une infinité de zéros » se réalise si et seulement si aussi loin que l'on aille dans la suite des chiffres de x, on trouve toujours au moins un zéro. Plus précisément E se réalise si *quel que soit* $n \geq 1$, *il existe* au moins un rang $i \geq n$ tel que le i^{e} chiffre de x soit nul (autrement dit tel que N_i se réalise). En utilisant la traduction automatique des quantificateurs ($\forall \to \cap$ et $\exists \to \cup$), ceci s'écrit :

$$E = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{i \geq n} N_i.$$

Une autre façon d'aboutir à ce résultat est de considérer l'évènement complémentaire E^c « l'écriture de x n'a qu'un nombre fini de zéros ». Cette condition signifie l'existence d'un rang n à partir duquel plus aucun N_i ne se réalise, autrement dit d'un rang n tel que $\bigcap_{i \geq n} N_i^c$ se réalise. On obtient ainsi :

$$E^c = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{i \geq n} N_i^c, \quad \text{d'où} \quad E = (E^c)^c = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{i \geq n} (N_i^c)^c = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{i \geq n} N_i.$$

Pour comparer D et E, on remarque d'abord que si le nombre aléatoire x généré par les tirages est décimal (si D se réalise), tous ses chiffres sont nuls à partir d'un certain rang (donc E se réalise aussi). Ceci montre que la réalisation de D implique celle de E, donc D est inclus dans E. La réciproque est fausse, puisque par exemple [1] si le nombre généré est $x = 0,010\overline{101}\dots$, il a une infinité de zéros (donc E est réalisé), mais n'est pas décimal [2], donc D n'est pas réalisé. Ceci montre que E n'est pas inclus dans D.

2) Pour calculer $P(\{x < 10^{-4}\})$, nous allons exprimer l'évènement $\{x < 10^{-4}\}$ en fonction des N_i. Pour cela on remarque que le nombre aléatoire généré x vérifie $x < 10^{-4}$ si et seulement si les 4 premiers tirages donnent une boule numérotée 0. Justifions cette affirmation. D'abord il est clair que si l'une des 4 premières boules a un numéro non nul, le nombre obtenu x vérifie $x \geq 10^{-4}$, donc $\{x < 10^{-4}\}$ n'est pas réalisé. Réciproquement, si les quatre premières boules donnent le chiffre 0, x s'écrit $0,0000c_5c_6\dots$, ou encore

$$x = \sum_{k=5}^{+\infty} \frac{c_k}{10^k}.$$

Comme les c_k sont pris dans $\{0, 1, \dots, 8\}$, on a la majoration :

$$x \leq \sum_{k=5}^{+\infty} \frac{8}{10^k} = \frac{8}{10^5} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{10^j} = \frac{8}{10^5}\,\frac{10}{9} = \frac{8}{9}10^{-4} < 10^{-4},$$

donc $\{x < 10^{-4}\}$ est réalisé [3].

Ceci nous montre que

$$\{x < 10^{-4}\} = \bigcap_{i=1}^{4} N_i.$$

Puisque les N_i sont indépendants et de même probabilité p, on en déduit

$$P(\{x < 10^{-4}\}) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{4} N_i\Big) = \prod_{i=1}^{4} P(N_i) = p^4.$$

Les N_i ne sont pas deux à deux disjoints car cela signifierait que x ne peut avoir qu'au plus un zéro dans son développement (ou que les tirages donnent au plus une fois une boule numérotée 0).

Une autre façon de le voir — plus abstraite, mais qu'il est bon de méditer — est de rappeler que deux évènements indépendants ne peuvent pas être disjoints, sauf le cas dégénéré où l'un d'eux a une probabilité 0 ou 1, cf. polycopié de cours IPÉ 2006–2007, remarques 2.47, p. 80. C'est d'ailleurs intuitif : si A et B sont disjoints, la réalisation de l'un interdit celle de l'autre, donc $P(A \mid B) = 0 \neq P(A)$, ce qui est contradictoire avec l'idée intuitive d'indépendance.

3) Pour calculer la probabilité de l'évènement

$$F_n := \{\text{le premier chiffre non-nul après la virgule est au rang } n\},$$

1. Je suppose implicitement ici qu'il y a une boule numérotée 1 dans l'urne, il est facile d'adapter cet exemple avec n'importe quel autre numéro différent de 0 et de 9.
2. Voir l'exercice 1, ou calculer x comme somme de la série géométrique $\sum_{j=1}^{+\infty} 100^{-j} = 1/99$.
3. Que peut-on dire si l'urne a une boule numérotée 9 ?

il suffit de noter que

$$F_n = \Big(\mathop{\cap}_{i=1}^{n-1} N_i^c\Big) \cap N_n$$

et d'exploiter l'indépendance mutuelle des évènements $N_1, \dots, N_n$ qui induit celle des $N_1^c, \dots, N_{n-1}^c, N_n$. Ceci nous donne

$$P(F_n) = (1-p)^{n-1}p. \tag{2}$$

Contrairement aux N_i, les F_n sont deux à deux disjoints. En effet si $m \neq n$, la réalisation de l'évènement $F_n \cap F_m$ signifierait que le nombre aléatoire x généré a son *premier* chiffre nul au rang n *et* au rang m, ce qui est absurde. Donc $F_n \cap F_m = \emptyset$.

4) L'évènement $\mathop{\cup}_{i\geq 1} N_i^c$ se réalise si et seulement si dans la suite infinie des tirages, sort au moins une boule non numérotée 0. Ceci revient à dire que la suite des chiffres de x comporte au moins un chiffre non nul. Alors si n est le rang de ce *premier* chiffre non nul de x, F_n est réalisé. Donc il *existe* un n (dépendant de x) tel que F_n se réalise, autrement dit, $\mathop{\cup}_{n\geq 1} F_n$ se réalise. Nous venons de montrer que la réalisation de $\mathop{\cup}_{i\geq 1} N_i^c$ implique celle de $\mathop{\cup}_{n\geq 1} F_n$, ce qui se traduit en langage ensembliste par l'inclusion :

$$\mathop{\cup}_{i\geq 1} N_i^c \subset \mathop{\cup}_{n\geq 1} F_n.$$

Réciproquement, si $\mathop{\cup}_{n\geq 1} F_n$ est réalisé, il existe un entier n tel que le n^{e} chiffre de x soit son premier zéro, ce qui implique qu'il y ait *au moins un* chiffre non nul dans la suite des chiffres de x. Ainsi la réalisation de $\mathop{\cup}_{n\geq 1} F_n$ implique celle de $\mathop{\cup}_{i\geq 1} N_i^c$, ce qui se traduit par l'inclusion :

$$\mathop{\cup}_{n\geq 1} F_n \subset \mathop{\cup}_{i\geq 1} N_i^c.$$

Cette inclusion dans les deux sens établit l'égalité d'évènements :

$$\mathop{\cup}_{n\geq 1} F_n = \mathop{\cup}_{i\geq 1} N_i^c.$$

Pour justifier cette égalité, on aurait aussi pu dire de manière plus concise : $\mathop{\cup}_{i\geq 1} N_i^c$ est l'évènement « au moins un chiffre non nul ». En classant tous les évènements élémentaires de cet évènement selon le rang d'apparition du *premier chiffre non nul*, on obtient $\mathop{\cup}_{i\geq 1} N_i^c = \mathop{\cup}_{n\geq 1} F_n$.

L'intérêt de cette écriture de $\mathop{\cup}_{i\geq 1} N_i^c$ en fonction des F_n est que les F_n étant deux à deux disjoints (ce que les N_i^c ne sont pas), on peut exploiter la σ-additivité de P pour calculer la probabilité de leur réunion. En rappelant (2), ceci nous donne en posant $q = 1-p$ et en notant que $0 < q < 1$:

$$P\Big(\mathop{\cup}_{i\geq 1} N_i^c\Big) = P\Big(\mathop{\cup}_{n\geq 1} F_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(F_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}p = p\sum_{j=0}^{+\infty} q^j = \frac{p}{1-q} = 1.$$

L'évènement $\{x = 0\}$ s'écrit aussi $\mathop{\cap}_{i\geq 1} N_i$. Sous cette forme, on voit qu'il est le complémentaire de $\mathop{\cup}_{i\geq 1} N_i^c$. Sa probabilité est donc nulle.

5) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, fixé, considérons la suite d'évènements $(G_n)_{n\geq m}$ où $G_n := \bigcap_{i=m}^{n} N_i$. En notant que pour tout $n \geq m$, $G_{n+1} = G_n \cap N_{n+1}$, donc $G_{n+1} \subset G_n$, on voit que cette suite est *décroissante pour l'inclusion*. Donc par continuité décroissante séquentielle de P :

$$P(G_n) \downarrow P\Big(\bigcap_{i=m}^{+\infty} N_i\Big) = P(D_m), \quad n \uparrow +\infty.$$

Par indépendance des N_i, on a pour tout $n \geq m$, $P(G_n) = p^{n-m+1}$, d'où :

$$P(D_m) = \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \lim_{n\to+\infty} p^{n-m+1} = 0,$$

car $0 < p < 1$. Comme l'entier m était quelconque, Ce résultat est valable pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

6) Nous pouvons maintenant calculer la probabilité d'obtenir un nombre décimal avec ce type de tirage aléatoire. En effet d'après la question 1,

$$D = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} D_m.$$

Les D_m ne sont pas deux à deux disjoints puisque $D_m \subset D_{m+1}$. On ne peut donc pas utiliser la σ-additivité de P ici. Par contre la propriété de sous-σ-additivité est toujours vérifiée et nous permet d'écrire ici :

$$0 \leq P(D) \leq \sum_{m\in\mathbb{N}^*} P(D_m) = 0,$$

puisque tous les termes de la série ci-dessus sont nuls. Par encadrement, on en déduit que $P(D) = 0$.

7) Ce résultat $P(D) = 0$ reste valable avec une urne dans laquelle on a rajouté une boule numerotée 9. Il suffit d'adapter ce qui précède en notant que maintenant x est décimal si et seulement si on ne tire plus que des boules numérotées 0 à partir d'un certain rang *ou* on ne tire plus que des boules numérotées 9 à partir d'un certain rang. En notant N'_i l'évènement « la boule numérotée 9 » sort au i^{e} tirage, et $p' = P(N'_i)$, on a

$$D = \Big(\bigcup_{n\geq1}\bigcap_{i\geq n} N_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\geq1}\bigcap_{i\geq n} N'_i\Big).$$

Comme $0 < p' < 1$, on a $P\big(\bigcup_{n\geq1}\bigcap_{i\geq n} N'_i\big) = 0$ en reprenant la démarche suivie ci-dessus avec N'_i à la place de N_i. Par sous-additivité de P on en déduit

$$0 \leq P(D) \leq P\Big(\bigcup_{n\geq1}\bigcap_{i\geq n} N_i\Big) + P\Big(\bigcup_{n\geq1}\bigcap_{i\geq n} N'_i\Big) = 0.$$