# 2009/10 : LSV 1ère année
# Outils mathématiques

J. Huebschmann

USTL, UFR de Mathématiques

59655 Villeneuve d'Ascq Cédex, France
Johannes.Huebschmann@math.univ-lille1.fr

Le 29 novembre 2009

# Contents


**1 Calcul différentiel** **4**

1.1 Fonctions . . . 4
1.2 Limites, continuité . . . 5
1.3 Dérivées . . . 8
1.4 Fonctions hyperboliques . . . 9
1.5 Fonctions réciproques . . . 10
1.5.1 Fonctions réciproques des fonctions hyperboliques . . . 10
1.5.2 Fonctions réciproques des fonctions circulaires . . . 11
1.6 Dérivées supérieures; formules de Taylor . . . 11
1.7 Convexité; points d'inflexion . . . 12
1.8 Points critiques; extrema . . . 13
1.9 Détermination pratique de limites à l'aide des dérivées . . . 13
1.10 Variations d'une fonction . . . 15
1.11 Procédé de dessiner le graphe d'une fonction . . . 15

**2 Équations différentielles** **16**

2.1 Équations différentielles du premier ordre . . . 16
2.1.1 Équations différentielles à variables séparables . . . 16
2.1.2 Équations différentielles linéaires . . . 17
2.1.3 Recherche de la solution générale de l'équation homogène . . . 18
2.1.4 Recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre non nul . . . 18
2.2 Équations différentielles linéaires du second ordre . . . 19
2.2.1 Recherche de la solution générale de l'équation homogène . . . 19
2.2.2 Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre non nul . . . 21

**3 Calcul intégral** **21**

3.1 Définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction à une variable . . . 21
3.2 Propriétés élémentaires de l'intégrale . . . 22
3.3 Primitives et intégrales . . . 22
3.4 Exemples . . . 23
3.5 Intégration par parties . . . 23
3.6 Changement de variable . . . 24
3.7 Primitives de fractions rationnelles . . . 25

**4 Fonctions à plusieurs variables** **27**

4.1 Généralités . . . 27
4.2 Dérivées partielles, dérivées suivant un vecteur . . . 27
4.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur . . . 27
4.4 Fonctions de classe $C^\ell$ et de classe $C^\infty$ . . . 28
4.5 Différentielle . . . 28
4.6 Gradient . . . 29
4.7 Matrice jacobienne . . . 29

4.8 Différentielle d'une application composée . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30
4.8.1 Cas particulier . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
4.9 Théorème de Taylor . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
4.10 Points stationnaires, extrema locaux, maximum, minimum, point selle . . . 33
4.11 Recherche de conditions pour qu'un point critique réalise un extremum, en dimension 2 seulement . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

# 1 Calcul différentiel

## 1.1 Fonctions

**Définition 1.1.** *Une fonction à valeurs réelles $f$ définie sur une partie $E$ de $\mathbb{R}$ ou, plus généralement, de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), est une loi qui fait correspondre, à chaque $x$ de $E$, un et un seul réel $y$ noté $f(x)$. Cette partie $E$ s'appelle* domaine de définition *de $f$, noté aussi $D_f$, et la partie $\{f(x); x \in D_f\}$ de $\mathbb{R}$ s'appelle* ensemble des valeurs *de $f$. La partie $\Gamma_f$ de $E \times \mathbb{R}$ constituée de tous les points $(x, f(x)$ s'appelle* graphe *de $f$.*

Il est commode d'écrire $f\colon D \to S$ pour une fonction de domaine de définition $D$ et d'ensemble de valeurs $S$; parfois on écrit alors $S = f(D)$ et on dit que $f(D)$ est l'*image* de $D$ par rapport à $f$.

Dans ce chapitre les fonctions seront souvent définies sur une partie $E$ de $\mathbb{R}$. Dans la plupart des cas, le domaine de définition sera alors un *intervalle* $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$, $[a, \infty[$, $]a, \infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$, ou une réunion d'intervalles. Un intervalle du type $[a, b]$ s'appelle *intervalle fermé*, et un intervalle du type $]a, b[$ s'appelle *intervalle ouvert*. Un point $x$ d'une partie $S$ de $\mathbb{R}$ est dit d'être un point *intérieur* de $S$ s'il existe un intervalle ouvert $J$ tel que $x \in J$ et $J \subseteq S$.

Soit $f$ une fonction et soit $a$ un point intérieur de de $D_f$, c.a.d. tel qu'il existe un intervalle ouvert $I$ avec $a \in I$ et $I \subseteq D_f$. Il est alors commode d'étudier le comportement de $f$ dans $I$. Souvent l'intervalle ouvert particulier $I$ n'est pas important et on parlera du comportement de $f$ *au voisinage du point $a$*; cela signifie qu'on étudie $f$ dans un intervalle ouvert $I \subseteq D_f$ tel que $a \in I$ mais il suffit d'étudier le comportement de $f$ dans un intervalle ouvert plus petit $J \subseteq I$ avec $a \in J$, etc.

Exemples.

- $f(x) = \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$;
- $f(x) = 1/x$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, \infty[$.

Soient $f$ et $g$ des fonctions telles que l'ensemble des valeurs de $f$ appartienne au domaine de définition $D_g$ de $g$. Alors la fonction *composée* $g \circ f$ est définie par l'identité

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

avec domaine de définition $D_{g \circ f} = D_f$. Dorenavent, chaque fois que nous utilisons la fonction composée, l'hypothèse que l'ensemble des valeurs de $f$ appartient au domaine de définition $D_g$ de $g$ sera sous-entendue.

**Définition 1.2.** *La fonction $f$ est croissante resp. strictement croissante si, quels que soient $x, y \in D_f$ tels que $x < y$, $f(x) \leq f(y)$ resp. $f(x) < f(y)$. La fonction $f$ est décroissante resp. strictement décroissante si, quels que soient $x, y \in D_f$ tels que $x < y$, $f(x) \geq f(y)$ resp. $f(x) > f(y)$.*

**Définition 1.3.** *La fonction $f$ est injective si $f(x) = f(y)$ entraîne $x = y$, quels que soient $x, y \in D_f$. La fonction $f$ est surjective sur la partie $S$ de $\mathbb{R}$ si quel que soit $y \in S$, il existe $x \in D_f$ tel que $f(x) = y$. Une fonction $f: D \to S$ qui est injective et surjective est dite bijective. Une injection resp. surjection resp. bijection est une fonction injective resp. surjective resp. bijective.*

**Proposition 1.4.** *Soit $f: D \to S$ une fonction bijective. Alors*

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

*définit une fonction unique $g: S \to D$ telle que*

$$g \circ f = \mathrm{Id}_D, \ \ f \circ g = \mathrm{Id}_S.$$

Cette fonction $g$ s'appelle fonction *réciproque* de $f$.

Exemple. L'exponentielle $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ est bijectif, et la fonction réciproque est le logarithme

$$\log: \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ce logarithme s'écrit aussi ln mais nous écrivons ici log.
Rappel. Une fonction $f$ est dite *paire* resp. *impaire* si $f(x) = f(-x)$ resp. $f(x) = -f(x)$.

## 1.2 Limites, continuité

Soit $f$ une fonction et $x_0 \in D_f$.

1. On dit que $f(x)$ *tend vers* $\ell \in \mathbb{R}$ *lorsque* $x$ *tend vers* $x_0$ et on écrit

$$\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x \in D_f \text{ et } |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Le nombre $\ell$ est alors unique et s'appele *limite* de $f$ lorsque $x$ tend vers $x_0$. Si $x_0$ n'appartient pas au domaine de définition de $f$, on écrit parfois

$$\ell = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x).$$

2. On dit que $f(x)$ *tend vers* $\ell \in \mathbb{R}$ *lorsque* $x$ *tend vers* $\infty$ resp. vers $-\infty$ et on écrit

$$\ell = \lim_{x \to \infty} f(x) \quad \text{resp.} \quad \ell = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x \in D_f \text{ et } x > \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{resp} \quad x \in D_f \text{ et } x < -\alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Le nombre $\ell$ est alors unique et s'appele *limite* de $f$ lorsque $x$ tend vers $\infty$ resp. vers $-\infty$.

3. On dit que $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ resp. vers $-\infty$ *lorsque* $x$ *tend vers* $x_0$ et on écrit

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

si, quel que soit $L > 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x \in D_f \text{ et } |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) > L \quad \text{resp.} \quad x \in D_f \text{ et } |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) < -L.$$

4. On dit que $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ resp. vers $-\infty$ *lorsque* $x$ *tend vers* $\infty$ et on écrit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

si, quel que soit $L > 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x \in D_f \text{ et } x > \alpha \Longrightarrow f(x) > L \quad \text{resp.} \quad x \in D_f \text{ et } x > \alpha \Longrightarrow f(x) < -L.$$

5. On dit que $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ resp. vers $-\infty$ *lorsque* $x$ *tend vers* $-\infty$ et on écrit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

si, quel que soit $L > 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x \in D_f \text{ et } x < -\alpha \Longrightarrow f(x) > L \quad \text{resp.} x \in D_f \text{ et } x < \alpha \Longrightarrow f(x) < -L.$$

6. De façon analogue, on définit les limites

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$$

où les cas

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \pm - \infty$$

ne sont pas exclus.

Règles utiles.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)\\
\lim_{x\to x_0} (fg)(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x)\\
\lim_{x\to x_0} \tfrac{f}{g}(x) &= \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}
\end{aligned}$$

**Théorème 1.5** (Théorème des gendarmes)**.** *Soient $f, g, h$ des fonctions sur un intervalle ouvert $I$ qui vérifient les inégalités $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $(x \in I)$, et soit $x_0$ un point de $I$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x)$ alors*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x).$$

Exemples.

1. $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
2. Puisque $0 \le |x \sin \frac{1}{x}| \le |x|$ quel que soit $x \neq 0$, il s'ensuit que $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$ existe et que
$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$
3. Quel que soit l'entier naturel $q$, pour $x > 0$
$$\mathrm{e}^x = \sum \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{q+1}}{(q+1)!}$$
d'où
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^q} = \infty.$$
4. Pour $\alpha > 0$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \log x = 0, \ \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0.$$
En effet,
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\mathrm{e}^{\alpha \log x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{\mathrm{e}^{\alpha y}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \log x = \lim_{y\to\infty} \frac{\log \frac{1}{y}}{y^\alpha} = -\lim_{y\to\infty} \frac{\log y}{y^\alpha} = 0.$$

**Définition 1.6.** *La fonction $f$ est continue au point $x_0$ de $D_f$ si*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
*La fonction $f$ est continue si elle est continue en tout point de son domaine de définition.*

**Théorème 1.7.** *Soient $f$ continue au point $x_0$ de $D_f$ et $g$ continue au point $f(x_0)$ de $D_g$. Alors la fonction composée $g \circ f$ est continue au point $x_0$ de $D_f$.*

Exemple. La fonction $h$ définie par $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est continue sur son domaine de définition.

**Théorème 1.8.** *Soit $f$ continue sur un intervalle $I$, et soient $\alpha = \inf_{x\in I} f(x)$ et $\beta = \sup_{x\in I} f(x)$. Quel que soit $y \in ]\alpha, \beta[$, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$.*

**Remarque 1.9.** *Si $f$ est continue sur l'intervalle $I$, son graphe $\Gamma_f$ est la courbe continue dans $I \times \mathbb{R}$ d'équation $y = f(x)$.*

**Théorème 1.10.** *Soit $f$ continue sur un intervalle fermé $I$. Alors $f$ atteint son maximum et minimum sur $I$. Si $\alpha = \min_{x\in I} f(x)$ et $\beta = \max_{x\in I} f(x)$, l'image $f(I)$ est l'intervalle fermé $[\alpha, \beta]$.*

**Théorème 1.11.** *Soit $f$ continue sur un intervalle $I$ et strictement croissante. Alors l'ensemble $J = f(I)$ des valeurs de $f$ est un intervalle, $f\colon I \to J$ est bijective, et la fonction réciproque de $J$ dans $I$ est également continue.*

## 1.3 Dérivées

**Définition 1.12.** *La fonction $f$ est dérivable au point $x_0$ de $D_f$ si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*existe; s'il en est ainsi, la limite est unique et s'appelle* dérivée *de $f$ en $x_0$, notée $f'(x_0)$. La fonction $f$ est dérivable si elle est dérivable en tout point de son domaine de définition.*

**Théorème 1.13.** *Si $f$ est dérivable au point $x_0$ elle est continue en ce point. Par conséquent, une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.*

**Théorème 1.14.** *Soit $f$ dérivable sur un intervalle. Si $f'(x) \geq 0$ resp. $f'(x) > 0$ en tout point de cet intervalle alors $f$ est croissante resp. strictement croissante sur cet intervalle. De même si $f'(x) \leq 0$ resp. $f'(x) < 0$ en tout point de cet intervalle alors $f$ est décroissante resp. strictement décroissante sur cet intervalle.*

**Corollaire 1.15.** *Si $f$ est dérivable sur un intervalle $I$ et si $f'(x) > 0$ pour tout point $x$ de $I$ alors $f$ réalise une bijection de $I$ sur l'intervalle $f(I)$.*

**Théorème 1.16** (Accroissements finis)**.** *Soit $f$ dérivable sur $[a, b]$. Alors il existe un point $c \in ]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \tag{1.1}$$

*En plus, si $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$,*

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a). \tag{1.2}$$

Lídentité (1.1) s'appelle *formule de Taylor à l'ordre* 1 *au voisinage de $a$ avec reste de Young*. L'inégalité (1.2) s'appelle *formule de Taylor à l'ordre* 0 *entre les points $a$ et $b$ avec reste de Lagrange*.

**Remarque 1.17.** *Les deux formules sont très différentes. La formule* (1.1) *n'est utile que très près de $a$. La formule* (1.2) *peut être appliquée entre deux points $a$ et $b$ très éloignés. Elle sert à trouver des majorations.*

**Proposition 1.18.** *Si $f$ et $g$ sont dérivables en $x$, alors il en est de même de $\lambda f + \mu g$ quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et*

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

**Théorème 1.19.** *Si $f$ est dérivable en $x$ et $g$ est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en $x$ et*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

**Corollaire 1.20.** *Soient $I$ et $J$ des intervalles et soit $f : I \to J$ strictement monotone, dérivable et surjective. Alors la fonction réciproque $g$ est dérivable en tout point $y$ tel que $f'(g(y)) \neq 0$ et*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}. \tag{1.3}$$

**Définition 1.21.** *Étant donnée la fonction $f$, une fonction $F$ telle que $F' = f$ s'appelle* primitive *de $f$.*

**Remarque 1.22.** *Soit $f$ une fonction sur l'intervalle $I$ dérivable au point intérieur $x_0$ de $I$. Alors la dérivé $f'(x_0)$ est la pente de la tangente au graphe $\Gamma_f$ de $f$, c.a.d. à la courbe $y = f(x)$, au point $(x_0, f(x_0))$. Cette tangente est donc la droite affine dans le plan $\mathbb{R}^2$ donnée par l'équation*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

## 1.4 Fonctions hyperboliques

**Définition 1.23.** *On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \textit{cosinus hyperbolique}, \\ \mathrm{sh}(x) &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \textit{sinus hyperbolique}, \\ \mathrm{th}(x) &= \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} \quad \textit{tangente hyperbolique.} \end{aligned}$$

**Proposition 1.24.**

1. *La fonction* ch *est paire.*
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{ch}(x)}{x} = \infty$
3. *La fonction* sh *est impaire.*
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \infty$
5. $$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) &= \mathrm{e}^x \\ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) &= \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) &= 1 \end{aligned}$$
6. $$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x+y) &= \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) \\ \mathrm{sh}(x+y) &= \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) \end{aligned}$$
7. *La fonction* th *est impaire.*
8. $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ *et* $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.
9. $\mathrm{ch}(x) \geq 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
10. $\mathrm{ch}(x) \geq \mathrm{sh}(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

*11.* $\mathrm{sh}(x) \geq x$ *pour tout* $x \geq 0$.

Noter les analogies avec les formules concernant les fonctions circulaires

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \end{aligned}$$

## 1.5 Fonctions réciproques

### 1.5.1 Fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

1. La fonction $\mathrm{sh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante et surjective. Elle admet donc une fonction réciproque continue et strictement croissante. Cette fonction est notée
$$\mathrm{Argsh}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

2. La fonction $\mathrm{ch}\colon [0,\infty] \to [1,\infty]$ est continue, strictement croissante, et surjective. Elle admet donc une fonction réciproque continue et strictement croissante. Cette fonction est notée
$$\mathrm{Argch}\colon [1,\infty] \longrightarrow [0,\infty]. \tag{1.5}$$

3. La fonction $\mathrm{th}\colon \mathrm{R} \to ]-1,1[$ est continue, strictement croissante, et surjective. Elle admet donc une fonction réciproque continue et strictement croissante. Cette fonction est notée
$$\mathrm{Argth}\colon ]-1,1[ \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

4. 
$$\mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$
$$\mathrm{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x > 1 \tag{1.8}$$
$$\mathrm{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2},\ |x| < 1. \tag{1.9}$$

5. 
$$\mathrm{Argsh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2}),\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$
$$\mathrm{Argch}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1}),\ x > 1 \tag{1.11}$$
$$\mathrm{Argth}(x) = \tfrac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x)),\ |x| < 1. \tag{1.12}$$

EXERCICE. Justifier ces énoncés.

### 1.5.2 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

1. La fonction $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ est continue, strictement croissante, et surjective. Elle admet donc une fonction réciproque continue et strictement croissante. Cette fonction est notée
$$\mathrm{Arcsin}\colon [-1,1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]. \tag{1.13}$$

2. La fonction $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ est continue, strictement décroissante, et surjective. Elle admet donc une fonction réciproque continue et strictement décroissante. Cette fonction est notée
$$\mathrm{Arccos}\colon [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]. \tag{1.14}$$

3. La fonction $\tan\colon ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante, et surjective. Elle admet donc une fonction réciproque continue et strictement croissante. Cette fonction est notée
$$\mathrm{Arctan}\colon \mathbb{R} \longrightarrow ]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[ \tag{1.15}$$

4.
$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1, \tag{1.16}$$
$$\mathrm{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1, \tag{1.17}$$
$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}. \tag{1.18}$$

5.
$$\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x) = \tfrac{\pi}{2},\ |x|\le 1, \tag{1.19}$$
$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\tfrac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & x<0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Exercice. Justifier ces énoncés.

## 1.6 Dérivées supérieures; formules de Taylor

**Définition 1.25.** *Si la fonction $f$ est dérivable sur un intervalle ouvert $I$, sa dérivée est une fonction définie également sur $I$. Si $f'$ à son tour est dérivable au point $x_0$ de $I$, on écrit*
$$f''(x_0) = (f')'(x_0),$$
*et on appelle ce nombre* dérivée seconde *de $f$ au point $x_0$. Plus généralement, on note $f^{(n)}(x_0)$ la dérivée, si elle existe, de la fonction $f^{(n-1)}$ au point $x_0$, on dit alors que la fonction $f$ est* dérivable à l'ordre $n$ *ou* $n$ fois dérivable *au point $x_0$, et on appelle ce nombre* $n$-ième dérivée *de $f$ au point $x_0$.*

**Théorème 1.26** (Théorème de Taylor-Young)**.** *Soient $I$ un intervalle ouvert, $a$ un point de $I$, et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction $n$ fois dérivable au point $a$. Alors il existe une fonction $\varepsilon$ avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ telle que, quel que soit $x \in I$,*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \ldots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^n\varepsilon(x). \quad (1.21)$$

L'identité (1.21) s'appelle *formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre $n$ au point $a$*, et le polynôme

$$f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \ldots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

s'appelle *polynôme de Taylor à l'ordre $n$* associé à la fonction $f$.

**Théorème 1.27** (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Soient $I$ un intervalle ouvert, $a$ un point de $I$, et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur $I$. Soit $x \in I$. Alors il existe $\vartheta$, $0 < \vartheta < 1$, tel que*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) &+ (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \ldots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \\ &+ (x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a))}{(n+1)!}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

## 1.7 Convexité; points d'inflexion

**Définition 1.28.** *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle et dérivable en tout point intérieur de $I$. Soit $x_0$ un point intérieur de $I$. On dit que la courbe $y = f(x)$ est* convexe *en $x_0$ s'il existe $\delta > 0$ tel que tous les points $(x, f(x)$ de la courbe dont les abscisses appartiennent à $]x_0-\delta, x_0-\delta[$ sont situés au-dessus de la tangente à cette courbe en $x_0$. On dit que la courbe $y = f(x)$ est* concave *en $x_0$ si la courbe $y = -f(x)$ est convexe en $x_0$. On dit qu'un point $(x_0, f(x_0))$ est un* point d'inflexion *de la courbe $y = f(x)$ si la courbe traverse sa tangente en ce point.*

En voici une méthode de détermination du sens de convexité et des points d'inflexion d'une courbe:

**Théorème 1.29.** *Soit $f$ deux fois dérivable en tout point intérieur de $I$.*

1. *Pour que la courbe $y = f(x)$ soit convexe resp. concave en tout point intérieur de $I$ il faut et il suffit que $f''(x) \geq 0$ resp. $f''(x) \leq 0$ en tout point intérieur $x$ de $I$.*

2. *Pour que le point $(x_0, f(x_0))$ soit un* point d'inflexion *de la courbe $y = f(x)$ il faut que $f''(x_0) = 0$, et il suffit que $f''(x_0) = 0$ et que $f''$ change de signe lorsque $x$ passe par $x_0$.*

Exemples.

1. La courbe $y = x^2$ est convexe.

2. L'origine est un point d'inflexion de la courbe $y = x^3$.

3. L'origine est un point d'inflexion de la courbe $y = \mathrm{sh}(x)$.

## 1.8 Points critiques; extrema

**Définition 1.30.** *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et soit $x_0$ un point intérieur de $I$. Le point $x_0$* présente un maximum local *resp.* minimum local *de $f$ s'il existe $\delta > 0$ tels que $]x_0 - \delta, x_0 - \delta[\subseteq I$ et, quel que soit $x \in ]x_0 - \delta, x_0 - \delta[$ $f(x) \leq f(x_0)$ resp. $f(x) \geq f(x_0)$. Un point qui présente ou bien un maximum local ou bien un minimum local est dit de présenter un* extremum local *de $f$.*

**Définition 1.31.** *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle et dérivable en tout point intérieur de $I$. Un point intérieur $x_0$ de $I$ tel que $f'(x_0) = 0$ est dit* critique *(pour $f$).*

**Théorème 1.32.** *Supposons que la fonction $f$ sur l'intervalle $I$ soit $n \geq 2$ fois dérivable en tout point intérieur de $I$ et soit $x_0$ un point intérieur de $I$ qui soit supposé critique. Soit $f^{(n)}$ la première dérivée supérieure de $f$ telle que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Si $n$ est pair alors $x_0$ présente un minimum local de $f$ si $f^{(n)}(x_0) > 0$ et un maximum local de $f$ si $f^{(n)}(x_0) < 0$. Si $n$ est impair, alors $x_0$ présente un point d'inflexion de $f$.*

## 1.9 Détermination pratique de limites à l'aide des dérivées

Cas $\frac{0}{0}$

**Théorème 1.33** (Règles de Bernoulli-de l'Hospital)**.** *Soit $I$ un intervalle ouvert et soit $x_0$ un point de l'intervalle fermé associé à $I$.*

1. *Soient $f$ et $g$ dérivables sur $I$ sauf peut-être en $x_0$ si $x_0$ appartient à $I$. Supposons que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, les cas $x_0 = \pm\infty$ étant admis, que les fonctions $g$ et $g'$ soient non nulles sur $I \setminus \{x_0\}$, et que*
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
*existe, les cas $x_0 = \pm\infty$ étant inclus et les possibilités $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ étant admises. Alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe et*
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. *Soit $n \geq 1$, et supposons que les dérivées $f^{(k)}$ resp. $g^{(k)}$ des fonctiones $f$ resp. $g$ existent sur l'intervalle ouvert $I$ pour $1 \leq k \leq n$ sauf que peut-être les dérivées $f^{(n)}(x_0)$ et $g^{(n)}(x_0)$ n'existent pas si $x_0$ appartient à $I$, telles que $\lim_{x\to x_0} f^{(k)}(x) = 0$ et $\lim_{x\to x_0} g^{(k)}(x) = 0$ pour $1 \leq k < n$, les cas $x_0 = \pm\infty$ étant admis. Supposons que les fonctions $g^{(j)}$ $(0 \leq j \leq n)$ soient non nulles sur $I \setminus \{x_0\}$ et que*
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

*existe, les cas* $x_0 = \pm\infty$ *étant inclus et les possibilités* $\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \pm\infty$ *étant admises. Alors* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe et*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Cas $\frac{\infty}{\infty}$

**Théorème 1.34** (Règles de Bernoulli-de l'Hospital)**.** *1. Soient* $f$ *et* $g$ *dérivables sur l'intervalle ouvert* $I$ *et* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$*, les cas* $x_0 = \pm\infty$ *étant admis. Supposons que*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*existe, les cas* $x_0 = \pm\infty$ *étant inclus et les possibilités* $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ *étant admises. Alors* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe et*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*2. Soit* $n \geq 1$*, et supposons que les dérivées* $f^{(k)}$ *resp.* $g^{(k)}$ *des fonctiones* $f$ *resp.* $g$ *existent sur l'intervalle ouvert* $I$ *pour* $1 \leq k \leq n$ *telles que* $\lim_{x\to x_0} g^{(k)}(x) = \infty$ *pour* $1 \leq k < n$*, les cas* $x_0 = \pm\infty$ *étant admis. Supposons que*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

*existe, les cas* $x_0 = \pm\infty$ *étant inclus et les possibilités* $\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \pm\infty$ *étant admises. Alors* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe et*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Cas $0 \cdot \infty$ : Soient $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ sur l'intervalle $I$. À l'aide de l'identité

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \tag{1.23}$$

on traite ce cas comme le cas $\frac{0}{0}$ resp. $\frac{\infty}{\infty}$ où, dans le deuxième cas, il faut supposer $f(x) > 0$ sur $I$.

Exemples.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)''}{(x - \log(1+x))''} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\frac{1}{1+x^2}} = 2$
3. Soit $\alpha > 0$; alors $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$

## 1.10 Variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction $f$ sur un intervalle $I$ :

- Dériver la fonction $f$ .
- Factoriser si possible la dérivée $f'$ afin de l'exprimer sous la forme d'un produit ou d'un quotient d'expressions du premier ou du second degré.
- Étudier le signe de chaque terme de $f'$ sur l'intervalle $I$. En déduire le signe de $f'$ à l'aide d'un tableau de signes.
- Dresser le tableau de variations de $f$ sur $I$ en utilisant la propriété (P) suivante :

(P): La fonction $f$ étant dérivable sur $I$, pour tout intervalle $J$ inclus dans $I$ :

- Si $f'(x) > 0$, pour tout $x$ de $J$, alors $f$ est strictement croissante sur $J$, symbolisé par une flèche $\nearrow$ dans le tableau de variations.
- Si $f'(x) < 0$, pour tout $x$ de $J$, alors $f$ est strictement décroissante sur $J$, symbolisé par une flèche $\searrow$ dans le tableau de variations.
- Si $f'(x) = 0$, pour tout x de $J$, alors $f$ est constante sur $J$, symbolisé par une flèche $\longrightarrow$ dans le tableau de variations.

**Remarque 1.35.** *On utilise généralement un seul tableau pour l'étude du signe de la dérivée et les variations de $f$.*

## 1.11 Procédé de dessiner le graphe d'une fonction

Pour faire un dessin du graphe d'une fonction $f$ :

- Déterminer les symétries de $f$ eventuelles; la fonction $f$ est-elle paire ou impaire?
- Localiser les points éventuels où la fonction n'est pas définie et déterminer le comportement de $f$ au voisinage de chacun de ces points. Déterminer également le comportement de $f$ quand l'argument $x$ tend vers $\infty$ et vers $-\infty$.
- Localiser les maxima et minima locaux de $f$ et déterminer les intervalles où $f$ est croissante et ceux où $f$ est décroissante.

- Localiser les points d'inflexion et déterminer les intervalles où $f$ est convexe et ceux où $f$ est concave.
- Tracer encore quelques points clé, par exemple les points d'intersection avec l'axe des abscisses et les points d'intersection avec l'axe des ordonnées, et dessiner une petite flèche tangente en chacun des ces points.
- Remplir le graphe de façon cohérente avec l'information recueillie dans les étapes précédentes.

# 2 Équations différentielles

## 2.1 Équations différentielles du premier ordre

**Définition 2.1.** *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ le produit $U = J_1 \times J_2$ de deux intervalles ouverts $J_1$ et $J_2$ et soit $f \colon U \to \mathbb{R}$ une fonction. Une équation du type*

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

*s'appelle* équation différentielle du premier ordre*. On appelle* solution *de* (2.1) *toute fonction $\varphi$ définie et dérivable sur un intervalle $I$ telle que*

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

*Résoudre* ou *intégrer* (2.1), c'est trouver toutes ses solutions. Soit $(x_0, y_0)$ un point de $U$. *Chercher une solution qui vérifie les conditions initiales* $(x_0, y_0)$ c'est chercher une solution $y = \varphi(x)$ de (2.1) telle que $\varphi(x_0) = y_0$.

Interprétation géométrique: Les graphes des solutions de (2.1) s'appellent *courbes intégrales* de (2.1).

### 2.1.1 Équations différentielles à variables séparables

**Définition 2.2.** *Une équation différentielle à variables séparables est une équation différentielle*

$$y' = f(x, y) \tag{2.2}$$

*qui se ramène à la forme*

$$y'g(y) = h(x) \tag{2.3}$$

*où $g$ et $h$ sont des fonctions continues définies sur un intervalle $I$.*

Exemple.

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{y} \\ y'y &= -x \end{aligned}$$

La terminologie est justifiée par le fait que si l'on note $y' = \frac{dy}{dx}$, on a

$$g(y)dy = h(x)dx \tag{2.4}$$

Méthode d'intégration. Soient $G$ une primitive de $g$ sur $I$ et $H$ une primitive de $h$ sur $I$. Alors

$$G(y(x))' = G'(y(x))y'(x) = g(y(x))y'(x) = h(x)$$

et l'équation (2.3) s'écrit

$$G(y(x))' = H'(x).$$

La résolution de (2.3) se ramène donc à la recherche des fonctions

$$x \longmapsto y(x)$$

qui vérifient

$$G(y(x)) = H(x) + k. \tag{2.5}$$

Ceci s'écrit encore

$$\int g(y)dy = \int h(x)dx. \tag{2.6}$$

Illustration.

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{y} \\ ydy &= -xdx \\ \int ydy &= -\int xdx \\ y^2 &= -x^2 + K \\ y^2 + x^2 &= K \end{aligned}$$

Les courbes intégrales sont des cercles de centre $O$ et de rayon $\sqrt{K}$. La solution qui vérifie la condition initiale $(0, 1)$ est le cercle d'équation $y^2 + x^2 = 1$.

### 2.1.2 Équations différentielles linéaires

Soit $I$ un intervalle.

**Définition 2.3.** *Une* équation différentielle linéaire *est une équation différentielle*

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{2.7}$$

*où $a$ et $b$ sont des fonctions continues définies sur l'intervalle $I$. Si $b$ est identiquement nulle, l'équation*

$$y' = a(x)y \tag{2.8}$$

*est dite* homogène *ou* sans second membre*.*

**Théorème 2.4.** *Si $y_0$ est une solution particulière de* (2.7) *alors la solution générale de* (2.7) *est*

$$y = y_0 + z$$

*où $z$ est la solution générale de l'équation homogène* (2.8)*. Autrement dit: On obtient la solution générale de* (2.7) *en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène* (2.8) *une solution particulière de* (2.7)*.*

### 2.1.3 Recherche de la solution générale de l'équation homogène

**Théorème 2.5.** *Soit $A$ une primitive de $a$ sur $I$. Pour que $y$ soit solution de (2.8) il faut et il suffit que $y$ s'écrive sous la forme*

$$y = C\mathrm{e}^{A(x)},\ C \text{ une constante.} \tag{2.9}$$

**Remarque 2.6.** *Une solution de (2.8) est ou identiquement nulle sur $I$ ($C = 0$) ou ne s'annule jamais sur $I$.*

Exemples

- $y' = xy$, $I = \mathbb{R}$. La fonction $y = 0$ est solution. Cherchons les autres solutions:

  $$\frac{y'}{y} = x,\ y \neq 0$$
  $$\log|y| = \frac{x^2}{2} + C.$$

  Les solutions $y$ sur $I = \mathbb{R}$ s'écrivent donc $y = K\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ où $K > 0$, $K = 0$, ou $K < 0$. Ainsi la solution particulière qui passe par $(x_0, y_0) = (0, 1)$ est la fonction $y = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ ($K = 1$).

- $y' = \frac{y}{x}$, d'où $a(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On étudie l'équation

  $$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

  séparément sur $I_1 = ]-\infty, 0[$ et sur $I_2 = ]0, \infty[$. La fonction $y = 0$ est solution dans les deux cas. Cherchons les solutions autres que $y = 0$.

  $$\text{Sur } I_1:\ \log\left|\frac{y}{K}\right| = \log(-x)$$
  $$\text{sur } I_2:\ \log\left|\frac{y}{K}\right| = \log x$$

  Une solution $y$ quelconque sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ s'écrit donc

  $$y = K_1 x \text{ pour } x > 0,\ y = K_2 x \text{ pour } x < 0, K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

### 2.1.4 Recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre non nul

Cherchons une solution particulière de (2.7) sous la forme

$$y(x) = C(x)\mathrm{e}^{A(x)}. \tag{2.10}$$

Cette méthode s'appelle *variation de la constante*. Alors

$$y'(x) = C'(x)\mathrm{e}^{A(x)} + C(x)a(x)\mathrm{e}^{A(x)}$$

d'où
$$C'(x)\mathrm{e}^{A(x)} + C(x)a(x)\mathrm{e}^{A(x)} = a(x)C(x)\mathrm{e}^{A(x)} + b(x)$$
ou bien
$$C'(x)\mathrm{e}^{A(x)} = b(x) \tag{2.11}$$
et donc
$$C(x) = \int b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}dt. \tag{2.12}$$
Par conséquent:

**Théorème 2.7.** *Pour que* (2.10) *soit solution particulière de* (2.7) *il faut et il suffit que* $C(x)$ *soit une primitive de la fonction* $b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$.

## 2.2 Équations différentielles linéaires du second ordre

Soit $I$ un intervalle.

**Définition 2.8.** *Une* équation différentielle linéaire du second ordre *(avec coefficients constants) est une équation différentielle*
$$y'' + 2ay' + by = \beta \tag{2.13}$$
*où $a$ et $b$ sont des* constantes *et $\beta$ une fonction définie sur l'intervalle $I$. Si $\beta$ est indentiquement nulle l'équation*
$$y'' + 2ay' + by = 0 \tag{2.14}$$
*est dite* homogène *ou* sans second membre.

**Théorème 2.9.** *On obtient la solution générale de* (2.13) *en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène* (2.14) *une solution particulière de* (2.13).

### 2.2.1 Recherche de la solution générale de l'équation homogène

**Théorème 2.10.** *Si $y_1$ et $y_2$ sont solutions de* (2.14), *quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il en est de même de $\lambda y_1 + \mu y_2$. Autrement dit: Les solutions de* (2.14) *forment un espace vectoriel.*

**Théorème 2.11.** *Si $y_1$ et $y_2$ sont deux solutions non proportionnelles de* (2.14), *alors la solution générale de* (2.14) *est de la forme $y = \lambda y_1 + \mu y_2$. Autrement dit: L'espace vectoriel des solutions de* (2.14) *est de dimension 2.*

On est donc amené à chercher deux solutions de (2.14) non proportionnelles. Cherchons ces solutions sous la forme
$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}. \tag{2.15}$$
Alors
$$y'(x) = \lambda\mathrm{e}^{\lambda x}$$
$$y''(x) = \lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}$$

d'où, pour que (2.15) soit solution de (2.14) il faut et il suffit que

$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + 2a\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + b\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$$

c.a.d.

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0. \tag{2.16}$$

L'équation (2.16) s'appelle *équation caractéristique* de (2.14). Notons $\Delta = a^2 - b$. Trois cas sont à étudier:

1. $\Delta = a^2 - b > 0$: Alors l'équation caractéristique (2.16) a les deux solutions réelles distinctes $\lambda_{1/2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$, et

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x},\ y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \tag{2.17}$$

sont deux solutions non proportionnelles de (2.14). La solution générale de (2.14) est dans ce cas

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \mu \mathrm{e}^{\lambda_2 x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

2. $\Delta = a^2 - b = 0$: Alors l'équation caractéristique (2.16) n'a qu'une solution $\lambda = -a$. Ainsi on n'a qu'une seule solution $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ de (2.14), et il en faut une deuxième non proportionnelle à $y_1$. On vérifie que dans ce cas $y_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}$ est solution de (2.14), et $y_2$ n'est pas proportionnelle à $y_1$. La solution générale de (2.14) est dans ce cas

$$y(x) = (\lambda + \mu x)\mathrm{e}^{\lambda x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

3. $\Delta = a^2 - b < 0$: Alors l'équation caractéristique (2.16) n'a pas de solution réelle; elle a deux solutions distinctes complexes conjuguées

$$\lambda_{1/2} = -a \pm i\omega,\ \omega = \sqrt{b - a^2} \tag{2.20}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} &= \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{i\omega x} = \mathrm{e}^{-ax}(\cos\omega x + i\sin\omega x) \\ \mathrm{e}^{\lambda_2 x} &= \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-i\omega x} = \mathrm{e}^{-ax}(\cos\omega x - i\sin\omega x) \end{aligned}$$

sont deux solutions complexes non proportionnelles de (2.14). Alors

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \mathrm{e}^{-ax}\cos\omega x \\ y_2(x) &= \mathrm{e}^{-ax}\sin\omega x \end{aligned} \tag{2.21}$$

sont deux solutions réelles non proportionnelles de (2.14). La solution générale de (2.14) est dans ce cas

$$y(x) = \mathrm{e}^{-ax}(\lambda\cos\omega x + \mu\sin\omega x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

### 2.2.2 Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre non nul

La méthode de variation de la constante conduit ici à la procedure suivante: Si $a^2 \neq b$ une solution particulière $y$ de (2.13) est donnée par

$$y(x) = c_1(x)\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2(x)\mathrm{e}^{\lambda_2 x} \tag{2.23}$$

où les fonctions $c_1$ et $c_2$ sont solution de l'équation différentielle vectorielle

$$\begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \frac{-\mathrm{e}^{2ax}\beta(x)}{2\sqrt{a^2-b}} \begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{x\lambda_2} \\ \mathrm{e}^{x\lambda_1} \end{bmatrix}.$$

De même, si $a^2 = b$, une solution particulière $y$ de (2.13) est donnée par

$$y(x) = \left(c_1(x) + xc_2(x)\right)\mathrm{e}^{-ax} \tag{2.24}$$

où les fonctions $c_1$ et $c_2$ sont solutions de l'équation différentielle vectorielle

$$\begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{ax}\beta(x) \begin{bmatrix} -x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

# 3 Calcul intégral

## 3.1 Définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction à une variable

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Une *subdivision* de $[a,b]$ en $n$ intervalles, notée $\sigma_n$, est une suite $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Appelons *pas* de $\sigma_n$ la plus grande des longueurs $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $x_n - x_{n-1}$, que nous notons

$$\delta_n = \max_{0 \le k \le n-1} (x_{k+1} - x_k).$$

A chaque subdivision $\sigma_n$ nous associons la somme

$$\mathcal{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

**Théorème 3.1.** *Si* $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$*, alors* $\mathcal{S}_n$ *tend vers une limite finite indépendante de la suite de subdivisions utilisée.*

**Définition 3.2.** *Cette limite est appelée* intégrale (de Riemann) *de* $f$ *sur l'intervalle* $[a,b]$*, notée* $\int_a^b f(x)dx$*.*

Convention: On pose $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ et $\int_c^c f(x)dx = 0$.

## 3.2 Propriétés élémentaires de l'intégrale

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx \tag{3.1}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{Chasles} \tag{3.2}$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \text{ si } f(x) \leq g(x),\ x \in [a, b]. \tag{3.3}$$

## 3.3 Primitives et intégrales

Rappelons qu'une *primitive* d'une fonction $f$ est une fonction $F$ telle que $F' = f$.

**Proposition 3.3.** *S'il existe une primitive $F$ d'une fonction $f$ sur l'intervalle $I$ alors une primitive de $f$ quelconque est de la forme $F + K$ où $k$ est une constante.*

**Théorème 3.4.** *Soient $f$ continue sur l'intervalle $I$ et $a \in I$. Posons*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

*La fonction $F$ ainsi définie est dérivable sur $I$ de telle sorte que $F' = f$, c.a.d. $F$ est une primitive de $f$.*

**Corollaire 3.5.** *Soit $f$ continue sur $I$ et soient $a, b \in I$. Si $G$ est une primitive quelconque de $f$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a). \text{ (Formule fondamentale)}$$

Notation. Soit $f$ continue sur l'intervalle $I$. On représente par le symbole

$$\int f(x)dx$$

une quelconque des primitives de $f$ sur $I$.
N.B.: Ce symbole représente une fonction. Ne pas confondre avec $\int_a^b f(x)dx$ ce qui est un nombre!

## 3.4 Exemples

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1 \tag{3.4}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x|,\ x>0 \text{ ou } x<0, \tag{3.5}$$

$$\int \frac{u'dx}{u} = \log|u| \text{ sur tout intervalle où } u \text{ ne s'annule pas} \tag{3.6}$$

$$\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x \tag{3.7}$$

$$\int \cos x dx = \sin x \tag{3.8}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x \tag{3.9}$$

$$\int \mathrm{sh}(x) dx = \mathrm{ch}(x) \tag{3.10}$$

$$\int \mathrm{ch}(x) dx = \mathrm{sh}(x) \tag{3.11}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}(x),\ -1<x<1 \tag{3.12}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{Arctg}(x) \tag{3.13}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{Argsh}(x) \tag{3.14}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{Argch}(x) \quad (= \log(x+\sqrt{x^2-1})),\ x>1 \tag{3.15}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{Argth}(x) \quad (= \tfrac{1}{2}\log(\tfrac{1+x}{1-x})),\ -1<x<1 \tag{3.16}$$

## 3.5 Intégration par parties

**Théorème 3.6.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues admettant une dérivée continue sur un intervalle $I$.Alors*

$$\int fg'dx = fg - \int f'gdx \tag{3.17}$$

Exemples

$$\int \log x\,dx = x\log x - x \tag{3.18}$$

$$\int x\mathrm{e}^x\,dx = (x-1)\mathrm{e}^x \tag{3.19}$$

$$\int x^2\mathrm{e}^x\,dx = (x^2-2x+2)\mathrm{e}^x \tag{3.20}$$

$$\int \mathrm{e}^x\cos x\,dx = \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\sin x\,dx \tag{3.21}$$

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\,dx = -\mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x\cos x\,dx \tag{3.22}$$

$$\int \mathrm{e}^x\cos x\,dx = \mathrm{e}^x\,\tfrac{\sin x+\cos x}{2} \tag{3.23}$$

## 3.6 Changement de variable

**Théorème 3.7.** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$,et soit $\varphi\colon J\to I$ une fonction admettant une dérivée continue sur un intervalle $J$, et soit $a\in J$. Alors, pour une constante $C$ convenable,*

$$\int_a^x (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,dt = (F\circ\varphi)(x)+C. \tag{3.24}$$

*Si, de plus, $\varphi$ est bijective de telle sorte que la réciproque $\psi=\varphi^{-1}$ soit continue, alors*

$$F(y)+C = \int_a^{\psi(y)} (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,dt. \tag{3.25}$$

Exemples

- $\int \sin^2 t\cos t\,dt = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ avec $f(x)=x^2$ et $x=\varphi(t)=\sin t$. Puisque $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$, il résulte
$$\int \sin^2 t\cos t\,dt = \frac{\sin^3 t}{3}$$
- $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$. On pose $x^2=u$ d'où $x\,dx = \frac{1}{2}du$ et
$$\tfrac{1}{2}\int du 1+u = \tfrac{1}{2}\log|u|$$
$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\log(1+x^2)$$
- $\int \frac{dx}{\sin x}$, où $0<x<\pi$. On pose $t=\tan\frac{x}{2}$ c.a.d. $\frac{x}{2}=\operatorname{Arctg} t$. Avec $\frac{1}{2}\,dx = \frac{dt}{1+t^2}\,t$ et $\sin x = \frac{2t}{1-t^2}$ il s'ensuit que
$$\int \frac{2dt}{(1+t^2)\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \log|t|$$
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log|\tan\tfrac{x}{2}|$$

## 3.7 Primitives de fractions rationnelles

**Définition 3.8.** *Une* fraction rationnelle *est une fonction $f$ qui s'écrit comme quotient*

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n}{B_0 + B_1x + \ldots + B_px^p}, \; A_j, B_j \in \mathbb{R}, \; B_p \neq 0, \tag{3.26}$$

*de deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$.*

On sait intégrer toutes les fractions rationnelles sur des intervalles où le dénominateur ne s'annule pas.

**Premier cas:** le degré du dénominateur $p \leq 2$. En effectuant une division euclidienne on se ramène à

$$f(x) = P(x) + \frac{A_0 + A_1x}{B_0 + B_1x + B_2x^2}, \tag{3.27}$$

où $P$ est un polynôme. On est donc ramené à chercher une primitive de $\frac{A_0+A_1x}{B_0+B_1x+B_2x^2}$. Si $B_2 = 0$, il existent deux réels uniques $c$ et $d$ tels que

$$\frac{A_0 + A_1x}{B_0 + B_1x} = c + \frac{d}{B_0 + B_1x}.$$

Supposons donc $B_2 \neq 0$. Alors

$$f(x) = P(x) + \frac{A_0 + A_1x}{B_0 + B_1x + B_2x^2} = P(x) + \frac{\alpha_0 + \alpha_1x}{\beta_0 + \beta_1x + x^2}. \tag{3.28}$$

Trois sous-cas sont possibles:

1. Le dénominateur a deux racines réelles distinctes. Alors

$$\begin{aligned} \beta_0 + \beta_1x + x^2 &= (x-u)(x-v), \; u \neq v \\ \frac{\alpha_0 + \alpha_1x}{\beta_0 + \beta_1x + x^2} &= \frac{a}{x-u} + \frac{b}{x-v} \end{aligned}$$

   pour des réels uniques $a$ et $b$.

2. Le dénominateur a une racine réelle double. Alors

$$\begin{aligned} \beta_0 + \beta_1x + x^2 &= (x-u)^2 \\ \frac{\alpha_0 + \alpha_1x}{\beta_0 + \beta_1x + x^2} &= \frac{a}{(x-u)^2} + \frac{b}{x-u} \end{aligned}$$

   pour des réels uniques $a$ et $b$.

3. Le dénominateur a deux racines complexes conjuguées. Alors on utilise l'identité

$$\frac{Bx + D}{(x-b)^2 + c^2} = \frac{B}{2}\frac{2x - 2b}{(x-b)^2 + c^2} + (D + Bb)\frac{1}{(x-b)^2 + c^2}.$$

**Deuxième cas:** le degré du dénominateur $p > 2$. Effectuons une division euclidienne

$$\begin{aligned} A(x) &= B(x)q(x) + R(x) \\ f(x) &= q(x) + \frac{R(x)}{B(x)} \end{aligned}$$

où $\deg(R(x)) < \deg(B(x))$ et cherchons les zéros de $B(x)$. Notons

- $a_h$, $1 \le h \le m$, les zéros réels de $B(x)$,
- $\nu_h$, $1 \le h \le m$, leur ordre de multiplicité,
- $b_k \pm ic_k$, $1 \le k \le \ell$, les zéros complexes conjuguées de $B(x)$,
- $\mu_k$, $1 \le k \le \ell$, leur ordre de multiplicité.

Ainsi

$$\begin{aligned} B(x) &= \prod_{h=1}^{m}(x-a_h)^{\nu_h} \prod_{k+1}^{\ell}\left((x-b_k)^2 + c_k^2\right)^{\mu_k} \\ f(x) &= q(x) + \sum_{h=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_h} \frac{A_{hj}}{(x-a_h)^j} + \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\rho=1}^{\mu_k} \frac{B_{k\rho}x + D_{k\rho}}{((x-b_k)^2 + c_k^2)^{\rho}} \end{aligned}$$

pour des réels uniques $A_{hj}$, $B_{k\rho}$, $D_{k\rho}$.

On est ainsi ramené à ce que l'on appelle éléments simples. En voici les intégrales des éléments simples:

$$\int \frac{1}{(x-a)^m} = \begin{cases} \log|x-a|, & m=1, \\ -\frac{1}{m-1}\frac{1}{(x-a)^{m-1}}, & m>1, \end{cases} \text{ sur } ]-\infty, a[\cup]a, \infty[ \tag{3.29}$$

$$\frac{Bx+D}{((x-b)^2+c^2)^{\ell}} = \frac{B}{2}\frac{2(x-b)}{((x-b)^2+c^2)^{\ell}} + (D+Bb)\frac{1}{((x-b)^2+c^2)^{\ell}} \tag{3.30}$$

$$u = (x-b)^2 + c^2\colon\ du = 2(x-b)dx \tag{3.31}$$

$$\int \frac{2(x-b)dx}{((x-b)^2+c^2)^{\ell}} = \int \frac{du}{u^{\ell}} = \begin{cases} \log((x-b)^2+c^2), & \ell = 1 \\ -\frac{1}{l-1}\frac{1}{((x-b)^2+c^2)^{\ell-1}}, & \ell > 1 \end{cases} \tag{3.32}$$

$$u = \frac{x-b}{c}\colon\ cdu = dx \tag{3.33}$$

$$\int \frac{dx}{((x-b)^2+c^2)^{\ell}} = \frac{1}{c^{2\ell}} \int \frac{dx}{((\frac{x-b}{c})^2+1)^{\ell}} \tag{3.34}$$

$$= \frac{1}{c^{2\ell}} \int \frac{cdu}{(u^2+1)^{\ell}} = \frac{1}{c^{2\ell-1}} \int \frac{du}{(u^2+1)^{\ell}} \tag{3.35}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+1)^{\ell}} = \begin{cases} \mathrm{Arctg}(u), & \ell = 1 \\ \frac{u}{2(l-1)(u^2+1)^{\ell-1}} + \frac{2\ell-3}{2(\ell-1)} \int \frac{du}{(u^2+1)^{\ell-1}}, & \ell > 1. \end{cases} \tag{3.36}$$

# 4 Fonctions à plusieurs variables

## 4.1 Généralités

**Définition 4.1.** *Une partie* $\Omega$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est* ouverte *si, quel que soit le point* $a$ *de* $\Omega$*, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que la* boule $B_\varepsilon(a)$ *de rayon* $\varepsilon$ *centrée en* $a$ *soit dans* $\Omega$.

## 4.2 Dérivées partielles, dérivées suivant un vecteur

Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ définie dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, et soit $a \in \Omega$.

**Définition 4.2.** *Soit* $X \in \mathbb{R}^n$ *un vecteur. On appelle* dérivée de $f$ suivant le vecteur $X$ *au point* $a \in \Omega$ *la dérivée* $g'(t)$ *(si elle existe) de la fonction réelle*

$$g\colon t \longmapsto f(a + tX).$$

*Cette dérivée est notée*

$$(D_X f)(a).$$

D'après la définition ordinaire de la dérivée d'une fonction d'une variable réelle, on a

$$(D_X f)(a) = \lim_{s\to 0} \frac{f(a + sX) - f(a)}{s}.$$

**Définition 4.3.** *On appelle* dérivée partielle de $f$ *par rapport à la* $k$*-ème variable au point* $a \in \Omega$ *la dérivée* $(D_{e_k} f)(a)$ *suivant le* $k$*-ième vecteur* $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ *de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$*. Cette dérivée est notée*

$$(D_k f)(a) \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

*et, avec la notation* $a = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$*, on a*

$$\begin{aligned}(D_k f)(a) &= \lim_{x\to a_k} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a)}{x - a_k} &(4.1)\\ &= \lim_{s\to 0} \frac{f(a + se_k) - f(a)}{s}. &(4.2)\end{aligned}$$

## 4.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

**Définition 4.4.** *Les* dérivées partielles d'ordre quelconque *(si elles existent) d'une fonction* $f$ *sont définies par les relations de récurrence*

$$D_{i_1\dots i_\ell} f = D_{i_1} \dots D_{i_\ell} f = \frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\ell}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left( \frac{\partial^{\ell-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\ell}} \right).$$

Il peut exister à priori $n^\ell$ dérivées partielles d'ordre $\ell$ au point $a$.

Exemple. On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim_{y\to 0} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = x\\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -y\end{aligned} \tag{4.3}$$

d'où $D_{2,1}f(0,0) = -D_{1,2}f(0,0) \neq 0$.

**Théorème 4.5.** *Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ admet les dérivées partielles $D_kf$, $D_jf$, $D_kD_jf$, et $D_jD_kf$ dans $\Omega$. Si $D_kD_jf$ et $D_jD_kf$ sont continues en $a \in \Omega$ on a*

$$D_jD_kf(a) = D_kD_jf(a).$$

## 4.4 Fonctions de classe $C^\ell$ et de classe $C^\infty$

**Définition 4.6.** *On dit qu'une fonction numérique $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, définie dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, est* de classe $C^\ell$, *si chacune de ses dérivées partielles $D_{i_1}\dots D_{i_\ell}f$ d'ordre $\ell$ existe et est continue dans $\Omega$; par définition, une fonction* de classe $C^0$ *est une fonction continue. On note $C^\ell(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $C^\ell$ dans $\Omega$. On écrit*

$$C^\infty(\Omega) = \cap_\ell C^\ell(\Omega).$$

*Une fonction dans $C^\infty(\Omega)$ est dite* de classe $C^\infty$ *(dans $\Omega$). Plus généralement, une application $f = (f_1,\dots,f_p)\colon \Omega \to \mathbb{R}^p$, définie dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, est dite* de classe $C^\ell$ *$(0 \le \ell \le \infty)$, si chacune de ses composantes l'est.*

**Théorème 4.7.** *Une fonction rationelle quelconque $f$ de $n$ variables réelles (en particulier une fonction polynômiale quelconque) est de classe $C^\infty$ dans son domaine de définition. Plus précisemment: Soit $f = \sum_{k=1}^{k=m}\frac{g_k}{h_k}$, et soit la partie $F \subseteq \mathbb{R}^n$ définie par*

$$F = \{(x_1,\dots,x_n); h_k(x_1,\dots,x_n) = 0 \ pour \ \ 1 \le k \le m\}.$$

*Alors $f$ est de classe $C^\infty$ dans $\mathbb{R}^n \setminus F$.*

Exemple. La fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

n'est pas de classe $C^1$ au voisinage de l'origine. Cependant, à l'origine, quel que soit le vecteur non nul, $f$ admet une dérivée suivant ce vecteur.

## 4.5 Différentielle

On désigne par $dx_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la $j$-ème projection canonique.

**Définition 4.8.** *Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, définie dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, de classe $C^1$. La* différentielle *de $f$ au point $a$ est la forme linéaire*

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i \tag{4.4}$$

*La* différentielle *de $f$ sur $\Omega$ est l'application*

$$f' = df\colon \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),\ a \longmapsto df(a).$$

## 4.6 Gradient

A l'aide du produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on définit le *gradient* $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ de $f$ en $a$ par la relation

$$\langle \nabla f(a), y \rangle = df_a(y), \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Si $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $C^1$, son *gradient* $\nabla f$ est la fonction vectorielle $\nabla f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui fait correspondre $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ à $x \in \Omega$. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est standard (c.a.d. $\langle u, v \rangle = \sum u_j v_j$), en coordonnées on a alors la formule habituelle suivante:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

## 4.7 Matrice jacobienne

Soient $e_1, \dots, e_n$ et $e'_1, \dots, e'_p$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ respectivement $\mathbb{R}^p$, et soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $f = (f_1, \dots, f_p)\colon U \to \mathbb{R}^p$ est de classe $C^1$, l'application linéaire $f'(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est déterminée par la donnée de sa matrice dans les bases $e_1, \dots, e_n$ et $e'_1, \dots, e'_p$. On dit que cette matrice est la *matrice jacobienne* de $f$ au point $a$ (dans les bases considérées), notée $J(f, a)$. On a alors

$$f'(a) = J(f,a) = \begin{bmatrix} df_1(a) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ df_p(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ D_1 f_p(a) & \cdots & D_n f_p(a) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$= (D_1 f(a), \dots, D_n f(a))\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \tag{4.7}$$

Si $n = p$ le déterminant

$$\text{dét}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right] = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}$$

de la matrice jacobienne est appelé *jacobien* de l'application $f$ au point $a$. Le jacobien est souvent désigné par

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a).$$

Exemple: Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application $f(r, \vartheta) = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$. Au point $(r, \vartheta)$, sa matrice jacobienne et son jacobien dans les bases canoniques sont

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad \frac{D(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)}{D(r, \vartheta)} = r.$$

## 4.8 Différentielle d'une application composée

**Théorème 4.9.** *Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{R}^p$ des ouverts. Si $f\colon U \to \mathbb{R}^p$ est de classe $C^1$ et si $g\colon V \to \mathbb{R}^q$ est de classe $C^1$, alors $h = g \circ f\colon U \to \mathbb{R}^q$ est de classe $C^1$ et sa différentielle est le composé des différentielles de $f$ et $g$, soit*

$$dh(a) = dg(b) \circ df(a)\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{df(a)} \mathbb{R}^p \xrightarrow{dg(b)} \mathbb{R}^q.$$

**Corollaire 4.10.** *Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{R}^p$ des parties ouvertes. Si $f = (f_1, \ldots, f_p)\colon U \to \mathbb{R}^p$ et $g = (g_1, \ldots, g_q)\colon V \to \mathbb{R}^q$ sont de classe $C^1$, et si $f(U) \subseteq V$, alors le composé*

$$h = (h_1, \ldots, h_q) = g \circ f = (g_1 \circ f, \ldots, g_q \circ f)\colon U \to \mathbb{R}^q$$

*est de classe $C^1$ et, quel que soit $a \in U$, la différentielle*

$$dh(a) = \begin{bmatrix} dh_1(a) \\ . \\ . \\ . \\ dh_q(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1h_1(a) & \cdots & D_nh_1(a) \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ D_1h_q(a) & \cdots & D_nh_q(a) \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$$= (D_1h(a), \ldots, D_nh(a))\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q \tag{4.9}$$

*est le composé*

$$dh(a) = dg(fa) \circ df(a)\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{df(a)} \mathbb{R}^p \xrightarrow{dg(b)} \mathbb{R}^q.$$

*C. a. d.*

$$\begin{bmatrix} D_1h_1(a) & \cdots & D_nh_1(a) \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ D_1h_q(a) & \cdots & D_nh_q(a) \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$= \begin{bmatrix} D_1g_1(fa) & \cdots & D_pg_1(fa) \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ D_1g_q(fa) & \cdots & D_pg_q(fa) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1f_1(a) & \cdots & D_nf_1(a) \\ . & \cdots & . \\ \\ . & \cdots & . \\ \\ . & \cdots & . \\ D_1f_p(a) & \cdots & D_nf_p(a) \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

*où*

$$df(a) = \begin{bmatrix} df_1(a) \\ . \\ . \\ . \\ df_p(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1f_1(a) & \cdots & D_nf_1(a) \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ D_1f_p(a) & \cdots & D_nf_p(a) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

$$= (D_1f(a), \ldots, D_nf(a)) \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \tag{4.13}$$

*et*

$$dg(fa) = \begin{bmatrix} dg_1(fa) \\ . \\ . \\ . \\ dg_q(fa) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1g_1(fa) & \cdots & D_pg_1(fa) \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ D_1g_q(fa) & \cdots & D_pg_q(fa) \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

$$= (D_1g(fa), \ldots, D_qg(fa)) \colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q \tag{4.15}$$

*sont les différentielles de $f$ resp. $g$. En particulier, quels que soient $1 \le j \le n$ et $1 \le i \le q$, on a*

$$(D_jh_i)(a) = \sum_{k=1}^{p} (D_kg_i)(fa) \cdot (D_jf_k)(a),$$

*soit, avec coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_p)$, $(z_1, \ldots, z_q)$, telles que*

$$y_k = f_k(x) = f_k(x_1, \ldots, x_n),\ 1 \le k \le p, \quad z_i = g_i(y) = g_i(y_1, \ldots, y_p),\ 1 \le i \le q,$$

*on a*

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}.$$

**Remarque 4.11.** *Une application $\phi\colon I \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$ est une* courbe paramétrée *dans $\mathbb{R}^n$. D'après nos conventions, la différentielle $\phi'(t)$ est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Or, l'application canonique*

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi \longmapsto \phi(1),$$

*identifie $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ avec $\mathbb{R}^n$. Le vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui correspond alors à $\phi'(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ est la* tangente *de la courbe paramétrée $\phi$ au point $\phi(t)$.*

### 4.8.1 Cas particulier

Soit $I$ un intervalle ouvert contenant 0. Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et prenons une application $f\colon I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto a + tX$, où $a$ désigne un point de $\Omega$, $X$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$, et $I$ un intervalle ouvert contenant 0, assez petit pour que $f(I)$ soit contenu dans $\Omega$. On a alors $f'(t) = X$, quel que soit $t$; d'où si $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $C^1$,

$$\frac{d}{dt} g(a + tX) = g'(a + tX)X.$$

Pour $t = 0$, nous retrouvons la dérivée $D_X g(a)$ de $g$ en $a$ suivant le vecteur $X$.

**Corollaire 4.12.** *Soit $f$ une fonction numérique de classe $C^1$, définie dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. Si $f$ présente un extremum en $a$, on a $f'(a) = 0$. Cette relation équivaut à*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

## 4.9 Théorème de Taylor

**Théorème 4.13** (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^p$ de classe $C^1$, définie dans un ouvert $\Omega$ convexe de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une constante $K$ telle que l'on ait $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y)\right| \leq K$ pour tout $y$ de $\Omega$ et tous $i$ et $j$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$. Alors pour tout couple $(a, b)$ de points de $\Omega$, on a*

$$||f(b) - f(a)|| \leq npK||b - a||$$

**Théorème 4.14.** *Soit $f$ une fonction numérique de classe $C^1$, définie dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. Pour chaque couple $(a, b)$ de points de $\Omega$ tel que le segment $[a, b]$ soit contenu dans $\Omega$, il existe $c \in ]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)(b_j - a_j). \tag{4.16}$$

On note qu'ici les $n$ dérivées partielles sont prises au même point $c$.

**Théorème 4.15** (Cas particulier de la formule de Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f$ une fonction numérique de classe $C^2$, définie dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, et soit $a \in \Omega$. Pour chaque*

*$b \in \mathbb{R}^n$ tel que le segment $[a,b]$ soit contenu dans $\Omega$, il existe un point $c$ du segment $]a,b[$ tel que l'on ait*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + df_a(b-a) + \frac{1}{2} d^2 f_c(b-a, b-a) \\ &= f(a) + \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c)(b_i - a_i)(b_j - a_j) \end{aligned} \tag{4.17}$$

## 4.10 Points stationnaires, extrema locaux, maximum, minimum, point selle

**Définition 4.16.** *Soit $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$, définie dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. On appelle* Hessien *de $f$ au point $a$ de $\Omega$ la forme quadratique qui à tout $u$ de $\mathbb{R}^n$ fait correspondre*

$$d^2 f_a(u,u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) u_i u_j. \tag{4.18}$$

Pourquoi est-ce une forme quadratique, c.a.d. pourquoi la forme $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)$ est-elle symétrique en $u$?

**Définition 4.17.** *Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une fonction numérique définie dans $\Omega$. On dit que $f$ présente un* maximum *resp.* minimum relatif *au point $a$ de $\Omega$ s'il existe un voisinage $V$ de $a$ avec $V \subseteq \Omega$ tel que l'on ait, quel que soit $x \in V$, $f(x) \leq f(a)$ resp. $f(x) \geq f(a)$; et ce maximum resp. minimum est dit* strict *si les relations $x \in V$ et $x \neq a$ entraînent l'inégalité stricte*

$$f(x) < f(a) \quad \textit{resp.} \quad f(x) > (a).$$

*Un maximum resp. minimum relatif est dit maximum resp. minimum* absolu *si c'est un maximum resp. minimum relatif par rapport au voisinage $V = \Omega$. Les maxima et minima (relatifs ou absolus) sont appelés* extrema *de la fonction $f$.*

## 4.11 Recherche de conditions pour qu'un point critique réalise un extremum, en dimension 2 seulement

Soit $f$ une fonction numérique de classe $C^2$, définie dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^2$, avec coordonnées $(x,y)$, et soit $a \in \Omega$. Introduisons

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

**Théorème 4.18.** *Soit $a$ un point critique de $\Omega$ (c.a.d. $df(a) = 0$).*
(i) (Condition nécéssaire d'ordre 2) *Pour que $f$ admette un extremum local au point $a$, il faut que $rt - s^2 \geq 0$.*
(ii) (Condition suffisante d'ordre 2) *Pour que $f$ présente un extremum local strict au point $a$, il suffit que $rt - s^2 > 0$. C'est un minimum si $r > 0$, un maximum si $r < 0$.*

On constate que dans les circonstances de (ii) le cas $r = 0$ ne se présente évidemment pas.

Addendum 1 *Donc : Si $rt - s^2 < 0$ alors $f$ n'admet pas d'extremum local en $a$.*

Dans ce cas, le point $a$ est un *point selle*.

Addendum 2 *La condition $rt - s^2 = 0$ ne permet pas de conclure.*

Exemples : $f(x, y) = x^3 + y^3$ et $g(x, y) = x^4 + y^4$ en $(0, 0)$.

Le théorème 4.18 se déduit de la façon suivante:

**Théorème 4.19.** *Soit $a$ un point critique de $\Omega$ (c.a.d. $df(a) = 0$), et soit $I_2 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique donnée par la formule*

$$I_2(u) = ru_1^2 + 2su_1u_2 + tu_2^2 = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)u_1^2 + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)u_1u_2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)u_2^2.$$

- *Pour que $f$ admette un minimum local au point $a$, il faut que la forme quadratique $I_2$ soit positive, i. e. vérifie*

  $$I_2(u) \geq 0, \quad \textit{quel que soit} \quad u \in \mathbb{R}^2;$$

  *et il suffit que cette forme soit définie positive, i. e. vérifie*

  $$I_2(u) > 0, \quad \textit{quel que soit} \quad u \neq 0 \in \mathbb{R}^2;$$

  *dans ce dernier cas $f$ présente un minimum local strict au point $a$.*

- *Pour que $f$ admette un maximum local au point $a$, il faut que la forme quadratique $I_2$ soit negative, i. e. vérifie*

  $$I_2(u) \leq 0, \quad \textit{quel que soit} \quad u \in \mathbb{R}^2;$$

  *et il suffit que cette forme soit définie negative, i. e. vérifie*

  $$I_2(u) < 0, \quad \textit{quel que soit} \quad u \neq 0 \in \mathbb{R}^2;$$

  *dans ce dernier cas $f$ présente un maximum strict au point $a$.*

- *Pour que le point a présente un point d'inflexion pour $f$, il faut que la forme quadratique $I_2$ soit indefinie, i. e. ni positive ni négative, et il suffit que cette forme soit strictement indéfinie, i. e. indéfinie et vérifie*

  $$I_2(u) \neq 0, \quad \textit{quel que soit} \quad u \neq 0 \in \mathbb{R}^2.$$

Le théorème 4.18 se déduit du théorème 4.19 à l'aide du lemme suivant:

**Lemme 4.20.** *Soit $\begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$ une matrice symétrique et soit $I_2$ la forme quadratique associée à cette matrice, c.a.d.*

$$I_2(u) = ru_1^2 + 2su_1u_2 + tu_2^2.$$

*Pour que cette forme quadratique soit non dégénérée il faut et il suffit que*

$$\begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = \text{dét} \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix} = rt - s^2 \neq 0.$$

*S'il en est ainsi, pour que la forme soit indéfinie il faut et il suffit que $rt - s^2 < 0$; pour que la forme soit positive il faut et il suffit que $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$; et pour que la forme soit négative il faut et il suffit que $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$.*