

## Fiche TD 2 : calcul intégral.

Licence SVTE, première année.

### Exercices

1. Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_0^1 x dx & \text{(b)} \int_{-1}^2 2y^3 dy & \text{(c)} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \\ \text{(d)} \int_0^1 e^x dx & \text{(e)} \int_1^2 \frac{1}{t} dt & \text{(f)} \int_0^\pi r^{-3,2} dr \end{array}$$

2. Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_2^4 (x-2)^5 dx & \text{(b)} \int_0^1 \sqrt{3y+1} dy & \text{(c)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 5 \sin(2\theta) d\theta \\ \text{(d)} \int_0^1 e^{3x} dx & \text{(e)} \int_0^1 \frac{1}{(2t+1)^3} dt & \text{(f)} \int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan^2(3\theta) d\theta \end{array}$$

3. Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_0^1 x(x^2)^5 dx & \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 \cos(y)} \sin y dy & \text{(c)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(\theta) d\theta \\ \text{(d)} \int_1^5 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx & \text{(e)} \int_0^1 x \frac{2x^2+1}{1+x^2+x^4} dx & \text{(f)} \int_0^1 \frac{\sin(\ln(1+\theta^2))}{1+\theta^2} \theta d\theta \end{array}$$

4. Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_0^1 x e^x dx & \text{(b)} \int_0^1 y^2 e^{2y} dy & \text{(c)} \int_1^2 \ln(t) dt \\ \text{(d)} \int_0^\pi \theta \cos(\theta) d\theta & \text{(e)} \int_0^1 (x^3+x) e^{x^2+1} dx & \text{(f)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\theta) \ln(\cos(\theta)) d\theta \end{array}$$

### Problème 1

La respiration est cyclique et un cycle respiratoire complet du début de l'inspiration à la fin de l'expiration dure environ 5 secondes. Le débit maximal du flux d'air dans les poumons est d'environ  $0,5 l/s$ . Ceci explique en partie pourquoi on modélise souvent le débit d'air  $f(t)$  (en  $l/s$ ) dans les poumons par la fonction de  $t$  (en  $s$ ) :

$$f(t) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right). \quad (1)$$

1. Tracer (approximativement) la courbe de  $f$  et indiquer où se situent les parties d'inspiration et d'expiration.
2. Utiliser ce modèle pour trouver le volume (en  $l$ ) d'air dans les poumons après  $T$  secondes.
3. Quelle quantité d'air a été inspirée en une minute ?

**Problème 2** On considère une population de bactéries dont l'effectif  $x(t)$  possède, lorsqu'elle est seule, un taux de croissance  $x'(t)$  proportionnel à  $x(t)$  (on note  $a > 0$  ce coefficient de proportionalité). La présence d'une certaine toxine diminue le taux de croissance  $a$  proportionnellement à la quantité  $k(t) = t$  de toxine dans le milieu. D'autre part, on introduit de l'extérieur des bactéries de la même espèce dans le milieu avec une vitesse  $c(t)$  d'apparition.

1. Montrer qu'il existe  $b > 0$  tel que  $x(t)$  satisfait l'équation différentielle

$$x'(t) = (a - bt)x(t) + c(t) \quad (2)$$

pour tout  $t \geq 0$ .

2. On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = (a - bt)y(t). \quad (3)$$

Chercher des solutions de (3) sous la forme  $y_K(t) = Ke^{p(t)}$  où  $p(t)$  est un polynôme de degré 2 que l'on précisera et  $K$  une constante arbitraire réelle.

3. On considère une solution  $x(t)$  de (2) telle que  $x(0) = 0$  de la forme  $x(t) = K(t)e^{at-bt^2/2}$ . Montrer que l'on a

$$K(t) = \int_0^t e^{\frac{b}{2}s^2 - as} c(s) ds,$$

pour tout  $t \geq 0$ .

4. Montrer que les fonctions  $x_K(t) = y_K(t) + x(t)$  sont aussi solutions de (2) pour tout  $K \in \mathbb{R}$ .

5. A l'aide de la règle de l'Hospital, montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c(t)}{bt-a}$ .

En déduire que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_K(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c(t)}{bt-a}$ , pour tout  $K \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 5

1. Montrer que la fonction

$$F(x) = \int_0^x \frac{ds}{1+s^2}$$

est bien définie et croissante pour tout  $x \geq 0$ .

2. Montrer que l'on a l'inégalité

$$F_1(x) = \int_1^x \frac{ds}{1+s^2} \leq \int_1^x \frac{ds}{s^2}$$

pour tout  $x \geq 1$ . En déduire que  $F_1(x) \leq 1$ , pour tout  $x \geq 1$ , puis que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l > 0$  existe.

On considère le problème suivant

$$y'(t) = 1 + y^2(t) \quad , \quad y(0) = 0. \quad (4)$$

On suppose que la solution  $y(t)$  de (4) existe sur un intervalle  $[0, T[$ .

3. Montrer que  $y(t)$  est positive et croissante, pour tout  $t \in [0, T[$ .

4. Montrer que  $F(y(t)) = t$  pour tout  $t \in [0, T[$  (ind. On pourra dériver la fonction composée  $F(y(t))$ ).

5. En déduire que  $\lim_{t \rightarrow l} y(t) = +\infty$ .

6. Reconnaissez-vous une fonction classique solution du problème (4)? En déduire que  $l = \pi/2$ .

### Exercice 6

1. Montrer que la fonction

$$A(x) = \int_0^x \frac{ds}{(1-s^2)^{1/2}}$$

est bien définie et croissante pour tout  $0 \leq x < 1$ .

2. Montrer que  $(1-s^2)^{1/2} \geq (1-s)^{1/2}$  pour tout  $0 \leq s \leq 1$ .

3. En déduire que l'on a l'inégalité

$$A(x) \leq \int_0^x \frac{ds}{(1-s)^{1/2}} = B(x)$$

pour tout  $0 \leq x < 1$ .

4. En déduire que  $A(x) \leq 2(1 - (1-x)^{1/2})$  pour tout  $0 \leq x < 1$ , puis que  $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} A(x) = l > 0$  existe.

On considère le problème suivant

$$y''(t) = -y(t) \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1. \quad (5)$$

5. Soit  $y(t)$  la solution du problème. Montrer que l'on a

$$(y'(t))^2 = 1 - (y(t))^2 \quad (6)$$

pour tout  $t \geq 0$ . (Ind. On pourra dériver la fonction  $f(t) = (y'(t))^2 + (y(t))^2$ ).

6. En déduire que l'on a  $|y(t)| \leq 1$  pour tout  $t \geq 0$ .

6. On suppose que  $y(t) < 1$  pour tout  $t \in [0, T[$  où  $T > 0$ . Montrer que  $y(t)$  est strictement croissante sur  $[0, T[$  (ind. On pourra montrer que  $y'(t)$  ne s'annule pas pour tout  $t \in [0, T[$ ).

7. Montrer que l'on a  $A(y(t)) = t$  pour tout  $t \in [0, T[$  (ind. On pourra dériver la fonction  $A(y(t))$  et utiliser (6)).

8. En déduire que  $\lim_{t \rightarrow l} y(t) = 1$  et aussi que  $\lim_{t \rightarrow l} y'(t) = 0$ .

9. Reconnaissez-vous une fonction classique solution de (5)? En déduire que  $l = \pi/2$ .

### Problème 3

La cinétique chimique de la réaction  $A + B \rightarrow C$  est régie par une équation différentielle de la forme

$$y'(t) = k(a - y(t))(b - y(t)) \quad (7)$$

où  $a > 0$  est la concentration initiale du produit  $A$ ,  $b > 0$  celle du produit  $B$ ,  $y(t)$  est la concentration à l'instant  $t$  du produit  $C$  issue de la réaction et  $k$  est une constante positive.

Dans la suite, on suppose que  $a < b$ .

1. Montrer que les fonctions  $y(t) = a$  et  $y(t) = b$ , pour tout  $t \geq 0$ , sont des solutions de (7).

2. On supposera que  $y(0) = 0$ . Montrer que  $y(t) < a$  pour tout  $t \geq 0$  (ind. On utilisera le fait que les graphes de deux solutions distinctes de (7) ne se coupent pas).

3. Montrer que la fonction

$$G(x) = \int_0^x \frac{ds}{k(a-s)(b-s)}$$

est bien définie sur  $[0, a[$ . Calculer  $G'(x)$  pour tout  $x \in ]0, a[$  et montrer que  $G(y(t)) = t$  pour tout  $t \geq 0$  (ind. On dérivera la fonction  $G(y(t))$ ).

4. Calculer les constantes  $A, B \in \mathbb{R}$  telles que

$$\frac{1}{k(a-s)(b-s)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}$$

pour tout  $s \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ . En déduire le calcul de  $G(x)$  pour tout  $x \in [0, a[$ .

5. On suppose que  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $k = 1$ . En déduire une expression de  $y(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .

**Problème 4** La nuit, au sommet d'une montagne, la température  $T(t)$  (en degrés Kelvin) à l'instant  $t$  suit une loi de Stephan, c'est-à-dire, que la vitesse d'abaissement  $-T'(t)$  de la température est proportionnelle à la puissance quatrième de la température  $T(t)$  à chaque instant  $t \geq 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que  $T(t)$  satisfait l'équation différentielle

$$T'(t) = -a(T(t))^4, \quad (8)$$

pour tout  $t \geq 0$ .

2. Montrer que la fonction constante  $T(t) = 0$ , pour tout  $t \geq 0$  est une solution de (8).

On supposera  $T(0) = 277$ . Montrer que  $T(t) > 0$  pour tout  $t \geq 0$  (ind. Utiliser le fait que les graphes de deux solutions distinctes de (8) ne se coupent jamais). Montrer que la fonction  $T(t)$  est strictement décroissante pour tout

$t \geq 0$ .

3. Montrer que la fonction

$$H(x) = \int_x^{277} \frac{1}{as^4} ds$$

est bien définie pour tout  $x > 0$ . Calculer  $H'(x)$  pour tout  $x \in ]0, 277]$  et montrer que  $H(T(t)) = t$  pour tout  $t \geq 0$  (ind. On dérivera la fonction  $H(T(t))$ .)

4. Calculer  $H(x)$  pour tout  $x \in ]0, 277]$ . En déduire une expression de  $T(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .

### Exercice 7

On cherche à calculer le volume d'un objet dont la forme est obtenue par rotation d'une courbe d'équation  $y = f(x)$  (pour  $x \in [a, b]$ ) autour de l'axe des  $x$ .

1. On décompose l'intervalle  $[a, b]$  en petits intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$ . Montrer que le volume de la tranche de l'objet obtenue par rotation de la courbe pour  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  est d'environ  $\pi f(x_i)^2(x_{i+1} - x_i)$ .

2. En déduire que le volume de l'objet est donné par l'intégrale

$$\int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

3. Calculer le volume de l'objet défini par rotation autour de l'axe  $x$  de la courbe représentant  $f(x) = x$  entre 0 et 1.

4. En déduire le volume d'un cône de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ .

5. Calculer le volume de l'objet défini par rotation autour de l'axe  $x$  de la courbe représentant  $f(x) = \cos(x)$  entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ .

6. Calculer le volume de l'objet défini par rotation autour de l'axe  $x$  de la courbe représentant  $f(x) = xe^{-x}$  pour  $x > 0$ .

### Problème 5

On remplit d'eau un bol hémisphérique, de rayon  $r$  (en  $cm$ ).

1. Calculer le volume de l'objet défini par rotation autour de l'axe  $x$  de la courbe représentant  $f(x) = \sqrt{r^2 - (x - r)^2}$  pour  $x \in [0, r]$ .

2. En déduire le volume d'eau que peut contenir le bol.

3. Montrer que, si il est rempli jusqu'à une hauteur  $h$  (en  $cm$ ), le bol contient (en  $cm^3$ )

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h). \quad (9)$$

2. Ecrire l'équation déterminant à quelle hauteur le bol sera à moitié plein.

3. Le bol fait 5 centimètres de rayon et l'eau coule à un débit de  $0,2cm^3/s$ .

3.1 Combien de temps faudra-t-il pour que la hauteur de l'eau passe de 2 centimètres à 4 centimètres ?

3.2 Soit  $h(t)$  la hauteur (en  $cm$ ) au temps  $t$  (en  $s$ ). Montrer que

$$h'(t)(10\pi h(t) - \pi h^2(t)) = 0, 2.$$

3.3 A quelle vitesse le niveau de l'eau monte-t-il s'il y a déjà 2 centimètres d'eau au fond ?

### Problème 6

Pour étudier le flux dans un vaisseau sanguin, on peut modéliser le vaisseau par un tube cylindrique de rayon  $R$  et de longueur  $l$ . A cause du frottement contre les parois du tube, la vitesse du sang est maximale au centre du vaisseau et est nulle au niveau des parois. La vitesse en un point à distance  $r$  de l'axe central est donnée (en  $cm/s$ ) par

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2) \quad (10)$$

où  $P$  est la différence de pression entre les deux extrémités du tube et  $\eta$  la viscosité du sang.

1. On considère une section verticale du tube (donc un cercle de rayon  $R$ ) que l'on décompose en anneaux concentriques de rayon intérieur  $r_i$  et de rayon extérieur  $r_{i+1}$ . Montrer que l'aire d'un tel anneau est de

$$A_i = \pi(r_{i+1} - r_i)(r_{i+1} + r_i).$$

2. Pour  $r_{i+1} - r_i$  petit, on approxime  $A_i$  par  $2\pi r_i(r_{i+1} - r_i)$ . En déduire que le débit sanguin  $F$  est égal à

$$\int_0^R 2\pi r v(r) dr. \quad (11)$$

2. Calculer cette intégrale en utilisant l'expression de  $v(r)$ . Cette expression de  $F$  est appelée la loi de Poiseuille.

3. L'hypertension est due au rétrécissement des artères. Pour maintenir le même débit, le coeur doit pomper plus fort, ce qui augmente la pression sanguine. Utiliser la loi de Poiseuille pour montrer que si  $R_0$  et  $P_0$  sont les valeurs normales du rayon et de la pression,  $R$  et  $P$  les valeurs lors de l'hypertension, alors conserver le même débit sanguin impliquera la relation

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4. \quad (12)$$

En déduire que si le rayon de l'artère est réduit aux trois quarts de sa valeur normale, la pression sanguine a plus que triplé.

### Exercice 8

Soit la courbe d'équation  $y = f(x)$  pour  $x \in [a, b]$ . On décompose  $[a, b]$  en petits intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$  et on approxime la courbe par les segments joignant  $(x_i, f(x_i))$  et  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ .

1. Montrer que la longueur d'un tel segment est de  $(x_{i+1} - x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2}$ .
2. En déduire que la longueur totale de la courbe est de

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

3. Calculer la longueur de la courbe d'équation  $y = x^{\frac{3}{2}}$  pour  $x \in [0, 1]$ .
4. Montrer que l'aire de la surface obtenue par rotation de la courbe d'équation  $y = f(x)$  entre  $x = a$  et  $x = b$  autour de l'axe  $x$  est

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (13)$$

5. Retrouver la formule de l'aire d'une sphère de rayon  $R$ .
6. Calculer l'aire de la surface obtenue par rotation de l'arc de la parabole d'équation  $y = x^2$  du point  $(1; 1)$  au point  $(2; 4)$  autour de l'axe  $x$ .

### Problème 7

On considère le graphe  $\mathcal{C}$  d'une fonction  $y(x)$  telle que  $y(0) = 2$ ,  $y(1) > y(0)$  et positive sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Soit

$$\mathcal{A}(y) = 2\pi \int_0^1 y(t) (1 + (y'(t))^2)^{1/2} dt$$

l'aire de la surface de révolution  $\mathcal{S}$  engendrée par  $\mathcal{C}$  par rotation autour de l'axe des abscisses  $x$ . La théorie du calcul variationnel montre que cette aire est minimale si la fonction  $y(t)$  vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) = (y^2(t) - 1)^{1/2}$$

pour tout  $t \in [0, 1]$ .

1. Montrer que la fonction  $y(t)$  est croissante puis que  $y(t) \geq 2$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .
2. Montrer que la fonction

$$L(x) = \int_2^x \frac{ds}{(s^2 - 1)^{1/2}}$$

est bien définie pour tout  $x > 1$ . Calculer  $L'(x)$  pour tout  $x \geq 2$  et montrer que  $L(y(t)) = t$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

3. Calculer la dérivée de la fonction  $\operatorname{argch}(x) = \ln(x + (x^2 - 1)^{1/2})$  pour tout  $x > 1$ . En déduire une expression de  $L(x)$  en fonction de  $\operatorname{argch}(x)$ .
4. En déduire une expression de  $y(t)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

### Problème 8

Le principe d'Archimède dit que la force s'exerçant sur un objet partiellement ou totalement immergé dans un liquide est égale au poids du liquide que l'objet déplace. On considère l'axe vertical  $y$ , d'origine  $y = 0$  la surface d'un liquide de densité  $\rho_l$ , et un objet de densité  $\rho_0$  partiellement immergé de hauteur totale  $L$ , avec une hauteur  $h$  sous la surface.

La force est donnée par  $F = \rho_l g \int_{-h}^0 A(y) dy$  où  $g$  est l'accélération due à la gravité et  $A(y)$  est la surface de la section horizontale de l'objet à la hauteur  $y$ . Le poids de l'objet est donné par  $P = \rho_0 g \int_{-h}^{L-h} A(y) dy$ .

1. Expliquer pourquoi  $P = F$ .
2. Montrer que le volume de la partie immergée est donné par  $\frac{F}{g\rho_l}$ .
3. Montrer que le pourcentage de l'objet (en volume) au-dessus de la surface du liquide est donné par

$$100 \frac{\rho_l - \rho_0}{\rho_l}. \quad (14)$$

4. La densité de la glace est  $917 \text{ kg/m}^3$  et la densité de l'eau de mer est  $1030 \text{ kg/m}^3$ . Quel pourcentage de glace est au-dessus de l'eau ?
5. Un cube de glace flotte dans un verre d'eau rempli à ras bord. L'eau débordera-t-elle lorsque le cube de glace aura fondu ?
6. Une boule de rayon 10 cm et de poids négligeable (c'est à dire qu'on considère  $\rho_0 = 0$ ) est totalement immergée dans l'eau ( $\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3$ ).
- 6.1 On suppose que la boule est complètement immergée. Montrer que  $A(y) = \pi(100 - (y + 10)^2)$ .
- 6.2 Quelle force est nécessaire pour maintenir la boule sous l'eau ?
- 6.3 On suppose maintenant que le point le plus haut de la boule se trouve 5 cm au dessus de la surface. Quelle force est alors nécessaire pour obtenir cette situation ?
- 6.4 Si la boule est enfoncée de telle sorte que son point le plus haut se trouve  $h$  cm au dessus de la surface, montrer que  $A(y) = \pi(100 - (y + 10 - h)^2)$ .
- 6.5 En déduire le travail  $\int_0^{20} F(h) dh$  nécessaire pour totalement enfoncer la boule dans l'eau si elle est initialement posée sur l'eau.

### Exercice 9

1. Montrer que la fonction

$$I(x) = \int_0^x \frac{ds}{(2 + 2 \cos(s))^{1/2}}$$

est bien définie pour tout  $x \in [0, \pi[$ .

2. On considère la fonction  $f(s) = 2 + 2 \cos(s) - \frac{1}{2}(\pi - s)^2$  pour tout  $s \in [\pi/2, \pi]$ . Calculer  $f(\pi/2)$  et  $f(\pi)$ . Montrer que pour tout  $s \in [\pi/2, \pi]$ , la fonction  $f(s)$  est décroissante (ind. On pourra utiliser l'inégalité  $\sin(s) \geq (\pi - s)/2$ , pour  $s \in [\pi/2, \pi]$ ). En déduire que  $f(s) \geq 0$  pour tout  $s \in [\pi/2, \pi]$ .

3. En déduire que l'on a l'inégalité

$$\int_{\pi/2}^x \frac{ds}{(2 + 2 \cos(s))^{1/2}} \geq \sqrt{2} \int_{\pi/2}^x \frac{ds}{\pi - s} = J(x)$$

pour tout  $x \in [\pi/2, \pi[$ .

4. Calculer  $J(x)$  pour tout  $x \in [\pi/2, \pi[$  et en déduire que  $\lim_{x \rightarrow \pi} J(x) = +\infty$ .

5. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow \pi} I(x) = +\infty$ .

### Problème 9

Le mouvement d'une bille  $M$  suspendue à un fil  $OM$  fixé en un point  $O$  et de longueur constante au cours du temps est modélisé par le problème suivant

$$\theta''(t) = -\sin(\theta(t)) \quad , \quad \theta(0) = 0 \quad , \quad \theta'(0) = \alpha \geq 0, \quad (15)$$

où  $\theta(t)$  désigne l'angle entre la position verticale et le fil  $OM$  à l'instant  $t \geq 0$ , pour tout  $t \geq 0$ . Dans ce modèle, on suppose que le frottement de l'air est négligeable.

1. Soit  $\theta(t)$  une solution du problème. Montrer que

$$(\theta'(t))^2 = \alpha^2 - 2(1 - \cos(\theta(t))) \quad (16)$$

pour tout  $t \geq 0$ . (ind. Dériver la fonction  $f(t) = (\theta'(t))^2 - 2 \cos(\theta(t))$ .)

2. Quel est le mouvement de la bille  $M$ , si l'on suppose que  $\alpha = 0$ ? (ind. On pourra utiliser (16))

3. On suppose  $\alpha > 2$ .

3.1. Montrer que  $\theta(t)$  est strictement croissante pour tout  $t \geq 0$  (ind. On pourra montrer que  $\theta'(t)$  ne s'annule pas pour tout  $t \geq 0$  en utilisant (16)).

3.2. Supposons que la limite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = l > 0$  existe. On admet dans ce cas que l'on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta'(t) = 0$ . Montrer que l'on a  $\alpha^2 = 2(1 - \cos(l))$ . Cela est-il possible? En déduire que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = +\infty$ . Interprétation.

4. On suppose  $\alpha = 2$ .

4.1. Déterminer l'unique réel  $l_1 \in [0, 2\pi[$  tel que  $2 = 1 - \cos(l_1)$ .

4.2. On suppose que  $\theta(t) < \pi$  pour tout  $t \in [0, T[$  où  $T > 0$ . Montrer que  $\theta(t)$  est strictement croissante sur  $[0, T[$  (ind. On pourra montrer que  $\theta'(t)$

ne s'annule pas pour tout  $t \geq 0$  en utilisant (16)).

4.3. Montrer que la fonction

$$I(x) = \int_0^x \frac{ds}{(2 + 2 \cos(s))^{1/2}}$$

est strictement croissante pour tout  $x \in ]0, \pi[$  et montrer que l'on a  $I(\theta(t)) = t$ , pour tout  $t \in [0, T[$  (ind. On pourra dériver la fonction  $I(\theta(t))$ ).

4.4. Dans l'exercice 2, on a vu que  $\lim_{x \rightarrow \pi} I(x) = +\infty$ . En déduire que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \pi$ . Interprétation.

5. On suppose  $0 < \alpha < 2$ . Dans ce cas, on admet qu'une bonne approximation de  $\theta(t)$  est donnée par la solution du problème

$$\Theta''(t) = -\Theta(t) \quad , \quad \Theta(0) = 0 \quad , \quad \Theta'(0) = \alpha, \quad (17)$$

Déterminer la solution  $\Theta(t)$  de (17). En déduire le comportement de  $\theta(t)$ .  
Interprétation.