

Fiche TD 1 : calcul différentiel.

Licence SVTE, première année.

Exercices

1.

Résoudre les équations suivantes.

(a) $e^x = e^{1-x}$, (b) $e^{3x} - 2e^{-x} = 0$,

(c) $2^{x^2} = 4 \cdot 2^{-x}$, (d) $3^x - 2^{x^2} = 0$.

2.

Déterminer les valeurs des paramètres a et b pour que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{pour } x < -2, \\ ax + b & \text{pour } -2 \leq x \leq 1, \\ \ln(x) & \text{pour } x > 1, \end{cases}$$

soit continue.

3.

Déterminer les valeurs des paramètres a, b et c pour que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{pour } x < -1, \\ ax + b & \text{pour } -1 \leq x \leq 1, \\ x + 2 & \text{pour } x > 1, \end{cases}$$

soit continue et vérifie $f(0) = 0$.

4.

Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(x)}$ (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{2x^2+x+1}$
(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1}$ (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
(g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x)$ (h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right)$ (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} - x$

4.

Etudier les fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \frac{x^2 - x - 1}{x - 3} & \text{(b)} x + e^{-x} & \text{(c)} \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \\ \text{(d)} x^2 - 8 \ln(x) + 1 & \text{(e)} \ln\left(x - \frac{1}{x}\right) & \text{(f)} x^{\frac{1}{x}} \\ \text{(g)} \frac{2x^3}{x^2 - 1} & \text{(h)} \ln(x+1) - \ln(x) + x & \end{array}$$

Problèmes d'optimisation

Problème 1

L'énergie dépensée par un poisson pour remonter une distance d d'un courant de vitesse u à la vitesse v est donnée par

$$E(v) = av^3 \frac{d}{v - u}$$

où a est une constante positive.

- Quelle est le domaine de définition de cette fonction ?
- On se restreindra ici au domaine $]u, +\infty[$. Expliquer pourquoi.
- Etudier la fonction E sur $]u, +\infty[$.
- En déduire la vitesse v qui minimise l'énergie $E(v)$.

Problème 2

On souhaite construire un casier rectangulaire en découpant quatre carrés de même taille aux coins d'une feuille cartonnée et en rabattant les bords restants. La feuille mesure 42 cm de long et 32 cm de large. Le volume du casier dépendra de la taille des carrés découpés. Dans cet exercice on cherche à trouver la taille des carrés qui maximisera le volume du casier.

- On note x la longueur d'un des côtés des carrés. Montrer que l'on a $0 \leq x \leq 16$.
- Montrer que le volume V s'exprime en fonction de x sous la forme

$$V(x) = 4(336x - 37x^2 + x^3)$$

- Étudier la fonction $V(x)$ pour tout $x \geq 0$. En déduire la taille des carrés qui maximisera le volume du casier.

Problème 3

Un camion doit faire un trajet de 150 km. On sait que sa consommation en gazoil est de $(10 + \frac{v^2}{250})$ litres par heure, où v désigne la vitesse du camion en km/h. Le prix du gazoil est de 1 euro et 20 centimes par litre (en Belgique). Dans cet exercice, on cherche la vitesse du camion (supposée constante en fonction du temps) qui minimisera le prix de revient de la course.

1. Montrer que le nombre de litres $N(v)$ consommés par le camion en 150 km, en fonction de v , est

$$N(v) = (10 + \frac{v^2}{250}) \frac{150}{v}.$$

2. En déduire l'expression du prix de revient $P(v)$ (en euros) de la course en fonction de v .

3. Étudier la fonction $P(v)$ pour tout $v \geq 0$. En déduire la vitesse v qui minimise le prix de revient de la course.

Problème 4

Dans une ruche, chaque cellule a une forme de prisme hexagonal dont la surface est donnée, pour une longueur de côté s et une hauteur h par

$$A(\theta) = 6sh - \frac{3}{2}s^2 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2 \frac{1}{\sin(\theta)}$$

où θ désigne l'angle au sommet du prisme.

- Quelle est le domaine de définition de cette fonction ?
- On se restreindra ici au domaine $]0, \pi[$. Expliquer pourquoi.
- Etudier la fonction A sur $]0, \pi[$.
- En déduire l'angle θ qui minimise qui minimise la surface $A(\theta)$ d'une telle cellule et déterminez, en fonction de s et h , la surface correspondante.

Équations différentielles du 1er ordre

Problème 1

On observe une population de microbes se développant de manière malthusienne, c'est à dire dont le taux de croissance au temps t (en heures) est proportionnelle à la taille de la population $N(t)$.

- En notant k la constante de proportionnalité, donner une équation différentielle modélisant cette situation.
- Montrer que les fonctions $f(t) = Ce^{kt}$ (où C est une constante) sont solutions de cette équation différentielle.

- (c) Si $k = \ln 2$, que peut-on dire de la population au bout d'une heure ?
- (d) Si $k = \ln 2$ et $N(0) = 100$, quelle sera, d'après le modèle, la taille de la population au bout de 3 heures et 20 minutes ?
- (e) Si $k = \ln 2$ et $N(0) = 100$, au bout de combien de temps la population atteindra-t-elle 1000 individus ?

Problème 2

On modélise le refroidissement d'une roche lors d'une éruption volcanique, en partant du principe que le taux de refroidissement est proportionnel à la différence de température entre la roche et l'air ambiant. On note T_a la température de l'air ambiant et $T(t)$ la température (en degrés celcius) de la roche au temps t (en heures).

- (a) En notant k la constante de proportionnalité, donner une équation différentielle modélisant cette situation.
- (b) Montrer que les fonctions $f(t) = (C - T_a)e^{kt} + T_a$ (où C est une constante) sont solutions de cette équation différentielle.
- (c) Si $k = -\ln 3$, $T_a = 50$ et $T(0) = 500$, quelle sera, d'après le modèle, la température de la roche après 30 minutes ?
- (d) Si $k = -\ln 3$, $T_a = 50$ et $T(0) = 500$, au bout de combien de temps la température de la roche sera-t-elle de 100 degrés celcius ?

Problème 3

Un réservoir contient initialement K grammes de sel dissout dans 80 litres d'eau. On y introduit une solution salée à 1 gramme de sel par litre à la vitesse de 6 litres par minute. Afin de maintenir le volume du liquide constant, le mélange s'écoule du réservoir par un orifice.

1. Soit $m(t)$ la masse de sel à l'instant t et $C(t) = m(t)/80$ la concentration de sel en gramme par litre à l'instant t . Expliquer pourquoi l'on a

$$m(t+h) = m(t) + 6h - 6hC(t) \tag{1}$$

pour tout $h > 0$ assez proche de t .

2. En déduire que $m(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$m'(t) = 6 - 6\frac{m(t)}{80}, \tag{2}$$

pour tout $t \geq 0$.

3. Montrer que la fonction constante $m(t) = 80$, pour tout $t \geq 0$, est solution de l'équation (2).
4. On suppose que $K = m(0) > 80$. Montrer que $m(t) > 80$ pour tout

$t \geq 0$ (On admettra que les graphes de deux solutions distinctes de (2) ne se coupent jamais).

4.1. Dédire de l'équation différentielle (2) que la fonction $m(t)$ est décroissante pour tout $t \geq 0$.

4.2 En déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) = l$ existe. On admet que dans ce cas on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} m'(t) = 0$. En déduire de l'équation différentielle (2) que $l = 80$.

5. On suppose que $0 < K < 80$. Montrer que $m(t) < 80$ pour tout $t \geq 0$ (On admettra que les graphes de deux solutions distinctes de (2) ne se coupent jamais).

5.1. Dédire de l'équation différentielle (2) que la fonction $m(t)$ est croissante pour tout $t \geq 0$.

5.2 En déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) = l$ existe. On admet que dans ce cas on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} m'(t) = 0$. En déduire de l'équation différentielle (2) que $l = 80$.

6. Est-il raisonnable d'attendre que le sel disparaisse au bout d'un temps assez long ?

7. On considère la fonction

$$m(t) = (K - 80)e^{-\frac{6}{80}t} + 80 \quad (3)$$

pour tout $t \geq 0$. Montrer que $m(t)$ est solution de l'équation (2).

8. Retrouver les résultats 4.2 et 5.2 en utilisant (3).

Problème 4

On considère une population de bactéries dont l'effectif $x(t)$ possède, lorsqu'elle est isolée, une vitesse de croissance $x'(t)$ proportionnelle à $x(t)$ (on note $a > 0$ ce coefficient de proportionnalité). La présence d'une certaine toxine diminue le taux de croissance a proportionnellement à la quantité $y(t)$ de cette toxine dans le milieu de culture. On suppose que $y(t)$ croît linéairement en fonction du temps, çad que $y(t)$ est de la forme $y(t) = \alpha t + \beta$ où $\alpha, \beta > 0$.

1. Montrer qu'il existe $b > 0$ tel quel $x(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$x'(t) = (a - b(\alpha t + \beta))x(t) \quad (4)$$

Dans la suite, on suppose que $x(0) > 0$.

2. Chercher une solution de (4) sous la forme $x(t) = x(0)e^{p(t)}$ où $p(t)$ est un polynôme de degré 2 que l'on précisera.

3. Étudier les variations de la fonction $x(t)$. A quel moment la population de bactérie est-elle maximale ? La population a-t-elle une chance de survie en grand temps ?

Problème 5

On étudie la progression d'une maladie contagieuse dans une population donnée. On note $x(t)$ la proportion des personnes malades à l'instant t et $y(t)$ celle des personnes non atteintes. On a donc $x(t) + y(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$. On suppose que la vitesse de propagation de la maladie $x'(t)$ est proportionnelle au produit $x(t)y(t)$ (ce qui signifie que la maladie se propage par contact).

1. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $y(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$y'(t) = -Ky(t)(1 - y(t)) \quad (5)$$

pour tout $t \geq 0$.

2. Montrer que les fonctions constantes $y(t) = 0$ et $y(t) = 1$, pour tout $t \geq 0$, sont des solutions de (5).

Dans la suite, on supposera que $0 < y(0) < 1$.

3. Montrer que $0 < y(t) < 1$ pour tout $t \geq 0$ (On admettra que les graphes de deux solutions distinctes de (5) ne se coupent jamais).

4. Dédire de l'équation différentielle (5) que la fonction $y(t)$ est décroissante pour tout $t \geq 0$.

5. En déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = l$ existe. On admet que dans ce cas on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = 0$. En déduire de l'équation différentielle (5) que $l = 0$. La population peut-elle survivre sans intervention extérieure ?

6. On suppose que $0 < y(0) < 1/2$. Montrer que la fonction $y(t)$ est convexe pour tout $t \geq 0$. Donner l'allure du graphe de y .

7. On suppose que $1/2 \leq y(0) < 1$. Montrer que la fonction $y(t)$ possède un point d'inflexion ayant pour coordonnées $(t_0, 1/2)$ où $t_0 \geq 0$. Donner l'allure du graphe de y .

8. On considère la fonction

$$y(t) = \frac{1}{1 - \frac{y(0)-1}{y(0)} e^{Kt}}. \quad (6)$$

Montrer que $y(t)$ est définie pour tout $t \geq 0$.

8.1. Montrer que $y(t)$ est solution de l'équation (5). Répondre à la question 5. en utilisant l'expression (6).

Problème 6

Lorsqu'une nouvelle espèce s'introduit dans un écosystème, elle évolue d'abord lentement. Son rythme de croissance s'accélère ensuite à mesure qu'elle s'adapte, puis ralentit quand la population devient trop importante compte tenu des ressources disponibles. Pour ce type d'évolution, on utilise le modèle de Gompertz suivant :

$$u'(t) = -u(t) \ln(u(t)).$$

- (a) Montrer que $u(t) = 1$ pour tout $t > 0$ est une solution constante.
- (b) En admettant que deux solutions ne se croisent jamais, montrer que u décroît si $u(0) > 1$ et croît si $u(0) < 1$.
- (c) En déduire que $l = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$ existe.
- (d) La population va-t-elle survivre ?
- (e) Montrer que les fonctions $u(t) = e^{Ke^{-t}}$ (où K est une constante) sont solutions.
- (f) Soit $u(0) > 0$, calculer $l = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$.

Problème 7

On plonge un bloc de sel dans de l'eau. Ce sel se dissout. On note $Q(t)$ la quantité de sel non dissous présente dans l'eau à l'instant t . On note $C(t)$ la concentration de sel dans l'eau à l'instant t . Par définition, $C(t)$ est le rapport entre la quantité de sel dissous à l'instant t et le volume V de l'eau (supposé constant au cours du temps). On note C la constante de saturation vérifiant $C(t) \leq C$, pour tout $t \geq 0$.

On suppose que la vitesse de dissolution instantanée $-Q'(t)$ est proportionnelle au produit entre la quantité $Q(t)$ et la différence entre la constante de saturation C et la concentration instantanée $C(t)$.

1. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $Q(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$Q'(t) = -\frac{K}{V}Q(t)(Q(t) + CV - Q(0)) \quad (7)$$

pour tout $t \geq 0$.

2. Montrer que les fonctions constantes $Q(t) = 0$ et $Q(t) = Q(0) - CV$, pour $t \geq 0$, sont des solutions de (7).

3. On suppose que $0 < Q(0) < CV$. Montrer que $Q(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ (On admettra que les graphes de deux solutions distinctes de (7) ne se coupent jamais).

3.1. Déduire de l'équation différentielle (7) que la fonction $Q(t)$ est décroissante pour tout $t \geq 0$.

3.2. En déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = l$ existe. On admet que dans ce cas on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q'(t) = 0$. En déduire de l'équation différentielle (7) que $l = 0$.
Interprétation.

4. On suppose que $Q(0) > CV$. Montrer que $Q(t) > Q(0) - CV$ pour tout $t \geq 0$ (On admettra que les graphes de deux solutions distinctes de (7) ne se coupent jamais).

4.1. Déduire de l'équation différentielle (7) que la fonction $Q(t)$ est décroissante pour tout $t \geq 0$.

4.2. En déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = l$ existe. On admet que dans ce cas on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q'(t) = 0$. En déduire de l'équation différentielle (7) que $l = Q(0) - CV$. Interprétation.

5. On considère la fonction

$$Q(t) = \frac{Q(0)(CV - Q(0))}{CV} \frac{e^{-\frac{K(CV-Q(0))}{V}t}}{1 - \frac{Q(0)}{CV}e^{-\frac{K(CV-Q(0))}{V}t}}. \quad (8)$$

Montrer que la fonction $Q(t)$ est définie pour tout $t \geq 0$.

5.1. Montrer que $Q(t)$ est solution de l'équation (7).

5.2. Répondre aux questions 3.2 et 4.2 en utilisant l'expression (8).

Équations différentielles du second ordre

Problème 1

Le modèle le plus simple d'un phénomène oscillant (relations proies-prédateurs, épidémies cycliques, phénomène El Nino...) est donné par l'étude d'un objet attaché à un ressort et oscillant, sans frottements, autour de sa position de repos. Eloigné d'une distance x (en cm) de sa position de repos ($x = 0$), il engendre une force proportionnelle à x . On a donc, par la deuxième loi de la mécanique Newtonienne :

$$mx''(t) = -kx(t),$$

où m est la masse de l'objet (en g), k la constante de proportionnalité, et $x(t)$ la position de l'objet au temps t (en secondes).

- Montrer que les fonctions $f(t) = a \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + b \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$ (où a et b sont des constantes) sont solutions de cette équation différentielle.
- Si on suppose l'objet lâché (c'est à dire que la vitesse initiale est nulle) de $x(0) = 1$, montrer que $x(t) = \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$.
- Si $k = 1$, $m = 100$ et que l'objet, au temps $t = 0$, est lâché de $x(0) = 1$, au bout de combien de temps passe-t-il par sa position de repos ?

Problème 2

Un organisme sécrète une quantité d'anticorps $a(t)$ à une vitesse $a'(t)$ proportionnelle à la quantité $x(t)$ d'agents infectieux présents dans le sang. De son côté, l'agent infectieux qui croît à une vitesse $x'(t)$ proportionnelle à $x(t)$ est attaqué par les anticorps avec une vitesse de disparition proportionnelle à $a(t)$.

1. Montrer qu'il existe des constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ telles que les fonctions $a(t)$ et $x(t)$ vérifient les équations différentielles

$$a'(t) = \alpha x(t) \quad , \quad x'(t) = \beta x(t) - \gamma a(t) \quad (9)$$

pour tout $t \geq 0$.

2. Montrer que $x(t)$ vérifie l'équation différentielle du second ordre

$$x''(t) - \beta x'(t) + \gamma \alpha x(t) = 0 \quad (10)$$

pour tout $t \geq 0$.

Dans la suite, on suppose que la constante β est très grande devant α et γ . En particulier, on supposera que $\beta^2 > 4\gamma\alpha$.

3. Chercher deux solutions de (10) de la forme $x_1(t) = e^{r_1 t}$ et $x_2(t) = e^{r_2 t}$ où $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ sont distincts.

4. Montrer que $r_1, r_2 > 0$. Dans la suite, on dira que $r_2 > r_1$.

On suppose que $x(0) > 0$. Dans la suite, on admettra que toute solution $x(t)$ de (10) peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (11)$$

où C_1, C_2 sont des nombres réels.

5. On suppose que $C_2 = 0$. Montrer que $C_1 > 0$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$.

6. On suppose que $C_2 \neq 0$. Montrer que $C_2 > 0$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$ (ind. On pourra mettre $e^{r_2 t}$ en facteur dans (11)).

7. L'organisme a-t-il une chance de survie ?

Problème 3

On considère le modèle proie-prédateur suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t), \\ y'(t) = x(t) - 1 \end{cases}$$

où $x(t)$ est la taille (en millier d'individus) de la population de proies au temps t (en mois) et $y(t)$ la taille (en centaine d'individus) de la population de prédateurs.

(a) Montrer que le couple de fonctions constantes $x(t) = y(t) = 1$ pour tout $t > 0$ est solution de ce système. Expliquer pourquoi on peut appeler ce cas une "situation d'équilibre".

(b) Qu'advient-il de la population de prédateurs si $x(t) < 1$ pour tout $t > 0$?

(c) Sous quelle condition la population de proies se met-elle à décroître ?

- (d) Montrer que x vérifie $x''(t) - x'(t) + x(t) = 1$.
- (e) Montrer que les fonctions $x(t) = e^{\frac{t}{2}}(A \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + B \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)) + 1$ (où A et B sont des constantes) sont solutions de cette équation différentielle.
- (f) Si $x(t) = e^{\frac{t}{2}}(A \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + B \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)) + 1$ que vaut $y(t)$?
- (g) Si $x(0) = y(0) = 2$, quelle sera la taille de la population de proies après une année ?