Projet de Mémoire Master 2
Titre: La transformée de Segal-Bargmann sur un groupe de Lie abélien
Enseignant encadrant: Johannes Huebschmann

Soit K un groupe de Lie abélien connexe; on note $K^{\mathbb{C}}$ son groupe complexifié. Par exemple, $K = \mathbb{R}^n$ et $K^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$. On munit l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K d'un produit scalaire. Ce produit scalaire induit une métrique riemannienne sur K. Soit dx la mesure de Haar de K, soit $\kappa\colon K^{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ la métrique, considérée comme fonction sur $K^{\mathbb{C}} \cong \mathrm{T}^*K$, et soit ε la mesure de Liouville de T^*K. Pour une fonction holomorphe ϕ sur $K^{\mathbb{C}}$ et une fonction lisse f sur K, soit $\langle \phi, f\rangle$ définie par l'expression

$$\langle \phi, f\rangle = \int_K \int_{\mathfrak{k}} \overline{\phi(x\mathrm{e}^{iY})} f(x) \mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}} dx dY, \quad Y \in \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K),\ x \in K,$$

cf. [1] (2.17). Soit $\mathcal{H}L^2(K^{\mathbb{C}}, \mathrm{e}^{-\kappa}\varepsilon)$ l'espace hilbertien des fonctions holomorphes sur $K^{\mathbb{C}}$ de carré integrables par rapport à la mesure $\mathrm{e}^{-\kappa}\varepsilon$.

But du mémoire : Montrer, suivant le Théorème 2.6 dans [1], qu'il existe un opérateur borné et un seul $\Pi\colon (L^2(K), dx) \longrightarrow \mathcal{H}L^2(K^{\mathbb{C}}, \mathrm{e}^{-\kappa}\varepsilon)$ tel que, quelles que soient la fonction holomorphe ϕ sur $K^{\mathbb{C}}$ carré intégrable par rapport à la mesure $\mathrm{e}^{-\kappa}\varepsilon$ et la fonction lisse f sur K,

$$\langle \phi, f\rangle = \langle \phi, \Pi f\rangle_{\mathcal{H}L^2(K^{\mathbb{C}}, \mathrm{e}^{-\kappa}\varepsilon)} = \langle \Pi^* \phi, f\rangle_{(L^2(K), dx)}.$$

Montrer également que, quelle que soit la fonction lisse f sur K, à une constante près, Πf est la fonction holomorphe unique sur $K^{\mathbb{C}}$ dont la restriction à K est donnée par $\mathrm{e}^{\frac{\Delta_K}{2}} f$ où Δ_K est l'opérateur de Laplace associé à la métrique riemannienne et que, pour une constante convenable, b, $b\Pi$ est unitaire. Enfin, expliquer le lien avec l'équation de la chaleur sur K et éventuellement celui avec la quantification du flot géodésique.

References

[1] B. C. Hall: *Geometric quantization and the generalized Segal-Bargmann transform for Lie groups of compact type.* Comm. in Math. Phys. **226** (2002), 233–268, `quant.ph/0012105`

[2] B. C. Hall: *Harmonic analysis with respect to heat kernel measure.* Bull. Amer. Math. Soc. **38** (2001), 43–78

[3] N. M. J. Woodhouse: *Geometric quantization.* Second edition, Clarendon Press, Oxford (1991)

Les étudiantes ou étudiants interessé(e)s, si elles ou ils n'arrivent pas à me trouver dans mon bureau, sont prié(e)s de se manifester par courrier éléctronique (Johannes.Huebschmann@math.univ-lille1.fr) ou de laisser un mot au sécrétariat scientifique de l'UFR de Mathématiques.