# Feuille d'exercises 7: Analyse vectorielle

**Exercise 1.** Notons le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^3$ sous la forme $(\cdot\ \cdot)$, c.a.d. étant données deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, nous notons $(\mathbf{a}\,\mathbf{b})$ le produit scalaire évalué en $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$; nous rappelons que nous désignons le produit vectoriel des deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^3$ par $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.
Ci-dessous, $x, y, z$ sont les coordonnées cartésiennes ordinaires et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; en plus, $f$ et $h$ sont des fonctions dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $\varphi$ est une fonction dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$ qui ne dépend que de $r$; enfin, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ désignent des champs de vecteurs. En voici une pléiade de formules utiles.

1. $\operatorname{grad}(fh) = f \operatorname{grad}(h) + h \operatorname{grad}(f)$;
2. étant donnés deux ouverts $U$ et $V$ de $\mathbb{R}^3$, une application lisse $\Phi\colon U \to V$, et une fonction lisse $f$ dans $V$, le gradient de la fonction composée $f \circ \Phi\colon U \to \mathbb{R}$ se calcule par la formule
$$\operatorname{grad}(f \circ \Phi) = \operatorname{grad}(f) \circ \Phi';$$
étant donnée une fonction lisse $\vartheta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une fonction lisse $f$ dans $U$, le gradient de la fonction composée $\vartheta \circ f\colon U \to \mathbb{R}$ se calcule par la formule
$$\operatorname{grad}(\vartheta \circ f) = \vartheta' \operatorname{grad}(f);$$
3. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{v})) = 0$;
4. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0$;
5. $\operatorname{div}(f\,\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \operatorname{grad}(f)) + f \operatorname{div}(\mathbf{v})$;
6. $\operatorname{div}(f \operatorname{rot}(\mathbf{v})) = (\operatorname{rot}(\mathbf{v}) \operatorname{grad}(f))$;
7. $\operatorname{div}(f \operatorname{grad}(h)) = (\operatorname{grad}(f) \operatorname{grad}(h)) + f\,\Delta h$;
8. $\operatorname{div}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \operatorname{rot}(\mathbf{v})) - (\mathbf{v} \operatorname{rot}(\mathbf{w}))$;
9. $\operatorname{grad}(\mathbf{v}\,\mathbf{w}) = (\mathbf{v} \operatorname{grad})\,\mathbf{w} + (\mathbf{w} \operatorname{grad})\,\mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \operatorname{rot}(\mathbf{w}) + \mathbf{w} \wedge \operatorname{rot}(\mathbf{v})$;
ici la notation $(\mathbf{v} \operatorname{grad})\,\mathbf{w}$ signifie que l'opérateur scalaire $(\mathbf{v} \operatorname{grad})$ est appliqué à chacune des composantes de $\mathbf{w}$, c.a.d. en coordonnées cartésiennes
$$(\mathbf{v} \operatorname{grad})\,\mathbf{w} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial w_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \end{bmatrix};$$
10. $\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\mathbf{v})) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{v})) = \Delta \mathbf{v}$,
l'opérateur de Laplace étant appliqué à chacune des composantes de $\mathbf{v}$;
11. $\operatorname{rot}(f\,\mathbf{v}) = f \operatorname{rot}(\mathbf{v}) + \operatorname{grad}(f) \wedge \mathbf{v}$;
12. $\operatorname{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \operatorname{grad})\,\mathbf{v} - (\mathbf{v} \operatorname{grad})\,\mathbf{w} + \mathbf{v} \operatorname{div}(\mathbf{w}) - \mathbf{w} \operatorname{div}(\mathbf{v})$;
13. $\operatorname{grad}(\varphi(r)) = \varphi'(r)\mathbf{e}_r$;

14. notons $\mathrm{Id}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs identité; étant donnée une fonction $\varphi$ dans un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^3$ qui ne dépend que de $r$, le produit $\varphi\,\mathrm{Id}$ est un champ de vecteurs dans $U$; alors
$$\mathrm{div}(\varphi(r)\,\mathrm{Id}) = \varphi(r) + r\varphi'(r).$$

*Indication.* À l'aide de la notation $\mathrm{grad}(f) = \nabla f$, utiliser l'astuce standard

$$\mathrm{rot}(\mathbf{v}) = \nabla \wedge \mathbf{v},\ \mathrm{div}(\mathbf{v}) = (\nabla\,\mathbf{v}),$$

voir les identités (5.5) et (5.6) du cours et exploiter les identités standard comme par exemple

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v}\,(\mathbf{u}\,\mathbf{w}) - (\mathbf{u}\,\mathbf{v})\,\mathbf{w}.$$

**Exercise 2.** Dans $\mathbb{R}^3$, avec coordonneées $x, y, z$, soit $\varphi$ une fonction dérivable d'une variable réelle, soit $\mathbf{a}_0$ le champ de vecteurs $\mathbf{a}_0(x, y, z) = (-y, x, 0)$, et soit $\mathbf{a}$ le champ de vecteurs $\mathbf{a} = \varphi\mathbf{a}_0$, c.a.d.
$$\mathbf{a}(x, y, z) = \varphi(r)\mathbf{a}_0(x, y, z) = \varphi(r)(-y, x, 0)$$
où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Montrer que

$$\mathrm{rot}(\mathbf{a}) = (2\varphi + r\varphi')\mathbf{e}_z.$$

En déduire: (i) Si $\mathbf{a}$ est interprété comme champ de vitesse d'une rotation d'un solide (nécessairement sur quel axe?), la direction de $\mathrm{rot}(\mathbf{a})$ coincide avec l'axe de rotation; et (ii) si, en plus, $\varphi(r) = \omega$ (constante), alors $|\mathrm{rot}(\mathbf{a})|$ est le double de la vitesse angulaire $\omega$.
*Remarque.* On peut pousser un peu plus loin: Le rotationnel du champ de vitesse d'un écoulement stationnaire d'un fluide représente le double de la vitesse instantanée de rotation en chaque point du fluide. En particulier, si le champ de vitesse stationnaire d'un fluide a son rotationnel nul l'écoulement ne présente pas de tourbillon.

**Exercise 3.** Soit $\mathbf{v}$ un champ de vecteurs dans le plan $\mathbb{R}^2$ tel que l'angle entre $\mathbf{v}(x, y)$ et le vecteur lieu $(x, y)$ soit égal à $\frac{\pi}{4}$ quel que soit $(x, y)$ et tel que la fonction $|\mathbf{v}|$ ne dépende que de la distance $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Déterminer $\mathbf{v}$. Trouver en particulier le champ de vecteurs $\mathbf{v}$ vérifiant $\mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0$.

**Correction.** *Le champ de vecteurs cherché* $\mathbf{v}$ *est de la forme*

$$\mathbf{v}(x, y) = f(r)(x - y, x + y)$$

*où $f$ est une fonction qui ne dépend que de $r$. Soit* $\mathbf{u}$ *le champ de vecteurs* $\mathbf{u}(x, y) = (x-y, x+y)$. *La formule* $\mathrm{div}(f\,\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\,\mathrm{grad}(f)) + f\,\mathrm{div}(\mathbf{u})$ *entraîne que ce champ de vecteurs a*

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(f\,\mathbf{u}) &= (\mathbf{u}\,\mathrm{grad}(f)) + f\,\mathrm{div}(\mathbf{u})\\ &= (x - y, x + y)f'(r)\mathbf{e}_r + 2f(r)\\ &= f'(r)\tfrac{1}{r}(x - y, x + y)(x, y) + 2f(r)\\ &= rf'(r) + 2f(r).\end{aligned}$$

*Ainsi, pour trouver le champ de vecteurs* $\mathbf{v}$ *dont la divergence est nulle, il reste à résoudre l'équation différentielle*
$$rf'(r) + 2f(r) = 0.$$
*Sa solution est $f(r) = \frac{c}{r^2}$, où $c$ est une constante. Cette solution $f$ n'est pas définie à l'origine. De même, le champ de vecteurs* $\mathbf{v} = f\mathbf{u}$ *qui en résulte n'est pas défini à l'origine.*

Autre interprétation: *La forme différentielle*

$$\alpha = \frac{x-y}{r^2}dy - \frac{x+y}{r^2}dx$$

*des deux variables $x$ et $y$, définie dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, a dérivée extérieure nulle.*

**Exercise 4.** Justifier les expressions pour les opérateurs standard suivants.

1. Le *gradient*:
   — Coordonnées cartésiennes: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z$

   — Coordonnées cylindriques: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z$

   — Coordonnées sphériques: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi$

2. La *divergence*:
   — Coordonnées cartésiennes: $\mathrm{div}F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

   — Coordonnées cylindriques: $\mathrm{div}F = \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

   — Coordonnées sphériques: $\mathrm{div}F = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial (\sin\vartheta F_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$

3. Le *rotationnel*:
   — Coordonnées cartésiennes: $\mathrm{rot}F = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$

   — Coordonnées cylindriques:

$$\mathrm{rot}F = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (rF_\vartheta)}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z)}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta}\right)\mathbf{e}_z$$

   — Coordonnées sphériques:

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}F = &\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial (r\sin\vartheta F_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (rF_\vartheta)}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_r \\ &+ \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r\sin\vartheta F_\varphi)}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\vartheta \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta}\right)\mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

4. Le *Laplacien*:
   — Coordonnées cartésiennes: $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

   — Coordonnées cylindriques: $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

   — Coordonnées sphériques: $\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^2 f\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

**Exercise 5.** Calculer $\mathrm{div}(\mathbf{e}_r)$ pour le champ de vecteurs $\mathbf{e}_r = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r})$ dans $\mathbb{R}^3$. Trouver un potentiel pour $\mathbf{e}_r$. Décrire $\mathrm{div}(\mathbf{e}_r)$ en fonction du potentiel.

**Exercise 6.** Une fonction $f$ dans un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'identité $\Delta f = 0$ est dite *harmonique*. Montrer que la fonction suivante $f$, définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et qui ne depend que de $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, est harmonique:

$$f(|\mathbf{x}|) = \begin{cases} r, & n = 1, \\ \log(r), & n = 2, \\ \frac{1}{r^{n-2}}, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

**Exercise 7.** Calculer l'aire d'un disque de rayon $r$ à l'aide de la formule de Riemann-Green. De même, calculer l'aire du domaine plan bordé par la parabole $y = x^2$ et la droite $y = 1$ à l'aide de la formule de Riemann-Green.

**Exercise 8.** Soient $a, b$ des nombres tels que $0 < a < b$ et soit

$$D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid a \leqslant xy \leqslant b,\ y \geqslant x,\ y^2 - x^2 \leqslant 1\}.$$

En effectuant le changement de variables $u = xy, v = y^2 - x^2$, calculer

$$I = \iint_D (y^2 - x^2)(x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

**Correction.**

$$\begin{aligned} du &= ydx + xdy \\ dv &= -2xdx + 2ydy \\ dudv &= 2(x^2 + y^2)dxdy \\ I &= \iint_D (y^2 - x^2)(x^2 + y^2)\, dx\, dy \\ &= \tfrac{1}{2} \iint (y^2 - x^2) dudv \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^1 \int_a^b vdudv \\ &= \tfrac{b-a}{4}. \end{aligned}$$

**Exercise 9.** La *feuille de Déscartes* est l'intérieur de la courbe

$$x^3 + y^3 = 3axy,$$

$a$ étant une constante réelle positive.

- Montrer que cette courbe admet le paramétrage $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, avec

$$x(t) = \frac{3at}{t^3 + 1},\ y(t) = \frac{3at^2}{t^3 + 1}, \quad -\infty < t < -1; -1 < t \leqslant +\infty.$$

- Calculer l'aire de la feuille de Déscartes.