USTL, UFR de
Mathématiques

Analyse complexe, 2009/2010, Série 9

La fonction cos

1) En quels points du plan complexe $\mathbb{C}$, l'application $z \mapsto \cos z$ est-elle conforme? Une application différentiable $f = u + iv \colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ dans un ouvert D de $\mathbb{C}$ *conserve les angles* ou est *conforme* si, en un point quelconque z_0 de D, quels que soient les courbes paramétrées $\gamma_1 \colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to D$ et $\gamma_2 \colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to D$ régulières de classe C^1 telles que $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$, l'angle orienté entre les tangentes orientées $\gamma_1'(0)$ et $\gamma_2'(0)$ coincide avec l'angle orienté entre les tangentes orientées $(f \circ \gamma_1)'(0)$ et $(f \circ \gamma_2)'(0)$ au point $f(z_0)$ des courbes paramétrées $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Décrire la partie $\{z; \cos z = a\}$. Pour quels a, l'équation $\cos z = a$ a-t-elle des racines doubles?

3) Déterminer la partie P du plan complexe $\mathbb{C}$ constituée des points z où $\cos z$ est réel; déterminer ensuite les parties de P où (i) $\cos z > 1$, (ii) $\cos z < -1$, (iii) $-1 < \cos z < 1$.

4) (a) Trouver un ouvert maximal tel que la restriction de $f(z) = \cos(z)$ à cet ouvert soit injective, et trouver également un domaine de définition maximal pour la fonction réciproque, arccos.
b) Vérifier que parmi les branches de arccos il y en a deux qui s'écrivent sous la forme $\arccos(w) = \pm i \mathrm{Log}(w + \sqrt{w^2 - 1})$.
c) Trouver toutes les branches de la fonction arccos.

L'exponentielle

5) Etude de l'exponentielle $f(z) = \mathrm{e}^z$, où $z = x + iy$.
(a) Décrire l'image d'une droite $y = c$ par f, c étant une constante.
(b) Décrire l'image d'une droite $x = c$ par f, c étant une constante.
(c) Vérifier que la restriction de f au domaine

$$W = \{z = x + iy; |y| < \pi\}$$

est un difféomorphisme de W sur

$$D = \mathbb{C} \setminus \{z; z = -x, x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}.$$

Justifier que W et D sont des domaines.
(d) En déduire l'existence d'une fonction holomorphe unique $\Phi \colon D \to W$ de sorte que

$$\mathrm{e}^{\Phi(z)} = z, \quad |\mathrm{Im}(\Phi(z))| < \pi.$$

Cette fonction est la *détermination principale du logarithme*, notée Log.

6) Déterminer l'image réciproque par l'exponentielle (i) du disque $|w| < r$, (ii) de l'extérieur $|w| > r$, (iii) du point $(i-1)\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}$, (iv) du segment de droite $[-1, 1]$, (v) de l'arc $|w| = \mathrm{e}$, $\pi < \arg(w) < \frac{3}{2}\pi$.

La fonction tan

7) (a) Montrer que la fonction $f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ réalise une bijection de $T = \{z \in \mathbb{C}; -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(z) \leq \frac{\pi}{2},\, z \neq \frac{\pi}{2}\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$.
Indication. On pourra écrire $f = g \circ h$ avec $h(z) = \mathrm{e}^{2iz}$ et $g(w) = i\frac{1-w}{1+w}$. Comparer avec l'ex. 6 de la série 5.
(b) Décrire un ouvert maximal tel que le restriction de f à cet ouvert soit injective, et trouver également un domaine de définition maximal pour la fonction réciproque, arctan.
(c) À l'aide de la détermination principale du logarithme, décrire la branche de arctan dont les valeurs sont dans T
(d) Trouver toutes les branches de arctan.
(e) La bijection de $T = \{z \in \mathbb{C}; -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(z) \leq \frac{\pi}{2},\, z \neq \frac{\pi}{2}\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$, est-elle un homéomorphisme?