

INTÉGRATION ÉLÉMENTAIRE

1) Evaluer

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz$$

- (a) le long de la parabole  $y = x^2$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ;
- (b) le long du segment de droite  $(1+i), (2+4i)$ ;
- (c) le long des segments  $(1+i), (2+i)$  et  $(2+i), (2+4i)$ .

2) Calculer  $\int_{\gamma} \operatorname{Im} z dz$  pour les courbes  $\gamma$  suivantes:

- (a) le cercle unitaire, parcouru une seule fois de point de départ 1;
- (b) un segment de droite reliant les points  $a$  et  $b$ .

3) Calculer  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ , où  $\gamma$  est la courbe bord positive, parcourue une seule fois, d'un

- (a) rectangle parallèle aux axes
- (b) triangle
- (c) cercle.

Qu'est-ce que vous constatez? Explication?

4) Calculer  $\frac{1}{2i} \int_C \bar{z} dz$  pour la cardioïde  $C$  :

$$z = 2ie^{it} - ie^{2it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

5) Soit  $K$  le cercle positif  $|z| = 2$ . Calculer

$$\int_K \frac{dz}{z^2 + 1} \quad \text{et} \quad \int_K \frac{dz}{z^3 - z}.$$

*Indication:* Décomposer en éléments simples.

6) *La formule de transformation.* Soient  $D, E$  des ouverts de  $\mathbf{C}$  et  $\varphi: E \rightarrow D$  holomorphe. Soit  $\gamma$  une courbe dans  $E$  qui est dérivable par morceaux et  $\varphi\gamma$  son image dans  $D$ . (Quelle est la définition exacte de  $\varphi\gamma$ ?) Montrer que

$$\int_{\varphi\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$