

EQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN

1) Vérifier les équations de Cauchy-Riemann pour les fonctions analytiques bien connues:

$$z^n, z^{-n}, e^z, \sin(z), \cos(z), \tan(z), \log(z), \operatorname{arctg}(z), \frac{1}{1-z-z^2}.$$

Identifier les domaines de définition de ces fonctions.

2) (a) Soit $u(x, y) = -2xy + e^x \cos y$. Déterminer v telle que $f = u + iv$ soit holomorphe et écrire f comme fonction de la variable $z = x + iy$.

(b) Idem pour $u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$.

3) Les fonctions suivantes, sont-elles holomorphes?

$$\frac{\operatorname{Re}(z)}{1+|z|}, \sqrt{|z|}, \frac{|z|^2}{1+z}, \bar{z}, \frac{1}{\bar{z}}, \operatorname{Re}(z)^2 + i\operatorname{Im}(z)^2, \frac{z\bar{z}}{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}, \log |z|^2.$$

Déterminer les domaines de définition et étudier également la différentiabilité réelle de ces fonctions.

4) Montrer que si f et g sont holomorphes, la fonction composée l'est également des qu'elle est définie.

5) Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction holomorphe, où $z = x + iy$. Montrer que s'il existe une relation linéaire

$$au + bv = c \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0),$$

alors f est constante.

6) Montrer que

$$f(x + iy) = x^2 + iy^3$$

n'est holomorphe dans aucun domaine bien que, sur une parabole que l'on précisera,

(i) les équations de Cauchy-Riemann soient vérifiées et que (ii) f soit \mathbf{C} -dérivable en tout point de cette parabole.

7) Montrer que, si f est une fonction holomorphe, alors

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f|^2 = 4|f'|^2.$$

THÉORÈME DE CAUCHY, FORMULES INTÉGRALES DE CAUCHY

8) Evaluer

$$\int_{\gamma} \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz$$

où γ est une courbe fermée simple quelconque autour de $z = 1$ et orientée positivement.

9) Evaluer

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z - \pi} dz, \quad \int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z+1)} dz$$

où γ est (i) le cercle positif $\{z; |z-1| = 3\}$ et (ii) le cercle positif $\{z; |z-1| = 2.1\}$.

10) Evaluer

$$\int_{\gamma} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz, \quad \int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

où γ est le cercle positif $\{z; |z| = 3\}$.

11) Démontrer que

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \vartheta d\vartheta = 2\pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$$

12) Pour une fonction réelle quelconque f de classe C^1 dans un domaine D de \mathbf{C} , rappelons la formule

$$\int_{\gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = f(b) - f(a)$$

où γ est une courbe dérivable reliant a et b , a resp. b étant le point de départ resp. d'arrivée. En déduire, pour une fonction holomorphe quelconque F , la formule

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = F(b) - F(a).$$