

1) Fonctions paires et impaires. Soit $P(z) = \sum a_n z^n$ une série entière avec rayon de convergence $R > 0$. Montrer que si $P(z)$ est paire, les coefficients a_{2n+1} sont nuls. La réciproque, est-ce vrai aussi? Définir et discuter également les séries entières impaires.

Généralisation: Soit $\zeta = e^{2\pi i/n}$ et étudier les équations $P(\zeta z) = P(z)$, $P(\zeta z) = \zeta P(z)$, $P(\zeta z) = \zeta^2 P(z)$, etc.

2) (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$P(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^3 + \dots$$

(b) Pour un point quelconque a du domaine de convergence, développer $P(z)$ en série entière

$$P(z) = Q(z - a) = \sum_{n \geq 0} b_n (z - a)^n$$

avec centre a et déterminer le rayon de convergence de Q .

(c) Pour un point a de \mathbb{C} où c'est possible, développer le prolongement analytique de P en série entière

$$Q(z - a) = \sum_{n \geq 0} b_n (z - a)^n$$

avec centre a et déterminer le rayon de convergence de Q .

3) Etant donné $a \in \mathbb{C}$ ou $a = \infty$, développer, au voisinage de a , la fonction $\sum_{n \geq 0} z^n$ en série entière de centre a pourvu que le prolongement analytique y existe. N.B. : ce prolongement est alors unique. Déterminer le domaine de convergence pour chaque a admis ici et expliquer comment la méthode qui consiste à réordonner la série entière est justifiée dans ce cas-ci.

4) Pour chaque $a \in \mathbb{C}$ où c'est possible, développer la fonction f définie par $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ en série entière centrée en a et déterminer le rayon de convergence.

5) a) Développer $\operatorname{zcth} z$ en série entière. En déduire que les nombres de Bernoulli impaires B_{2n+1} sont nuls pour $n \geq 1$.

(b) Développer $\frac{e^z}{e^z+1}$, $\frac{z}{\sin z}$, $\log \cos z$ en série entière.

6) Soient

$$P(z) = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$Q(u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots$$

Vérifier que $P(Q(u)) = u$ et $Q(P(z)) = z$ en tant que fonctions analytiques et séries entières.

7) Développer la fonction

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

en série entière et déterminer le rayon de convergence.

8) Montrer que l'équation différentielle

$$f'' + \frac{1}{z}f' + f = 0$$

(dite de *Bessel*) admet une solution non triviale qui est une fonction entière. (Une fonction holomorphe définie sur \mathbf{C} tout entier et dite *entière*.)

Indication. Chercher à déterminer la solution sous forme d'une série entière $f(z) = \sum c_n z^n$. Trouver une relation de récurrence pour les c_n et déterminer ensuite le domaine de convergence de la fonction analytique qui en résulte.

RAPPELS

9) Montrer que la série géométrique $\sum z^n$ ne converge pas uniformément dans son domaine de convergence.

10) Soit S un espace métrique et soit E une partie de S , munie de la métrique induite. Montrer que pour qu'une partie U de E soit ouverte dans E (par rapport à la métrique induite de E) il faut et il suffit qu'il existe un ouvert U' de S tel que $U = U' \cap E$.