USTL, UFR de
Mathématiques

Analyse complexe, 2009/2010, Série 12

Théorème des Résidus et Intégrales

1) Soit f la fonction réelle $x \mapsto \frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}$. On se propose de calculer l'intégrale réelle (!) $\int_0^\infty f(x)dx$ par le théorème des résidus.

a) On note encore f la fonction $z \mapsto \frac{\cos z}{\operatorname{ch} z}$ de la variable complexe z. Vérifier que cette fonction est holomorphe; déterminer ses singularités et les caractériser.

b) Soit R un nombre réel positif et C le bord, orienté positivement, du rectangle ayant pour sommets: $-R, R, R+i\pi, -R+i\pi$. Calculer l'intégrale :

$$\int_C \frac{\mathrm{e}^{iz}}{\operatorname{ch} z} dz.$$

c) En admettant que :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{-R+i\pi} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{\operatorname{ch} z} dz = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{R}^{R+i\pi} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{\operatorname{ch} z} dz = 0,$$

déduire de b) la valeur de $\int_0^\infty f(x)dx$. (On ne demande pas la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.)

d) On demande maintenant de montrer le résultat admis dans le c) ci-dessus. Pour cela, prouver d'abord que (i) $\operatorname{sh} x > x$ pour tout $x > 0\,(x \in \mathbb{R})$ et que (ii) $|\operatorname{ch}(y+it)| \geq \operatorname{sh}|y|$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que:

$$\left| \int_{-R}^{-R+i\pi} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{\operatorname{ch} z} dz \right| < \frac{\pi}{R} \quad \text{et} \quad \left| \int_{R}^{R+i\pi} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{\operatorname{ch} z} dz \right| < \frac{\pi}{R}.$$

2) Soit C une courbe fermée simple dans le plan complexe qui ne rencontre pas les zéros de la fonction f définie par $f(z) = z^6 + z^4 - z^2 - 1$. Calculer l'intégrale

$$\int_C \frac{\operatorname{ch}^2(\frac{\pi}{2} z)}{f(z)} dz.$$

3) a) Déterminer les singularités de la fonction

$$f(z) = \frac{\mathrm{sh}(z)}{\sin^2(z)}$$

et les classer.
b) Soit C une courbe fermée simple dans le plan complexe qui ne rencontre pas les singularités de f trouvées ci-dessus. On suppose de plus que, pour $k \neq 0$ et $k \neq 1$, les points $k\pi$ sont extérieurs à C. Calculer l'intégrale

$$\int_C f(z)dz.$$

4) Soit f la fonction holomorphe

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{sh}(z)} - \frac{1}{z}.$$

a) Montrer que f est holomorphe en 0 (ou plus précisemment : montrer que f admet une extension holomorphe en 0 que l'on note f aussi). Calculer la valeur $f(0)$.
(On pourra étudier d'abord le développement en 0 de la fonction $\frac{\mathrm{sh}}{z}$ et puis celui de $\frac{z}{\mathrm{sh}}$.)
b) Caractériser les singularités de f.
c) Soit C une courbe fermée simple dans le plan complexe qui ne rencontre pas les points $\pi n i, n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ (c.a.d. $n = \pm 1, \pm 2$, etc.). Calculer l'intégrale

$$\int_C f(z)dz.$$

5) a) Pour un nombre réel $a \notin [-1, 0]$, calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin^2 t}.$$

b) Quel est le comportement de l'intégrale pour $-1 \leq a \leq 0$?
6) Vérifier que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50}.$$