USTL, UFR de
Mathématiques

Analyse complexe, 2009/2010, Série 11

Singularités, Séries de Laurent, Résidus

1) Localiser les singularités de chacune des fonctions suivantes et les caractériser.

(a) $\dfrac{z^2}{(z+1)^3}$

(b) $\dfrac{2z^3 - z + 1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)}$

(c) $\dfrac{\sin mz}{z^2+2z+2}$

(d) $\dfrac{1-\cos z}{z}$

(e) $e^{-\frac{1}{(z-1)^2}}$

(f) $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\sin z}$

2) Trouver les séries de Laurent par rapport aux singularités indiquées pour chacune des fonctions suivantes. Caractériser la singularité dans chaque cas et décrire le domaine de convergence de chaque série.

(a) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}, \qquad z = 1,$

(b) $z \cos \dfrac{1}{z}, \qquad z = 0,$

(c) $\dfrac{\sin z}{z - \pi}, \qquad z = \pi,$

(d) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}, \qquad z = -1.$

3) Déterminer les résidus de chacune des fonctions suivantes, au pôle indiqué.

(a) $\dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}, \qquad z = 2, \ z = i, \ z = -i,$

(b) $\dfrac{1}{z(z+2)^3}, \qquad z = 0, \ z = -2,$

(c) $\dfrac{ze^{zt}}{(z-3)^2}, \qquad z = 3,$

(d) $\text{cotg} z, \qquad z = -5\pi.$

4) Trouver les séries de Laurent de $\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ par rapport à ses pôles.

5) Evaluer

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$$

où γ est le cercle positif donné par (a) $|z| = \frac{3}{2}$, (b) $|z| = 10$.

6) Evaluer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{5 + 3\sin\vartheta}.$$

7) Développer la fonction $f(z) = \frac{1}{\mathrm{e}^z - 1}$ en série de Laurent autour de l'origine.

8) Montrer que la fonction $f(z) = \operatorname{cotg} \pi z$ est méromorphe dans le plan complexe tout entier, qu'elle a des pôles simples en $z = n$, $n \in \mathbf{Z}$, et que le résidu en chacun de ces pôles vaut 1.

9) Trouver une fonction holomorphe dont les singularités ne sont pas isolées.

Théorème de Casorati-Weierstrass

10) Montrer que le point ∞ est singularité essentielle d'une fonction entière quelconque qui n'est pas un polynôme. C.a.d.: Étant donnée une fonction entière $f(z)$ qui n'est pas un polynôme, quelles que soient la valeur $w_0 \in \mathbf{C}$ et la constante réelle $K > 0$, il existe $z \in \mathbf{C}$ avec $|z| > K$ et $f(z)$ aussi proche à w_0 que l'on veut.
Indication. Utiliser l'exercice 2 de la série 10.

Fonctions méromorphes et homographies

11) Montrer qu'une fonction méromorphe f qui s'étend sur la sphère de Riemann est une fraction rationnelle. En déduire qui si, en plus, f est injective, f est une homographie.
Indication. Montrer d'abord qu'une fonction méromorphe sur la sphère de Riemann n'a qu'un nombre fini de pôles. Utiliser ensuite les exercices 2 et 14 de la série 10.