

INÉGALITÉS DE CAUCHY, PRINCIPE DU MAXIMUM
LEMME DE SCHWARZ, THÉORÈME DE D'ALEMBERT

1) Soit f une fonction entière, c.a.d. holomorphe dans \mathbf{C} tout entier. Supposons qu'il existe une constante réelle M et un entier naturel n tels que l'on ait

$$|f(z)| \leq M \cdot |z|^n$$

(i) pour tout z ; (ii) pour $|z| \geq r_0 > 0$.

Montrer que, dans le cas (i), il existe $a \in \mathbf{C}$ tel que $f(z) = az^n$ et que, dans le cas (ii), $f(z)$ est un polynôme de degré au plus égal à n .

Ces énoncés, admettent-ils des réciproques?

2) Soit f une fonction entière.

(a) Montrer que si f n'a qu'un nombre fini de zéros alors il existe un polynôme P et une fonction entière g tels que $f(z) = P(z) \cdot e^{g(z)}$

(b) Si f n'a aucun zéro et n'est pas constante, qu'est-ce que vous pouvez dire de $P(z)$ et de $g(z)$?

(c) Soit f une fonction entière. Montrer que s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f(z)| \geq \varepsilon > 0$ pour $|z| > r_0 > 0$ alors $f(z)$ est un polynôme. En déduire que si $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$ alors $f(z)$ est un polynôme.

3) Soit f holomorphe dans un domaine D et non constante. Montrer que la partie réelle $\operatorname{Re}(f)$ n'a pas de maximum local.

Indication : Poser $w = f(z)$ et étudier la transformation

$$\lambda(w) = \frac{w - a + 1}{w - a - 1}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Montrer d'abord que pour que $\operatorname{Re}(w) \leq a$ il faut et il suffit que $|\lambda(w)| \leq 1$.

4) Soit f holomorphe dans un domaine D et non constante. Montrer que si f n'a pas de zéros dans D alors $|f|$ n'a pas de minimum local.

5) Soit f holomorphe dans un domaine D et non constante, et soit Γ une courbe de niveau de $|f|$ qui soit supposée fermée et simple. On suppose de plus que l'intérieur de Γ appartient à D . Montrer qu'il existe alors un zéro de f dans l'intérieur de Γ .

6) On considère les deux disques $K: |z - a| < r$ et $L: |w - b| < s$. Soit f une fonction holomorphe dans K telle que $f(K) \subseteq L$ et $f(a) = b$. Montrer que

$$\left| \frac{f(z) - b}{z - a} \right| \leq \frac{s}{r}.$$

Qu'est-ce qui se passe s'il existe z_0 tel que l'on ait égalité?

7) Soient f et g holomorphes et sans zéros dans un domaine D qui contienne le disque unitaire fermé $|z| \leq 1$. De plus, supposons que les valeurs $f(0)$ et $g(0)$ soient réelles et positives. Montrer que si $|f(z)| = |g(z)|$ sur le cercle unitaire $|z| = 1$ alors $f = g$.

Indication : Etudier le quotient $\frac{f}{g}$.

THÉORÈME DE LIOUVILLE

8) Soient $a, b \in \mathbf{C}$, $a \neq b$, et soit R un réel tel que $|a| < R$ et $|b| < R$. Quelqu'un qui ne connaît pas le Théorème de Liouville calcule l'intégrale

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$$

pour une fonction entière bornée f . Qu'est-ce qu'il trouve quand il fait tendre R vers l'infini?

THÉORÈME DE MORERA

9) Soit U un ouvert de \mathbf{C} , et soit $\varphi: U \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue telle que, quel que soit $t \in [\alpha, \beta]$, la fonction φ_t définie sur U par $\varphi_t(z) = \varphi(z, t)$ soit holomorphe. Montrer que

$$F(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(z, t) dt$$

fournit une fonction holomorphe F . Calculer la \mathbf{C} -dérivée F' .

10) (a) Soit γ une courbe de classe C^1 dans \mathbf{C} reliant a et z . La fonction $G(z) = \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta}$, est-elle indépendante du choix de γ ?

(b) Est-ce qu'il y a un lien entre la réponse à la question a) et le théorème de Morera? Comment faut-il modifier le domaine de définition pour que $G(z)$ ne dépende pas du choix de γ ?

11) Soient u et v des fonctions harmoniques conjuguées et C une courbe fermée simple de sorte que l'intérieur de C appartienne aux domaines de définition de u et v . Montrer que $\int_C u dx - v dy = 0$ et $\int_C v dx + u dy = 0$.

INVERSION LOCALE

12) (a) Déterminer les domaines maximaux tels que l'application $f(z) = z + z^2$, restreinte à ce domaine, soit un homéomorphisme sur son image.

N.B. La fonction réciproque est alors également holomorphe. Pourquoi?

(b) Déterminer le disque le plus grand ayant l'origine pour centre tel que l'application f , restreinte à ce disque, soit un homéomorphisme sur son image.

13) Déterminer le disque le plus grand ayant l'origine pour centre tel que l'application $f(z) = e^z$, restreinte à ce disque, soit un homéomorphisme sur son image.

14) (a) Montrer qu'un polynôme non constant prend chaque valeur $w_0 \in \mathbf{C}$. Quelle que soit la valeur, combien de fois est-t-elle atteinte?

(b) Utiliser l'exercice 2) pour en déduire qu'une fonction entière injective f est de la forme $f(z) = az + b$ où $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$. En particulier, il s'ensuit que f est alors bijective.