USTL, UFR de
Mathématiques

Analyse complexe, 2009/2010, Série 1

. . .

1) Montrer que chaque unité complexe s'écrit sous la forme $z = \frac{a+bi}{a-bi}$ où a, b sont réels. Cette représentation est-elle unique? Pourquoi pas? Etant donné z, décrire les modifications possibles de a, b. Pourquoi a-t-on supposé que z est une unité?

2) Soit a un nombre complexe avec $|a| < 1$. L'ensemble des nombres complexes z se décompose en trois parties disjointes selon

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1, \quad = 1, \quad \text{ou} \quad > 1.$$

Décrire ces parties. Idem pour

$$\left|\frac{a-z}{\overline{a}+z}\right| \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(a) > 0.$$

3) Soient $A, C \in \mathbf{R}$ et $B \in \mathbf{C}$.
(a) Décrire la partie du plan complexe constituée des points z vérifiant l'équation

$$Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0.$$

(b) Utiliser les résultats de (a) pour montrer que l'inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ transforme les droites et les cercles du plan complexe en droites et cercles. Préciser (i) les cercles qui sont transformés en cercles, (ii) les cercles qui sont transformés en droites, (iii) les droites qui sont transformées en cercles, et (iv) les droites qui sont transformées en droites.

4) Montrer qu'une équation quadratique $z^2 + pz + q = 0$ avec $p, q \in \mathbf{C}$ admet toujours une solution dans $\mathbf{C}$. Formules?

5) Soient $\zeta_0 = 1, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ les n'ièmes racines d'unité. Calculer:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} |1 - \zeta_\nu|$$

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} (1 - \zeta_\nu)$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \zeta_\nu^k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \zeta_\nu}$$

6) Soient a, b des constantes réelles, et soit t une variable (réelle). Identifier les courbes suivantes:

$$
\begin{aligned}
z &= ia + at \\
z &= -ibe^{-it} \\
z &= ia + at - ibe^{-it}
\end{aligned}
$$

7) Représentation matricielle des nombres complexes. On considère $\mathbf{C}$ comme espace vectoriel réel de dimension 2, avec base $1, i$. Ainsi une application $\mathbf{R}$-linéaire $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ s'écrit par une 2×2-matrice (réelle) A. Pour $a \in \mathbf{C}$, posons $f(z) = az$.
(a) Pourquoi cette application est-elle $\mathbf{R}$-linéaire?
(b) Décrire la 2×2-matrice A_a qui correspond à a.
(c) Montrer que faire correspondre à un nombre complexe a quelconque la 2×2-matrice A_a correspondante est un isomorphisme de $\mathbf{C}$ sur un corps matriciel K.
(d) Quelle matrice correspond alors au nombre i et laquelle à l'unité complexe $\mathrm{e}^{i\phi}$?
(e) En donner une interprétation géométrique : Montrer que K s'identifie à la sous-algèbre de $\mathrm{End}(\mathbf{R}^2)$ formée de similitudes directes de $\mathbf{R}^2$.

8) Ecrire l'équation d'une ellipse, hyperbole, parabole sous forme complexe. Ecrire également des représentations paramétriques sous forme complexe.

9) Soit (z_n) une suite de nombres complexes, et soit $a_n = \frac{1}{n}(z_1 + \cdots + z_n)$.
(a) Montrer que si $\lim z_n = A$ on a également $\lim a_n = A$.
(b) Donner un exemple d'une suite divergente (z_n) telle que la suite (a_n) converge.

10) Soient (x_n) et (y_n) deux suites de réels. Etablir les propositions suivantes:

$$
\begin{gathered}
\limsup_{k\to\infty}(x_k + y_k) \le \limsup_{k\to\infty} x_k + \limsup_{k\to\infty} y_k \\
(x_k \le y_k \ \text{ pour } \ k \ge k_0) \Longrightarrow \limsup_{k\to\infty} x_k \le \limsup_{k\to\infty} y_k
\end{gathered}
$$

Donner un exemple de deux suites pour lesquelles la première inégalité est stricte.

11) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existe, cette limite est égale à R.

12) Justifier l'identité

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

En donner une interprétation géométrique.

13) Trouver les solutions $z = x + iy$ de l'équation $z^3 = 8i$. Pour cela, déterminer x et y. En donner une interprétation géométrique.

14) Montrer que l'adhérence d'une partie connexe est connexe.

15) Montrer que la réunion d'une famille d'ensembles connexes dont l'intersection n'est pas vide est un ensemble connexe.

16) Montrer que pour que la réunion de deux domaines soit un domaine il faut et il suffit que leur intersection ne soit pas vide.