Université Lille I Année 2009–2010
S5 M305 **Examen** du 4 janvier 2010, 8h à 11h

Corrigé

Questions de cours (a) Rappeler le principe du prolongement analytique. (1 pt)
(b) Rappeler le principe des zéros isolés. (1 pt)
(c) Enoncer le principe du maximum (1 pt) et le lemme de Schwarz (1 pt) et démontrer le second à partir du premier (3 pts).
Voir le cours.

Exercices

Exercice 1 Soit ℓ un entier naturel non nul et soit f_ℓ la fonction complexe de la variable complexe z définie par $f_\ell(z) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{(z+1)^\ell}}$ pour $z \neq -1$ et $f_\ell(-1) = 0$.

1. Pour quelles valeurs de ℓ, les dérivées partielles $\frac{\partial f_\ell}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_\ell}{\partial y}$ existent-t-elles dans $\mathbb{C}$ tout entier ? (1 pt)
2. Montrer que, si les dérivées partielles $\frac{\partial f_\ell}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_\ell}{\partial y}$ existent dans le plan complexe tout entier, elles vérifient l'équation de Cauchy-Riemann dans $\mathbb{C}$. (1 pt)
3. La fonction f_ℓ, est-elle alors holomorphe dans $\mathbb{C}$? (2 pts)

Il est évident que la fonction f_ℓ est holomorphe dans le plan complexe privé du point -1 et que, par conséquent, les dérivées partielles $\frac{\partial f_\ell}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_\ell}{\partial y}$ y existent et vérifient l'équation de Cauchy-Riemann. Étudions la fonction f_ℓ au voisinage du point -1 :
Pour x réel,

$$\frac{\partial f_\ell}{\partial x}(-1) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f_\ell(-1+h) - f_\ell(-1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{h^\ell}}}{h} = \lim_{u\to\infty} u\mathrm{e}^{-u^\ell} = 0.$$

En particulier, $\frac{\partial f_\ell}{\partial x}(-1)$ existe. De même, let $0 \neq h \in \mathbb{R}$ et $v = \frac{1}{h}$; alors

$$\frac{f_\ell(-1+ih) - f_\ell(-1)}{h} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{(ih)^4}}}{h} = v\mathrm{e}^{-(\frac{v}{i})^\ell} = v\mathrm{e}^{-(-iv)^\ell}$$

d'où, pour que

$$\frac{\partial f_\ell}{\partial y}(-1) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f_\ell(-1+ih) - f_\ell(-1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{(ih)^\ell}}}{h}$$

existe en tant que limite finie, il faut et il suffit que $\ell \equiv 0(4)$, c.a.d. que ℓ soit un multiple naturel de 4 ; et s'il en est ainsi,

$$\frac{\partial f_\ell}{\partial y}(-1) = \lim_{\substack{v\to\infty\\ v\in\mathbb{R}}} v\mathrm{e}^{-v^\ell} = 0.$$

Car si $\ell \not\equiv 0(4)$, $v\mathrm{e}^{iv}$ ne tend pas vers zéro lorsque v tend vers $+\infty$. Par exemple, si $\ell = 1$,

$$v\mathrm{e}^{-(-iv)^\ell} = v\mathrm{e}^{iv}.$$

Par conséquent, pour que $\frac{\partial f_\ell}{\partial y}(-1)$ existe il faut et il suffit que $\ell \equiv 0(4)$. De plus, s'il en est ainsi, $\frac{\partial f_\ell}{\partial x}(-1)$ et $\frac{\partial f_\ell}{\partial y}(-1)$ vérifient l'équation de Cauchy-Riemann mais f_ℓ n'est même pas continue au point -1 car ce point présente une singularité essentielle.
On peut d'ailleurs raisonner directement, sans référence à la notion de singularité essentielle. Par exemple :

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x\in\mathbb{R}}} f_4(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{h^4}} = \lim_{\substack{u\to\infty\\ u\in\mathbb{R}}} \mathrm{e}^{-u^4} = 0$$

mais $\zeta = \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}}$ vérifie $\zeta^4 = -1$ d'où

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} f_4(-1+t\zeta) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{(t\zeta)^4}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \mathrm{e}^{\frac{1}{t^4}} = \lim_{\substack{u\to\infty\\ u\in\mathbb{R}}} \mathrm{e}^{u^4} = \infty.$$

Donc la fonction f_ℓ n'est holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier pour aucun ℓ.

Exercice 2 Déterminer le carré ouvert le plus grand D ayant le point $\frac{\pi}{2}$ pour centre tel que l'application $f(z) = \cos z$, restreinte à ce carré, soit un homéomorphisme sur son image. Décrire l'image de D dans $\mathbb{C}$. Caractériser en particulier le bord de cette image. Justifier votre raisonnement. (2 pts)

Un domaine de définition maximal pour la fonction holomorphe cos est la bande $0 < \Re(z) < \pi$. L'image de cette bande est l'ouvert

$$W = \mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R}; |x| \geqslant 1\}.$$

Soient $w = u+iv$ les coordonnées dans le plan complexe $\mathbb{C}$ qui est pris comme domaine d'arrivée de la fonction cos. L'image du segement de droite $\{t + \frac{\pi}{2}i;\ 0 < t < \pi\}$ est l'arc de l'ellipse

$$\frac{u^2}{\mathrm{ch}^2\,\frac{\pi}{2}} + \frac{v^2}{\mathrm{sh}^2\,\frac{\pi}{2}} = 1 \tag{1}$$

dans l'intersection de W avec le demi-plan inférieur ; de même, l'image du segement de droite $\{t-\frac{\pi}{2}i;\ 0 < t < \pi\}$ est l'arc de cette ellipse dans l'intersection de W avec le demi-plan supérieur. Le carré cherché D est donc l'intérieur du carré de sommets $\frac{\pi}{2}i$, $-\frac{\pi}{2}i$, $\pi + \frac{\pi}{2}i$, et $\pi - \frac{\pi}{2}i$. L'image de D est alors l'intérieur de l'ellipse (1), privé des points $z = x \in \mathbb{R}$ tels que $|x| \geqslant 1$. Le bord de l'image de D est constitué de l'ellipse (1) et des points du complémentaire de W qui appartiennent à l'interieur de cette ellipse, c.a .d. des points z dans l'interieur de l'ellipse qui sont de la forme $z = x \in \mathbb{R}$ tels que $|x| \geqslant 1$.

Exercice 3 Soit f la fonction holomorphe définie par

$$f(z) = \frac{z^2+4iz}{(z-i)(z^2-4)}$$

Trouver les développements en série de Laurent de f par rapport à chacun de ses pôles. (2 pts)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2+4iz}{(z-i)(z^2-4)} \\ &= \frac{1}{z-i} + \frac{4i}{z^2-4} = \frac{1}{z-i} + \frac{i}{z-2} - \frac{i}{z+2} \end{aligned}$$

d'où $A = \text{Rés}(f)_{z=i} = 1$, $B = \text{Rés}(f)_{z=2} = i$, $C = \text{Rés}(f)_{z=-2} = -i$. Il suffit donc de développer $\frac{1}{z-i}$ resp. $\frac{1}{z-2}$ resp. $\frac{1}{z+2}$ en séries entières autour de ± 2 resp. autour de i et -2 resp. autour de i et 2 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-i} &= \frac{1}{z+2-(i+2)} = -\frac{1}{i+2}\frac{1}{1-\frac{z+2}{i+2}} \\
&= -\frac{1}{i+2}\left(1+\frac{z+2}{i+2}+\left(\frac{z+2}{i+2}\right)^2+\dots\right) \\
&= \frac{1}{z-2-(i-2)} = -\frac{1}{i-2}\frac{1}{1-\frac{z-2}{i-2}} \\
&= \frac{1}{2-i}\left(1+\frac{z-2}{i-2}+\left(\frac{z-2}{i-2}\right)^2+\dots\right) \\
\frac{1}{z+2} &= \frac{1}{z-i+(i+2)} = \frac{1}{i+2}\frac{1}{1+\frac{z-i}{i+2}} \\
&= \frac{1}{i+2}\left(1-\frac{z-i}{i+2}+\left(\frac{z-i}{i+2}\right)^2-\dots\right) \\
&= \frac{1}{z-2+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z-2}{4}} \\
&= \frac{1}{4}\left(1-\frac{z-2}{4}+\left(\frac{z-2}{4}\right)^2-\dots\right) \\
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z-i+(i-2)} = \frac{1}{i-2}\frac{1}{1+\frac{z-i}{1-2}} \\
&= \frac{1}{i-2}\left(1-\frac{z-i}{i-2}+\left(\frac{z-i}{i-2}\right)^2-\dots\right) \\
&= \frac{1}{z+2-4} = \frac{1}{-4}\frac{1}{1-\frac{z+2}{4}} \\
&= -\frac{1}{4}\left(1+\frac{z+2}{4}+\left(\frac{z+2}{4}\right)^2+\dots\right)
\end{aligned}$$

Exercice 4 Soit f la fonction holomorphe définie par $f(z) = \frac{z^2+4iz}{(z-i)(z^2-4)}$, et soit C un cercle positif dans $\mathbb{C} \setminus \{i, 2, -2\}$. Calculer l'intégrale

$$\int_C f(z)dz. \text{ (2 pts)}$$

D'après le théorème des résidus, l'intégrale vaut $2\pi i$ fois la somme des résidus à l'intérieur de C, et les résidus ont été déterminés dans l'exercice précédent :

$$A = \text{Rés}(f)_{z=i} = 1, \quad B = \text{Rés}(f)_{z=2} = i, \quad C = \text{Rés}(f)_{z=-2} = -i.$$

En total, il y a donc huit cas a distinguer :

1. $1, i, -i$ à l'extérieur de C : $\int_C f(z)dz = 0$;
2. 1 à l'intérieur de C, $i, -i$ à l'extérieur de C : $\int_C f(z)dz = 2\pi i$;
3. i à l'intérieur de C, $1, -i$ à l'extérieur de C : $\int_C f(z)dz = -2\pi$;

4. $-i$ à l'intérieur de C, $1, i$ à l'extérieur de C : $\int_C f(z)dz = 2\pi$;
5. $1, i$ à l'intérieur de C, $-i$ à l'extérieur de C : $\int_C f(z)dz = 2\pi i - 2\pi$;
6. $1, -i$ à l'intérieur de C, i à l'extérieur de C : $\int_C f(z)dz = 2\pi i + 2\pi$;
7. $i, -i$ à l'intérieur de C, 1 à l'extérieur de C : $\int_C f(z)dz = 0$;
8. $1, i, -i$ à l'intérieur de C : $\int_C f(z)dz = 2\pi i$.

Exercice 5 Soient a et b deux nombres complexes, pas nécessairement distincts, r, s deux nombres réels strictement positifs, soient $K = \{z; |z-a| < r\}$ et $L = \{z; |z-b| < s\}$, et soit f une fonction holomorphe injective dans K telle que $f(K) = L$. Let but de l'exercice est de montrer que *f est une homographie*.
(a) On note U le disque unité ouvert et $\overline{U}$ son adhérence. Déterminer les homographies ϑ_a et ψ_b uniques telles que

$$\vartheta_a \colon (0, 1, \infty) \mapsto (a, a + r, \infty), \quad \psi_b \colon (0, 1, \infty) \mapsto (b, b + s, \infty).$$

Justifier que ϑ_a est un homéomorphisme de $\overline{U}$ sur $\overline{K}$ et un isomorphisme analytique de U sur K et, de même, que ψ_b est un homéomorphisme de $\overline{U}$ sur $\overline{L}$ et un isomorphisme analytique de U sur L. (1 pt)
(b) Définissons la fonction F par l'identité

$$\psi_b(F(z)) = f(\vartheta_a(z)), \; z \in U.$$

Montrer que F est une fonction holomorphe injective dans U telle que $F(U) \subset U$. (1 pt)
(c) Soit $\alpha \in U$ et soit $\varphi_\alpha : \overline{U} \to \mathbb{C}$ l'homographie définie par

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z} \qquad (z \in \overline{U}).$$

Déterminer l'image du cercle unité relativement à φ_α. En déduire que φ_α est bien définie, que $\varphi_\alpha(\overline{U}) \subseteq (\overline{U})$, et que $\varphi_\alpha : \overline{U} \to \overline{U}$ est un homéomorphisme de réciproque $\varphi_{-\alpha} : \overline{U} \to \overline{U}$. (1 pt)
(d) Montrer que φ_α induit un isomorphisme analytique de U sur U. Vérifier que $\varphi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2$ et que $\varphi'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$. (1 pt)
(e) Soient $\alpha, \beta \in U$ et h une fonction holomorphe sur U telle que $|h(z)| < 1$ pour tout $z \in U$ et $h(\alpha) = \beta$. Montrer que

$$|h'(\alpha)| \leqslant \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2}$$

et que pour que l'on ait égalité il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$ tel que $h(z) = \varphi_{-\beta}(\lambda \varphi_\alpha(z))$. (1 pt)
(<u>Indication</u> : on pourra appliquer le lemme de Schwarz à la fonction $\varphi_\beta \circ h \circ \varphi_{-\alpha}$).
(f) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$ tel que

$$F(z) = \lambda \varphi_\alpha(z) \quad (z \in U)$$

où α est l'unique élément de U tel que $F(\alpha) = 0$.
(<u>Indication</u> : Utiliser le fait que F est un isomorphisme analytique et appliquer la question (e) aux fonctions F et F^{-1}). (1 pt)
(g) Conclure que f est une homographie. (1 pt)

(a) Les homographies cherchées sont :

$$\vartheta_a(z) = rz + a, \quad \psi_b(z) = sz + b.$$

Les homographies inverses correspondantes sont :

$$\vartheta_a^{-1}(w) = \frac{w-a}{r}, \quad \psi_b^{-1}(w) = \frac{w-b}{s}.$$

Il s'ensuit que ϑ_a est un homéomorphisme de $\overline{U}$ sur $\overline{K}$ et un isomorphisme analytique de U sur K et, de même, que ψ_b est un homéomorphisme de $\overline{U}$ sur $\overline{L}$ et un isomorphisme analytique de U sur L.

(b) La fonction F est donnée comme fonction composée

$$F = \psi_b^{-1} \circ f \circ \vartheta_a.$$

Puisque chacune des fonctions ψ_b^{-1}, f, ϑ_a est holomorphe et injective il en est de même de F. Par construction, F est une fonction dans U telle que $F(U) \subset U$.

(c) L'homographie φ_α est bien définie sur $\overline{U}$ (car $z = 1/\bar{\alpha} \notin \overline{U}$). On vérifie que

$$|z-\alpha|^2 - |1-\bar{\alpha}z|^2 = (|z|^2-1)(1-|\alpha|^2)$$

ce qui donne $\varphi_\alpha(\overline{U}) \subset \overline{U}$ et $\varphi_\alpha(U) \subset U$; en particulier, l'homographie φ_α envoie le cercle unité sur lui-même. Un autre argument consiste à constater que

$$|\varphi_\alpha(1)| = |\varphi_\alpha(-1)| = |\varphi_\alpha(i)| = 1$$

d'où l'homographie φ_α envoie le cercle unité sur lui-même ; puisque $\varphi_\alpha(0) = 0 = -\alpha \in U$, il s'ensuit que $\varphi_\alpha(\overline{U}) \subset \overline{U}$ et $\varphi_\alpha(U) \subset U$. On vérifie également que

$$\varphi_\alpha(\varphi_{-\alpha}(z)) = z = \varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z))$$

d'où $\varphi_\alpha : \overline{U} \to \overline{U}$ est un homéomorphisme de réciproque $\varphi_{-\alpha} : \overline{U} \to \overline{U}$.

(d) La fonction φ_α induit une bijection de U sur U, qui est holomorphe ainsi que sa réciproque $\varphi_{-\alpha}$; c'est donc un automorphisme analytique de U. Pour $z \in U$, on a $\varphi'_\alpha(z) = (1-|\alpha|^2)/(1-\bar{\alpha}z)^2$. Cela donne bien les valeurs indiquées pour $\varphi'_\alpha(0)$ et $\varphi'_\alpha(\alpha)$.

(e) La fonction $\varphi_\beta \circ h \circ \varphi_{-\alpha}$ est holomorphe sur U et envoie U dans U ; on vérifie de plus que $\varphi_\beta \circ h \circ \varphi_{-\alpha}(0) = 0$. D'après le lemme de Schwarz, on a $|\varphi_\beta \circ h \circ \varphi_{-\alpha}(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in U$ et $|(\varphi_\beta \circ h \circ \varphi_{-\alpha})'(0)| \leqslant 1$. Cette inégalité se réécrit $|\varphi'_\beta(\beta)h'(\alpha)\varphi'_{-\alpha}(0)| \leqslant 1$, ce qui donne l'inégalité demandée

$$|h'(\alpha)| \leqslant \frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}.$$

Le lemme de Schwarz ou le principe du maximum impliquent de plus que s'il y a égalité, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$ tel que $(\varphi_\beta \circ h \circ \varphi_{-\alpha})(z) = \lambda z$ $(z \in U)$; en composant à droite par φ_α et à gauche par $\varphi_{-\beta}$, on obtient $h(z) = \varphi_{-\beta}(\lambda\varphi_\alpha(z))$ $(z \in U)$.

(f) La fonction F est holomorphe sur U et injective ; d'après le cours F est un isomorphisme analytique de U sur $F(U) = U$. Notons $k = F^{-1}$. Il existe un unique élément $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $F(\alpha) = 0$. La question précédente peut être appliquée à F, avec $F(\alpha) = 0$, et à k, avec $k(0) = \alpha$. On obtient $|F'(\alpha)| \leqslant 1/(1-|\alpha|^2)$ et $|k'(0)| \leqslant 1-|\alpha|^2$. Comme $F'(\alpha)k'(0) = 1$ (puisque $(F \circ k)(z) = z$ $(z \in U)$), ces inégalités sont nécessairement des égalités. D'après le (e), il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$ tel que $F(z) = \lambda\varphi_\alpha(z)$ $(z \in U)$.

(g) D'après (a), (b), et (f), la fonction f est la composée de quatre homographies et c'est donc une homographie.