USTL, UFR de
Mathématiques

Analyse complexe, 2009/2010, Devoir n^{o}3

Devoir supplementaire pour les amateurs des fonctions à une variable complexe. À rendre la semaine du 7 décembre 2009, en TD ou à déposer dans le casier de l'enseignant de TD; prière de noter le no de groupe sur la copie

1) Soit f holomorphe dans un domaine D et non constante. Montrer que si f n'a pas de zéros dans D alors $|f|$ n'a pas de minimum local.

2) Soit f holomorphe dans un domaine D et non constante, et soit Γ une courbe de niveau de $|f|$ qui soit supposée fermée et simple. On suppose de plus que l'intérieur de Γ appartient à D. Montrer qu'il existe alors un zéro de f dans l'intérieur de Γ.

3) Soient f et g holomorphes et sans zéros dans un domaine D qui contienne le disque unitaire fermé $|z| \leq 1$. De plus, supposons que les valeurs $f(0)$ et $g(0)$ soient réelles et positives. Montrer que si $|f(z)| = |g(z)|$ sur le cercle unitaire $|z| = 1$ alors $f = g$.
Indication : Etudier le quotient $\frac{f}{g}$.

4) Déterminer le disque le plus grand ayant l'origine pour centre tel que l'application $f(z) = \mathrm{e}^z$, restreinte à ce disque, soit un homéomorphisme sur son image.

5) Trouver les séries de Laurent de $\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ par rapport à ses pôles.

6) Evaluer
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{5 + 3\sin\vartheta}.$$

7) Trouver une fonction holomorphe dont les singularités ne sont pas isolées.

8) Soit f la fonction réelle $x \mapsto \frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}$. On se propose de calculer l'intégrale réelle (!) $\int_0^\infty f(x)dx$ par le théorème des résidus.

a) On note encore f la fonction $z \mapsto \frac{\cos z}{\operatorname{ch} z}$ de la variable complexe z. Vérifier que cette fonction est holomorphe; déterminer ses singularités et les caractériser.

b) Soit R un nombre réel positif et C le bord, orienté positivement, du rectangle ayant pour sommets: $-R, R, R + i\pi, -R + i\pi$. Calculer l'intégrale :
$$\int_C \frac{\mathrm{e}^{iz}}{\operatorname{ch} z} dz.$$

c) En admettant que :
$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{-R+i\pi} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{\operatorname{ch} z} dz = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{R}^{R+i\pi} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{\operatorname{ch} z} dz = 0,$$

déduire de b) la valeur de $\int_0^\infty f(x)dx$. (On ne demande pas la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.)

d) On demande maintenant de montrer le résultat admis dans le c) ci-dessus. Pour cela, prouver d'abord que (i) $\operatorname{sh} x > x$ pour tout $x > 0\,(x \in \mathbb{R})$ et que (ii) $|\operatorname{ch}(y+it)| \geq \operatorname{sh}|y|$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que:

$$\left|\int_{-R}^{-R+i\pi} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{\operatorname{ch} z} dz\right| < \frac{\pi}{R} \quad \text{et} \quad \left|\int_{R}^{R+i\pi} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{\operatorname{ch} z} dz\right| < \frac{\pi}{R}.$$

9) Soit f la fonction holomorphe

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sh}(z)} - \frac{1}{z}.$$

a) Montrer que f est holomorphe en 0 (ou plus précisemment : montrer que f admet une extension holomorphe en 0 que l'on note f aussi). Calculer la valeur $f(0)$.
(On pourra étudier d'abord le développement en 0 de la fonction $\frac{\operatorname{sh}}{z}$ et puis celui de $\frac{z}{\operatorname{sh}}$.)

b) Caractériser les singularités de f.

c) Soit C une courbe fermée simple dans le plan complexe qui ne rencontre pas les points $\pi ni, n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ (c.a.d. $n = \pm 1, \pm 2$, etc.). Calculer l'intégrale

$$\int_C f(z)dz.$$

10) a) Pour un nombre réel $a \notin [-1, 0]$, calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin^2 t}.$$

b) Quel est le comportement de l'intégrale pour $-1 \leq a \leq 0$?

11) Vérifier que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50}.$$