USTL, UFR de
Mathématiques

Analyse complexe, 2009/2010, Devoir n^{o}2

A rendre la semaine du 23 novembre 2009, en TD ou à déposer dans le casier de l'enseignant de TD; prière de noter le no de groupe sur la copie

1) Etant donné $a \in \mathbb{C}$ ou $a = \infty$, développer, au voisinage de a, la fonction $\sum_{n \geq 0} z^n$ en série entière de centre a pourvu que le prolongement analytique y existe. N.B. : ce prolongement est alors unique. Déterminer le domaine de convergence pour chaque a admis ici et expliquer comment la méthode qui consiste à réordonner la série entière est justifiée dans ce cas-ci.

2) Soit $m \geq 2$ un entier naturel et soit $0 \leq k < m$. La fonction analytique f vérifie les identités

$$(f(n))^m = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}, \quad m\mathrm{Log} \lim_{|z| \to \infty} f(z) = 2k\pi i.$$

En particulier, $\lim_{|z| \to \infty} f(z)$ existe. Déterminer f, y compris un domaine de définition maximal.

3) La fonction $h(z) = \frac{1}{1+z^2}$, admette-t-elle une primitive (analytique?) dans son domaine de définition?

4) Soit $q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application $q(z) = z^2$. Quelle est l'image par q d'une droite parallèle à l'axe réel resp. imaginaire? Quelles sont les images réciproques de ces droites?

5) Soient $H_r = \{z; \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $K = \{z; |z-1| \leq \frac{1}{2}\}$. Quelles homographies transforment $H_r \setminus K$ sur une couronne ayant l'origine pour centre?

6) Montrer que l'équation différentielle

$$f'' + \frac{1}{z} f' + f = 0$$

(dite de *Bessel*) admet une solution non triviale qui est une fonction entière. (Une fonction analytique définie sur $\mathbb{C}$ tout entier et dite *entière*.)
Indication. Chercher à determiner la solution sous forme d'une série entière $f(z) = \sum c_n z^n$. Trouver une relation de récurrence pour les c_n et déterminer ensuite le domaine de convergence de la fonction analytique qui en résulte.

7) Projection stéréographique ptolémaïque. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, le plan horizontal passant par l'origine étant pris comme plan complexe $\mathbb{C}$, considérons la sphère unité S dans $\mathbb{R}^3$ ayant l'origine pour centre, de sorte que le point $N = (0, 0, 1)$ soit son pôle nord. A chaque point A de $\mathbb{C}$, on associe la droite qui passe par N et A, et on y fait correspondre le point A' où cette droite rencontre la sphère S.
(a) Trouver des formules pour les applications

$$S \setminus \{N\} \to \mathbb{C}, \quad A' \mapsto A, \qquad \mathbb{C} \to S \setminus \{N\}, \quad A \mapsto A',$$

qui en résultent.
(b) En déduire que l'application $A' \mapsto A$ est un homéomorphisme.
(c) Montrer que la projection stéréographique établit une correspondence biunivoque entre cercles de S et cercles et droites de $\mathbb{C}$.
(d) Pour deux points z, z' du plan complexe, calculer, en fonction de z, z', la distance euclidienne $d(A, A')$ des images réciproques $A, A' \in S$, A, A' étant considérés comme points de $\mathbb{R}^3$.
N.B. Cette distance est la distance sphérique, la sphère S étant munie de la structure riemannienne induite.
(e) Montrer que la métrique induite dans le plan complexe est équivalente à la métrique euclidienne du plan. Ici deux métriques sur un ensemble E sont dites *équivalentes* si elles induisent la même topologie sur E.
(f) Montrer que l'inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$, vue comme application de S dans S, est continue; en déduire que c'est un homéomorphisme.
(g) En déduire qu'une fraction rationnelle non constante $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, où $g(z)$ et $h(z)$ sont des polynômes non nuls premiers entre eux, est une fonction continue de la sphère S sur elle-même. Montrer en particulier que pour qu'une fraction rationnelle $f(z)$ soit un homéomorphisme de la sphère S il faut et il suffit que $f(z)$ soit une homographie, i. e. que $f(z)$ soit de la forme

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \ \ ad - bc \neq 0.$$

(h) Montrer que, le pôle nord de la sphère S ayant été identifié avec le point ∞, ce point apparaît ainsi comme point d'accumulation (ou point d'adhérence) de toute partie non bornée du plan complexe.

8) La partie du plan complexe constituée des z tels que $\cos z$ soit réel décompose le plan en domaines qu'on déterminera. La fonction $\cos z$, est-elle injective sur chacun de ces domaines?

9) Soit $f(z) = \cos(z)$.
(a) Quelles sont les images de la demi-bande $\{0 < \mathrm{Re}(z) < \pi, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et de $\{\pi < \mathrm{Re}(z) < 2\pi, \mathrm{Im}(z) < 0\}$ par f?
(b) Quelle est l'image de la bande $\{0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$ par f?
(c) Quelle est l'image du demi-plan supérieur $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ par f?
(d) Trouver l'image d'une droite $\mathrm{Re}(z) = c$.
(e) Trouver l'image d'une droite $\mathrm{Im}(z) = c$.

10) (a) Trouver un ouvert maximal tel que la restriction de $f(z) = \cos(z)$ à cet ouvert soit injective, et trouver également un domaine de définition maximal pour la fonction réciproque, arccos.
b) Vérifier que parmi les branches de arccos il y en a deux qui s'écrivent sous la forme $\arccos(w) = \pm i\mathrm{Log}(w + \sqrt{w^2 - 1})$.
c) Trouver toutes les branches de la fonction arccos.

11) Déterminer toutes les valeurs de 2^i, i^i, $(-1)^{2i}$.

12) Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Considérons la droite $y = ax + b$ dans $\mathbf{C}$ où $z = x + iy$.
(a) Décrire l'image S de cette droite par l'exponentielle et l'identifier.
(b) Trouver un groupe de transformations homographiques qui transforme S en lui-même. Est-ce qu'il y existe un tel groupe qui agit transitivement sur S?
(c) Soit D une droite quelconque passant par l'origine. Décrire les points d'intersection de D avec S.
(d) Quel groupe de transformations homographiques transforme cette intersection $D \cap S$ sur lui-même?
(e) Pour un point quelconque p de S, qu'est-ce qu'on peut dire de l'angle entre le vecteur lieu de p et le vecteur tangent en p?
(f) Déterminer l'image réciproque de S par l'exponentielle.

13) Soit $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$. La limite $\lim f(z)$, existe-t-elle dans les circonstances suivantes:
(a) $z \to 0$
(b) $z \to 0$ et $\mathrm{Re}z > 0$
(c) $z \to 0$ et $\mathrm{Re}z < 0$
(d) $z \to 0$ et $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$,
(e) $z \to 0$ et $|\arg(z) - \pi| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$.
Existe-t-il des limites uniformes, l'uniformicité interprétée convenablement?
Remarque: Quel que soit $\varepsilon > 0$, d'après le théorème de Casorati-Weierstrass, la fonction f envoie le disque pointé $0 < |z| < \varepsilon$ *sur* la partie $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ de sorte que chaque valeur $\neq 0$ soit atteinte une infinité de fois.

14) *La formule de transformation.* Soient D, E des ouverts de $\mathbf{C}$ et $\varphi\colon E \to D$ holomorphe. Soit γ une courbe dans E qui est dérivable par morceaux et $\varphi\gamma$ son image dans D. (Quelle est la définition exacte de $\varphi\gamma$?) Montrer que

$$\int_{\varphi\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

15) Pour une fonction réelle quelconque f de classe C^1 dans un domaine D de $\mathbf{C}$, rappelons la formule

$$\int_{\gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = f(b) - f(a)$$

où γ est une courbe dérivable reliant a et b, a resp. b étant le point de départ resp. d'arrivée. En déduire, pour une fonction holomorphe quelconque F, la formule

$$\int_{\gamma} F'(z)dz = F(b) - F(a).$$