# 2009/10 M305: Analyse complexe

J. Huebschmann

USTL, UFR de Mathématiques

59655 Villeneuve d'Ascq Cédex, France
Johannes.Huebschmann@math.univ-lille1.fr

Le 16 janvier 2010

# Contents

# 1 Séries entières

## 1.1 Séries formelles

### 1.1.1 L'anneau des séries formelles d'une variable

Soit $K$ un corps commutatif. Une *série formelle* (sur $K$) de la variable $X$ est une série dont le terme général est de la forme $a_n X^n$ ($n \in \mathbb{N}$), où $X$ désigne une variable et $(a_n)$ une suite donnée d'éléments de $K$. Les nombres $a_n$ sont appelés *coefficients* de la série. Le premier terme $a_0$ est souvent appelé *terme constant*. On note cette série $\sum a_n X^n$.

Soient $S(X) = \sum a_n X^n$ et $T(X) = \sum b_n X^n$ deux séries formelles. Leur *somme* $(S+T)(X)$ est la série

$$(S+T)(X) = \left(\sum a_n X^n\right) + \left(\sum b_n X^n\right) = \sum c_n X^n, \quad c_n = a_n + b_n \ (n \geq 0). \tag{1.1}$$

De même, soit $\lambda \in K$. On pose

$$\lambda \left(\sum a_n X^n\right) = \sum (\lambda a_n) . X^n \tag{1.2}$$

Ainsi les séries formelles sur $K$ de la variable $X$ constituent un $K$-*espace vectoriel*, noté $K[[X]]$. Cet espace vectoriel n'est autre que le $K$-espace vectoriel des suites $(a_n)$ d'éléments de $K$.

**Définition 1.1.** *Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites d'éléments de $K$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons*

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0.$$

*Alors la suite $(w_n)$ est appelée* convolution *ou* produit de Cauchy *des suites $(u_n)$ et $(v_n)$, noté*

$$(w_n) = (u_n) * (v_n).$$

Si nous écrivons les suites sous forme de série formelle, le produit de Cauchy prend la forme suivante:

**Définition 1.2.** *Le* produit $S \cdot T$ *des séries formelles $S$ et $T$, appelé* série-produit *de $S$ et $T$, est la série $S \cdot T$ définie par*

$$(S \cdot T)(X) = \left(\sum a_n X^n\right)\left(\sum b_n X^n\right) = \sum c_n X^n, \quad c_n = \sum_{j+k=n} a_j b_k \ (n \geq 0) \tag{1.3}$$

Ce produit munit $K[[X]]$ d'une multiplication associative et commutative. Ainsi $K[[X]]$ est un *anneau* commutatif sur $K$. Cet anneau contient, comme sous-anneau, de façon évidente, l'anneau $K[X]$ des polynômes de la variable $X$ sur $K$.

Un anneau commutatif $A$ est un *anneau intègre* si, quels que soient $a, b \in A$ avec $ab = 0$, il faut que $a = 0$ ou $b = 0$.

**Théorème 1.3.** *L'anneau $K[[X]]$ des séries formelles est un anneau intègre.*

*Démonstration.* Supposons $S(X) = \sum a_u X^u$ et $T(X) = \sum b_v X^v$ non nulles, et soit

$$(S \cdot T)(X) = \sum c_n X^n.$$

Soient $p$ et $q$ les entiers naturels les plus petits tels que $a_p$ resp. $b_q$ soient non nuls. Alors $c_{p+q}$ est non nul d'où $(S \cdot T)(X)$ est non nul. $\square$

### 1.1.2 Substitution d'une série formelle dans une autre

Soient $S(X) = \sum a_n X^n$ et $T(Y) = \sum b_n Y^n$ deux séries formelles. Supposons que $b_0 = 0$. Alors substituer $T(Y)$ à $X$ dans $S(X)$ et reordonner suivant les puissances de $Y$ donne une série formelle

$$\sum a_n \left(T(Y)\right)^n \tag{1.4}$$

de la variable $Y$.

DÉTAILS: Exercice.

Nous disons que la série formelle (1.4) résulte de $S(X)$ par *substitution de la série formelle* $T(Y)$ *à la variable* $X$, et nous notons cette série formelle $S(T(Y))$ ou bien $S \circ T$. La série formelle $S \circ T$ s'appelle aussi *composée* des séries $S$ et $T$.

**Proposition 1.4.** *Étant donné $T$, faire correspondre à $S$ la composée $S \circ T$ fournit un homomorphisme d'anneaux*

$$K[[X]] \longrightarrow K[[Y]].$$

*Démonstration.* Exercice. $\square$

Nous écrivons $S(0) = a_0$; c'est la série formelle qui résulte de $S$ par substitution de 0 à la variable $X$ ou, autrement dit, c'est la suite $(a_0, 0, 0, \ldots)$.

**Remarque 1.5.** *Si l'on ne faisait pas l'hypothèse que le terme constant $b_0$ de $T$ soit zéro, le développement formel de $S \circ T$ pourrait contenir une infinité de termes en un degré $p \geq 1$, et la définition de $S \circ T$ soulèverait des difficultés.*

### 1.1.3 Série inverse d'une série formelle

Dans l'anneau $K[[Y]]$, l'identité

$$(1 - Y)(1 + Y + Y^2 + \ldots) = 1$$

est évidente.

Soit $S(X) = \sum a_n X^n$ une série formelle avec $S(0) = a_0 \neq 0$. On appelle *série inverse* de $\sum a_n X^n$ la série formelle $\sum b_n X^n$, dont les coefficients $b_n$ sont déterminés par les relations de récurrence

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0 \\ &\cdots \\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 &= 0 \\ &\cdots . \end{aligned}$$

**Théorème 1.6.** *Pour que $S(X) = \sum a_n X^n$ admette un inverse par rapport à la multiplication dans $K[[X]]$ il faut et il suffit que $S(0) \neq 0$, c.a.d. que $a_0 \neq 0$. S'il en est ainsi, l'inverse est donné par la série inverse.*

*Démonstration.* Exercice. □

### 1.1.4 Différentiation formelle

Soit $S(X) = \sum a_n X^n$ une série formelle. La *dérivée* $S'(X)$ est la série formelle

$$\frac{dS}{dX} = S'(X) = \sum_{n \geq 1} n a_n X^{n-1}. \tag{1.5}$$

L'opération de dérivation $S \mapsto S'$ est un $K$-endomorphisme de $K[[X]]$ qui, relativement à la multiplication, vérifie la loi de *Leibniz*

$$(ST)' = S'T + ST'. \tag{1.6}$$

Pour $k \geq 2$, les *dérivées supérieures* $S^{(k)}$ sont définies par récurrence :

$$S^{(k)} = (S^{(k-1)})' \tag{1.7}$$

Ainsi

$$S^{(k)}(0) = k! a_k. \tag{1.8}$$

### 1.1.5 Série réciproque d'une série formelle

**Théorème 1.7.** *Soit $S(X) = \sum a_n X^n$ une série formelle. Pour qu'il existe une série formelle $T(Y)$ telle que $T(0) = 0$ et $S \circ T = 1$ il faut et il suffit que $S(0) = 0$ et $S'(0) \neq 0$. S'il en est ainsi, alors $T$ est unique, et $T \circ S = 1$. Autrement dit : La série $T$ est la réciproque de $S$ relativement à l'opération de substitution d'une série formelle dans une autre.*

*Démonstration.* Posons $T(Y) = \sum_{m>0} b_m Y^m$. La série composée $S \circ T$ s'écrit

$$\begin{aligned} S(T(Y)) &= a_0 + a_1 T(Y) + a_2 (T(Y)^2 + \dots \\ &= a_0 + a_1 b_1 Y + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) Y^2 + \dots \\ &\quad + (a_1 b_n + P_n(a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1})) Y^n + \dots \end{aligned}$$

où les $P_n$ $(n \geq 2)$ sont des polynômes des variables indiquées. L'identité $S \circ T = 1$ signifie

$$S(T(Y)) = Y$$

et entraîne $a_0 = 0$, $a_1 b_1 = 1$ et, en plus, les relations de récurrence

$$a_1 b_n + P_n(a_2, \dots, a_n, b_1, \dots b_{n-1}) = 0 \ (n \geq 2).$$

Pour $n \geq 2$, les coefficients $b_n$ sont ainsi déterminés par récurrence. □

Dans les circonstances du théorème 1.7, la série formelle $T(Y)$ s'appelle *série réciproque* de $S(X) = \sum a_n X^n$.

Rappel:

**Théorème** *Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur un intervalle ouvert. Pour qu'il existe une fonction $h$ de classe $C^1$ définie sur un intervalle ouvert $J$ avec $0 \in J$ telle que $h(0) = 0$ et $h \circ f = \mathrm{Id}$ dans un intervalle ouvert adaptée $I$ il faut et il suffit que $h(0) = 0$ et que $h'(0) \neq 0$.*

## 1.2 Séries entières convergentes

### 1.2.1 Le corps des nombres complexes

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ ordinaire, avec la notation

$$z = x + iy = (x, y),$$

on pose

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Cette opération de multiplication munit $\mathbb{R}^2$ d'une structure de *corps commutatif* que l'on note $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{C}$ s'appellent alors *nombres complexes*. La *conjugaison* est l'opération

$$z = x + iy \longmapsto \overline{z} = x - iy.$$

La *norme* ou le *module* $|z|$ du nombre complexe $z$ est défini par

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

Muni de cette norme, le corps $\mathbb{C}$ est *complet*, c.a.d. une suite de Cauchy de nombres complexes quelconque admet un nombre complexe unique comme limite. La *partie réelle* $\Re(z)$ et la *partie imaginaire* $\Im(z)$ du nombre complexe $z = x + iy$ sont définies par

$$\Re(z) = \tfrac{z+\overline{z}}{2}, \quad \Im(z) = \tfrac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Le corps des nombres complexes contient le corps des nombres réels comme sous-corps de façon évidente.

### 1.2.2 Convergence uniforme et normale

Soit $E$ un espace vectoriel normé. La suite de fonctions $(f_n)$ *converge uniformément* vers la fonction $f \colon E \to \mathbb{C}$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel $N$ tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in E$, on ait

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Si la suite $(f_n)$ converge simplement resp. uniformément vers la fonction $f$ on dit que $f$ est la *limite simple* resp. la *limite uniforme* de la suite $(f_n)$.

La série de fonctions $\sum u_n$ est *normalement convergente* sur l'espace vectoriel normé $E$ s'il existe une série numérique convergente, soit $\sum v_n$, et un entier naturel $n_0$ tels que, pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in E$, on ait:

$$|u_n(x)| \leq v_n.$$

Bien entendu, dans cette définition, chaque $v_n$ est un *nombre* et non une fonction.

**Théorème 1.8.** *Pour qu'une série de fonctions* $\sum u_n$ *soit uniformément convergente, il suffit qu'elle soit normalement convergente.*

### 1.2.3 Rayon de convergence

Nous désignerons par $D(z_0, r)$ le disque-plan ouvert de centre $z_0$ et de rayon $r$, soit

$$D(z_0, r) = \{z; z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < r\},$$

et par $\overline{D}(z_0, r)$ le disque-plan fermé de même centre et même rayon $r$, soit

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z; z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| \leq r\}.$$

Sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, comme d'habitude, au lieu de "série formelle", nous disons dorenavant *série entière* ou, plus précisemment, *série entière réelle* ou *série entière complexe*, suivant le cas. Ainsi une série entière complexe est une série de fonctions de terme général

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto a_n z^n,\ a_n \in \mathbb{C}.$$

Pour étudier la convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ on emploit une méthode directe, fondée sur le lemme suivant.

**Lemme 1.9** (Abel)**.** *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que la suite* $(a_n z_0^n)$ *soit bornée. Alors, pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < |z_0|$*, la série* $\sum a_n z^n$ *est absolument convergente; et la série de fonctions* $\sum a_n z^n$ *est normalement convergente dans le disque fermé* $\overline{D}(0, k|z_0|)$ *défini par* $|z| \leq k|z_0|$*, quel que soit le nombre* $k$ *vérifiant* $0 < k < 1$.

*Démonstration.* Soit $A$ un nombre réel tel que

$$|a_n z_0^n| \leq A, \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si $z_0 \neq 0$, on a alors

$$|a_n z^n| \leq A \left| \frac{z}{z_0} \right|^n;$$

par comparaison avec une série géométrique on en déduit que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| < |z_0|$ et normalement convergente pour $|z| \leq k|z_0|$ quel que soit $0 \leq k < 1$: En effet, dans ce dernier cas, on a

$$|a_n z^n| \leq A k^n,$$

et la série $\sum A k^n$ est convergente. Si $z_0 = 0$ il n'y a rien à démontrer. □

**Remarque 1.10.** *L'hypothèse du Lemme* 1.9 *est bien réalisée, en particulier, si la série* $\sum a_n z_0^n$ *est convergente. En effet, la convergence de la série* $\sum a_n z_0^n$ *exige*

$$\lim_{n \to \infty} a_n z_0^n = 0$$

*et une suite convergeant vers zéro est bornée.*

**Définition 1.11.** *Le* rayon de convergence *de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est la borne supérieure dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *de l'ensemble* $I$ *des nombres réels non négatifs* $r$ *tels que la suite* $(a_n r^n)$ *soit bornée.*

**Remarque 1.12.** *L'existence de cette borne résulte du fait que l'ensemble* $I$ *est non vide, puisqu'il contient la valeur* $r = 0$.

**Théorème 1.13.** *Soit* $R$ *le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum a_n z^n \quad (0 \leq R \leq +\infty).$$

1. *Si* $R = 0$, *cette série ne converge que pour* $z = 0$.

2. *Si* $R = +\infty$, *cette série converge absolument pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *cette convergence étant normale, donc uniforme, sur toute partie bornée de* $\mathbb{C}$.

3. *Si* $R$ *est un nombre fini non nul, la série* $\sum a_n z^n$ *est absolument convergente pour* $|z| < R$, *et divergente pour* $|z| > R$; *de plus, la convergence est normale, donc uniforme, dans le disque fermé* $\overline{D}(0, r)$, *quel que soit* $r < R$.

*Démonstration.* Soit $I$ l'ensemble des nombres réels $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée. (a) Pour que la série $\sum a_n z^n$ soit convergente il faut que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée, donc que $|z| \in I$, ce qui exige $|z| \leq R$. Pour $|z| > R$ la série $\sum a_n z^n$ est donc divergente.
(b) Supposons $R > 0$ et $|z| < R\,(R \leq +\infty)$. Par définition de la borne supérieure, il existe alors un nombre réel $r \in I$ tel que $r > |z|$; et le lemme d'Abel montre que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
(c) Supposons toujours $R > 0$, et soit $r$ donné tel que $0 < r < R$. Il existe alors un nombre $\rho \in I$ vérifiant $\rho > r$. La suite $(a_n \rho^n)$ étant bornée, le lemme d'Abel montre que la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans tout disque fermé $\overline{D}(0, k\rho)$ avec $k < 1$; en prenant $k = \frac{r}{\rho}$, on voit que la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans le disque $\overline{D}(0, r)$. Le résultat annoncé en découle. □

**Définition 1.14.** *Soit* $R$ *le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum a_n z^n \quad (0 \leq R \leq +\infty).$$

*Si* $R \neq 0$, *le disque ouvert* $D(0, R)$ *est appelé* disque de convergence *de cette série.*

**Remarque 1.15.** *Si le rayon de convergence* $R$ *d'une série entière* $\sum a_n z^n$ *est fini, on ne sait pas a priori si cette série entière converge sur le bord du disque de convergence, c.a.d. sur le cercle défini par* $|z| = R$.

Étant donnée une série entière de rayon de convergence $R$ non nul, la fonction sur le disque ouvert $D(0, R)$ qui en résulte s'appelle *fonction somme* de la série.

### 1.2.4 La formule d'Hadamard

La *limite supérieure* $L = \limsup (x_n)$ de la suite $(x_n)$ de nombres réels est caractérisée par les deux conditions suivantes.

1. Quel que soit $\lambda < L$, il y a une infinité de $x_n$ tels que $x_n > \lambda$.
2. Quel que soit $\lambda > L$, il n'y a qu'un nombre fini de $x_n$ tels que $x_n > \lambda$.

En particulier, la limite d'une suite numérique convergente coincide avec sa limite supérieure (et avec sa limite inférieure).

**Théorème 1.16** (Formule d'Hadamard)**.** *Étant donnée une série entière $\sum a_n z^n$, soit $L = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Si $0 \neq L < +\infty$, le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est le nombre $R$ défini par*

$$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} .$$

*Si $L = 0$, le rayon de convergence est $R = +\infty$, et si $L = +\infty$, le rayon de convergence est $R = 0$.*

*Démonstration.* On applique la règle de Cauchy à la série $\sum |a_n z^n|$ : Avec

$$L = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} ,$$

on a

$$\limsup |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = L|z|,$$

et, d'après des résultats de convergence de séries bien connus,

1. si $L|z| < 1$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente;
2. si $L|z| > 1$, la série $\sum a_n z^n$ est divergente.

En effet, si $L|z| < k < 1$ il n'y a qu'un nombre fini de termes tels que $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} > k$. Le résultat en découle.
*Détails*: Soit $L = \mathrm{limsup}_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Alors

$$\mathrm{limsup}_{n\to\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = L|z|.$$

Soit $L < \infty$ et soit $L|z| < 1$. Alors $\sum a_n z^n$ converge absolument. En effet, soit $k$ un réel positif tel que $L|z| < k < 1$. Il n'y a qu'un nombre fini de termes $a_n$ tels que

$$|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}} |z| > k$$

d'où, pour $n \geq n_0$, $|a_n z^n| < k^n$ et $\sum_{n \geq n_0} |a_n z^n| < \sum k^n < \infty$.

D'autre part, soit $|z| > \frac{1}{L}$, d'où

$$\mathrm{limsup}_{n\to\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = L|z| > 1.$$

Il existe un nombre infini de termes $a_n$ tels que $|a_n z^n| > 1$, et le terme général $a_n z^n$ ne tend pas vers zéro. La série $\sum a_n z^n$ est donc divergeante. □

**Remarque 1.17.** *Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.*

### 1.2.5 Détermination pratique du rayon de convergence

Il serait maladroit d'utiliser systématiquement la formule d'Hadamard dans les applications. En particulier, la règle de Cauchy et celle de d'Alembert se révèlent souvent plus pratique, et on établit sans peine les deux règles suivante.

**Proposition 1.18.** *Si la suite* $\left(|a_n|^{1/n}\right)$ *tend vers* $L$ *(*$0 \leq L \leq +\infty$*), le rayon de convergence de la série* $\sum a_n z^n$ *est*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & L \neq 0,\ L \neq +\infty, \\ 0, & L = +\infty, \\ +\infty, & L = 0. \end{cases}$$

**Proposition 1.19.** *Si* $a_n$ *est non nul pour* $n$ *assez grand et si la suite* $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ *tend vers* $L$ *(*$0 \leq L \leq +\infty$*), le rayon de convergence de la série* $\sum a_n z^n$ *est*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & L \neq 0,\ L \neq +\infty, \\ 0, & L = +\infty, \\ +\infty, & L = 0. \end{cases}$$

Exemples.

1. La série exponentielle $\mathrm{e}^z = \sum \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$: son rayon de convergence est $+\infty$, et la série est normalement convergente sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$. En particulier, quel que soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

2. La règle de d'Alembert montre que la série $\sum n! z^n$ diverge pour tout $z \neq 0$. Son rayon de convergence est donc 0.

3. La série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$. Cela résulte de la règle de d'Alembert d'où le rayon de convergence $R$ vaut 1. De plus, pour $z = 1$ la série diverge tandis que pour $z = -1$ elle converge. Le bord du disque de convergence contient donc des points de convergence et des points de divergence.

4. Les séries $\sum z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$ ont également $R = 1$ pour rayon de convergence; mais la première diverge en tout point du bord du disque de convergence et la seconde converge en tout point de ce cercle.

### 1.2.6 Somme et produit de séries entières convergentes

Rappelons le résultat suivant:

**Théorème 1.20.** *Soient* $(u_n)$ *et* $(v_n)$ *deux suites de nombres complexes telles que les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *soient absolument convergentes, et soit* $(w_n)$ *la convolution*

$$(w_n) = (u_n) * (v_n).$$

*Alors la série* $\sum w_n$ *est absolument convergente de telle sorte que*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

*La somme de la série* $\sum w_n$ *est donc égale au produit des sommes des séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$*.*

**Théorème 1.21.** *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence* $R_a$ *et* $R_b$ *non nuls. Alors chacune des séries* $\sum (a_n + b_n) z^n$ *et*

$$\sum c_n z^n, \quad \text{où} \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0,$$

*a un rayon de convergence au moins égal au plus petit des nombres* $R_a$*,* $R_b$*; et pour* $|z| < \inf(R_a, R_b)$*, on a*

$$\sum (a_n + b_n) z^n = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n,$$

*et*

$$\sum c_n z^n = \left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right).$$

*Démonstration.* Ceci résulte de l'étude des sommes et produits des séries numériques et séries complexes, voir en particulier le théoréme 1.20 ci-dessus, combiné avec les propriétés du rayon de convergence reproduites ci-dessus. □

**Corollaire 1.22.** *Les séries entières complexes convergentes, c.a.d. de rayon de convergence non nul, forment un sous-anneau de l'anneau* $\mathbb{C}[[Z]]$ *des séries formelles complexes de la variable* $Z$*.*

Exemple :

**Proposition 1.23.** *L'exponentielle* $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$*,* $z \longmapsto \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$*, est un homomorphisme du groupe additif des nombres complexes sur le groupe multiplicatif* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *constitué des nombres complexes non nuls, c.a.d. quels que soient* $u, v \in \mathbb{C}$*, ils vérifient la relation*

$$\mathrm{e}^{u+v} = \mathrm{e}^u \mathrm{e}^v, \tag{1.9}$$

*et le noyau de cet homomorphisme est le sous-groupe additif* $2\pi i\mathbb{Z}$ *de* $\mathbb{C}$*. En particulier, quels que soient* $x, y \in \mathbb{R}$*,*

$$\mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y). \tag{1.10}$$

*Démonstration.* En effet, étant donnés $u, v \in \mathbb{C}$, posons

$$a_j = \frac{u^j}{j!}, \quad b_k = \frac{v^k}{k!},$$

et considérons leur convolution

$$(c_r) = (a_j) * (b_k).$$

Pour tout $r \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} c_r &= \sum_{j=0}^{r} a_j b_{r-j} = \sum_{j=0}^{r} \frac{1}{j!(r-j)!} u^j v^{r-j} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^{r} \frac{r!}{j!(r-j)!} u^j v^{r-j} = \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} u^j v^{r-j} \\ &= \frac{(u+v)^r}{r!}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(u+v)^r}{r!} = \mathrm{e}^{u+v}.$$

D'autre part, d'après le théoréme 1.20,

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r = \left( \sum_{r=0}^{\infty} a_r \right) \left( \sum_{r=0}^{\infty} b_r \right)$$

et donc

$$\mathrm{e}^{u+v} = \mathrm{e}^u \mathrm{e}^v.$$

De plus, quel que soit $\zeta \in \mathbb{C}^*$, il existe un nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^z = \zeta$. La relation (1.10) est bien un cas particulier de (1.9), et de (1.10) on déduit que le noyau de l'exponentielle est le sous-groupe additif $2\pi i\mathbb{Z}$ de $\mathbb{C}$. □

### 1.2.7 Substitution d'une série entière convergente dans une autre

**Théorème 1.24.** *Soient $A = \sum a_n z^n$ et $B = \sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence non nuls telles que la série $A$ soit sans terme constant. Alors la série composée*

$$C = B \circ A = \sum c_p z^p$$

*a un rayon de convergence non nul; et, pour $|z|$ assez petit, les fonctions sommes $f_A$, $f_B$, $f_C$ de ces séries vérifient*

$$f_C(z) = f_B(f_A(z)). \tag{1.11}$$

*De plus, soient $R(A)$, $R(B)$, $R(C)$ les rayons de convergence; si $R(B) = +\infty$, on a $R(C) \geq R(A)$, et la relation (1.11) est vraie pour $|z| < R(A)$.*

*Démonstration.* Voir [2] (I.2.5). □

### 1.2.8 Série inverse d'une série entière convergente

Nous avons vu dans (1.1.3) que si $S(z) = \sum a_n z^n$ est une série entière avec $a_0 \neq 0$, il existe une série entière $T(z)$ et une seule telle que le produit $S(z)T(z)$ soit égal à 1.

**Proposition 1.25.** *Si le rayon de convergence de $S(z)$ est non nul il en est de même du rayon de convergence de $T(z) = \sum b_n z^n$ de la série $T$ telle que $ST = 1$, et*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = 1.$$

*Démonstration.* En multipliant $S(z)$ par une constante convenable, nous nous ramenons au cas où $a_0 = 1$. Posons alors $S(z) = 1 - U(z)$, avec $U(0) = 0$. La série inverse s'obtient par substitution de $U(z)$ à $y$ dans la série entière $1 + \sum_{n>0} y^n$. Or cette dernière série a un rayon de convergence égal à 1, donc non nul. La proposition résulte donc du théorème 1.24. □

### 1.2.9 Différentiation d'une série entière convergente

**Théorème 1.26.** *Soit $S(z) = \sum a_n z^n$ une série entière formelle, et soit*

$$S'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$$

*la série dérivée. Les séries $S$ et $S'$ ont le même rayon de convergence. De plus, si ce rayon de convergence $R$ est non nul, pour $|z| < R$, $S'(z)$ vérifie l'identité*

$$S'(z) = \lim_h \frac{S(z+h) - S(z)}{h} \tag{1.12}$$

*lorsque $h$ tend vers $0$ par valeurs $\neq 0$.*

**Remarque 1.27.** *Si $|z| < R$, on a aussi $|z+h| < R$ pour $h$ assez petit, à savoir, pour $|h| < R - |z|$; donc $S(z+h)$ est défini. D'autre part, dans la relation* (1.12)*, il est entendu que $h$ tend vers zéro par valeurs réelles non nulles si le corps des coefficients est le corps $\mathbb{R}$ et par valeurs complexes non nulles si le corps des coefficients est le corps $\mathbb{C}$. Dans le cas du corps $\mathbb{R}$, la relation* (1.12) *dit que la fonction somme de $S$ a une* dérivée *égale à la fonction somme de la série entière $S'$; dans le cas du corps complexe $\mathbb{C}$, la relation* (1.12) *exprime le fait que la fonction somme de $S$ a une* dérivée *égale à la fonction somme de la série entière $S'$ et que c'est une* dérivée même par rapport à la variable complexe *$z$. Dans tous les cas, l'existence d'une fonction dérivée implique évidemment que la fonction somme est continue à l'intérieur du disque de convergence ce qui peut d'ailleurs se montrer directement.*

*Démonstration.* Posons $\alpha_n = |a_n|$, et notons $R$ resp. $R'$ le rayon de convergence de la série $S$ resp. $S'$. Si $r < R'$, la série $\sum_{n \geq 1} n \alpha_n r^{n-1}$ converge, donc

$$\sum_{n \geq 1} \alpha_n r^n \leq r \left(\sum_{n \geq 1} n \alpha_n r^{n-1}\right) < +\infty,$$

et par suite $r \leq R$. Réciproquement, soit $r < R$, et prenons un nombre $r'$ tel que $r < r' < R$; alors

$$n \alpha_n r^{n-1} = \frac{1}{r'} (\alpha_n (r')^n) \cdot n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}.$$

Puisque $r' < R$, il existe un nombre réel $M > 0$ tel que $\alpha_n (r')^n \le M$ pour tout $n$, d'où

$$n\alpha_n r^{n-1} \le \frac{M}{r'} n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1},$$

et comme la série $\sum_{n\ge 1} n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$ converge, la série $\sum_{n\ge 1} n\alpha_n r^{n-1}$ converge également, donc $r \le R'$. Ainsi tout nombre strictement inférieur à $R'$ est majoré par $R$ et tout nombre strictement inférieur à $R$ est majoré par $R'$, d'où $R = R'$.

Il reste à établir la relation (1.12). Fixons $z$ de manière que $|z| < R$, choisissons un $r$ tel que $|z| < r < R$, et supposons désormais

$$0 \ne |h| \le r - |z|. \tag{1.13}$$

Alors $S(z+h)$ est défini et

$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - S'(z) = \sum_{n\ge 1} u_n(z,h), \tag{1.14}$$

où nous avons posé

$$u_n(z,h) = a_n \left((z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \ldots + z^{n-1} - nz^{n-1}\right).$$

Les majorations $|z| < r$ et $|z+h| \le r$ entraînent les inégalités

$$|u_n(z,h)| \le 2n\alpha_n r^{n-1},$$

et, puisque $r < R \ (= R')$,

$$\sum_{n\ge 1} n\alpha_n r^{n-1} < \infty.$$

Par conséquent, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel $n_0$ tel que

$$2\sum_{n>n_0} n\alpha_n r^{n-1} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ce choix de $n_0$ ayant ainsi été fait, la somme finie

$$\sum_{n\le n_0} u_n(z,h)$$

est un polynôme en $h$, nul pour $h = 0$; donc dès que $|h|$ est inférieur à un nombre réel $\eta$ convenable,

$$\sum_{n\le n_0} u_n(z,h) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, si $h$ satisfait à (1.13) et à $|h| \le \eta$, on déduit de (1.14) que

$$\left|\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - S'(z)\right| \le \left|\sum_{n\le n_0} u_n(z,h)\right| + 2\sum_{n>n_0} n\alpha_n r^{n-1} \le \varepsilon.$$

Donc la relation (1.12) est démontrée. □

**Corollaire 1.28.** *La fonction somme $f$ d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul est une fonction de classe $C^\infty$ sur son domaine de convergence et, pour $p \geq 1$, la $p$-ième dérivée se calcule ainsi:*

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1) a_n z^{n-p}.$$

**Corollaire 1.29.** *Si $f$ est la fonction somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul alors $\sum a_n z^n$ est la série de Taylor de la fonction $f$. En particulier, quel que soit $k \geq 0$,*

$$f^{(k)}(0) = k(k-1) \cdot \dots \cdot a_k = k! a_k. \tag{1.15}$$

*Démonstration.* Quel que soit $k \geq 0$, la relation

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1) a_n z^{n-p}$$

nous donne immédiatement l'identité (1.15). □

En particulier, les coefficients $a_n$ d'une série entière $\sum a_n z^n$ convergente sont déterminés par la restriction de sa fonction somme à un voisinage ouvert de l'origine aussi petit que l'on veut. Par conséquent :

**Corollaire 1.30.** *Étant donnée une fonction $f$ définie dans un voisinage de l'origine, il existe au plus une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul telle que la fonction somme de cette série coincide avec la fonction $f$ dans un voisinage suffisamment petit de l'origine.*

**Corollaire 1.31.** *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence non nuls. Pour que $\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$ pour tout $z$ assez proche de l'origine il faut et il suffit que $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 0$.*

Exemple. La dérivée de la fonction exponentielle $z \mapsto \mathrm{e}^z$ est la fonction exponentielle elle-même.

### 1.2.10 Série réciproque d'une série convergente

**Théorème 1.32.** *Soit $S(X) = \sum a_n X^n$ une série entière telle que $S(0) = 0$ et $S'(0) \neq 0$, et soit $T(Y)$ la série réciproque de $S$, c.a.d. la série $T(Y)$ telle que $T(0) = 0$ et $S \circ T = 1$. Si $S(X)$ a rayon de convergence non nul il en est de même de $T(Y)$.*

*Démonstration.* Ce résultat est une conséquence du théorème 6.13, qui sera établi ci-dessous. Cependant, on peut le démontrer directement, voir p. e. [2] (I.2.9). □

Exemple. La restriction de l'application exponentielle $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \mathrm{e}^z$, à l'ouvert $W = \{z = x + iy; |y| < \pi\} \subseteq \mathbb{C}$ est un difféomorphisme de $W$ sur le plan privé du demi-axe réel négatif. Par conséquent, dans le plan privé du demi-axe réel négatif, il existe une fonction complexe continue unique $\phi$, même de classe $C^\infty$, vérifiant $\phi(1) = 0$ et, pour tout point $z$ de cet ouvert, l'identité

$$\mathrm{e}^{\phi(z)} = z.$$

De plus, cette fonction $\phi$ satisfait à la majoration

$$|\Im(\phi(z))| < \pi.$$

Cette fonction est la *détermination principale* du logarithme, notée

$$\mathrm{Log}\colon \mathbb{C} \setminus \{-s; s \in \mathbb{R}, s \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{C};$$

c'est une des *branches* du logarithme complexe. La notion de branche sera précisée dans le §4.3.2 ci-dessous. Pour $z$ avec $|z| < 1$, soit

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots. \tag{1.16}$$

La série entière au membre droit de (1.16) converge pour $|z| < 1$, et

$$\mathrm{e}^{\psi(z)} = 1 + z.$$

Ainsi, pour $|z| < 1$,

$$\psi(z) = \mathrm{Log}(1 + z).$$

Cette situation illustre bien le théorème 1.32, avec

$$S(X) = \sum_{n \geq 1} \tfrac{X^n}{n!}, \quad T(Y) = \sum_{n \geq 1} \tfrac{(-1)^n}{n} Y^n.$$

Toutes les branches du logarithme complexe seront étudiées en détail dans le §4.3.2 ci-dessous.

## 1.3 Fonctions analytiques

### 1.3.1 Généralités

**Définition 1.33.** *Une fonction numérique $f\colon U \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $U$ de la droite numérique $\mathbb{R}$ est dite* analytique réelle *dans $U$ si, pour tout point $z_0$ de $U$, la fonction $u \mapsto f(z_0 + u)$ est développable en série entière dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}$. Une fonction à valeurs complexes $f\colon U \to \mathbb{C}$ définie sur un ouvert $U$ du plan complexe $\mathbb{C}$ est dite* analytique *dans $U$ si, pour tout point $z_0$ de $U$, la fonction $u \mapsto f(z_0 + u)$ est développable en série entière dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$.*

Autrement dit:

**Proposition 1.34.** *Une fonction $f$ est analytique dans $U$ si, à chaque point $z_0$ de $U$, on peut associer un nombre $r > 0$ et une suite $(a_n)$ tels que, pour $|z - z_0| < r$, on ait*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

D'après le corollaire 1.29, ce développement coincide nécessairement avec la série de Taylor de $f$ au point $z_0$.

**Théorème 1.35.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$ non nul. Alors sa fonction somme*

$$z \longmapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

*est une fonction analytique dans le disque de convergence $|z| < R$ de $\sum a_n z^n$.*

*Démonstration.* Voir [2] (I.4.2). □

En particulier, toute fonction polynôme est analytique; de même, toute fonction rationnelle est analytique.

La démonstration du théorème 1.35 repose sur le lemme suivant:

**Lemme 1.36.** *Dans les circonstances du théorème* 1.35*, soit $z_0$ un nombre complexe avec $|z_0| < R$. Alors la série entière*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} Z^n \tag{1.17}$$

*a rayon de convergence $\geq R - |z_0|$ et*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \textit{pour} \quad |z - z_0| < R - |z_0|. \tag{1.18}$$

*Démonstration.* Voir [2] (I.4.2). □

**Remarque 1.37.** *Le théorème* 1.35 *n'est pas trivial puisque, a priori, le fait que la fonction $u \mapsto f(z_0 + u)$ est développable en série entière dans un voisinage de $z_0$ n'est évident que pour $z_0 = 0$.*

### 1.3.2 Connexité et connexité par arcs

Un espace métrique est dit *connexe* s'il n'est pas réunion de deux parties ouvertes *non vides disjointes*. Une partie $A$ d'un espace métrique est dite *connexe* si $A$, munie de la métrique induite, est connexe. La *composante connexe* d'un point $a$ d'un espace métrique $E$ est la réunion des parties connexes de $E$ qui contiennent $a$. C'est aussi la plus grande partie connexe de $E$ qui contient $a$. Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Un *domaine* est une partie ouverte connexe d'un $\mathbb{R}^n$. Un espace métrique $E$ est dit *connexe par arcs* si, quel que soit le couple de points $x, y$ de $E$, il existe une courbe paramétrée continue reliant $x$ et $y$.

**Proposition 1.38.** *Pour qu'une partie ouverte $A$ d'un $\mathbb{R}^n$ soit un domaine il faut et il suffit que, quel que soit le couple de points $x, y$ de $A$, il existe une ligne polygonale reliant $x$ et $y$ et toute entière contenue dans $A$.*

*Démonstration.* Exercice. □

**Corollaire 1.39.** *Pour qu'une partie ouverte d'un $\mathbb{R}^n$ soit connexe par arcs il faut et il suffit qu'elle soit connexe.*

### 1.3.3 Prolongement analytique

**Théorème 1.40.** *Soit $f$ une fonction analytique dans un ouvert connexe $D$, et soit $z_0$ un point de $D$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *La fonction $f$ est identiquement nulle dans $D$;*
2. *la fonction $f$ est identiquement nulle dans un voisinage de $z_0$;*
3. *quel que soit l'entier naturel $n \geq 0$, la dérivée $f^{(n)}(z_0)$ d'ordre $n$ et $z_0$ est nulle.*

*Démonstration.* Il est évident que (1) entraîne (3). On va montrer que (3) entraîne (2) et que (2) entraîne (1). Supposons remplie la condition (3). On a donc $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout entier naturel $n$, en convenant que $f^{(0)} = f$. Au voisinage de $z_0$, $f$ est développable en série entière suivant les puissances de $z - z_0$, et les coefficients $\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$ sont nuls; donc $f$ est identiquement nulle dans un voisinage de $z_0$, ce qui démontre (2).

Supposons remplie la condition (2). Pour montrer que $f$ est nulle en tous les points de $D$, il suffit de montrer que l'ensemble $D' \subseteq D$ des points *au voisinage desquels $f$ est identiquement nulle* est à la fois ouvert et fermé dans $D$; car $D'$ n'est pas vide en vertu de (2), donc, puisque $D$ est connexe, $D'$ sera égal à $D$. Que $D'$ soit ouvert résulte de sa définition. Il reste à démontrer que si $w \in D$ est adhérent à $D'$, alors $w \in D'$. Soit $(w_m)$ une suite d'élements de $D'$ avec $\lim_{m\to\infty} w_m = w \in D$. Quel que soit $m$, d'après ce qui a déjà été établi (avec $w_m$ au lieu de $z_0$), on a $f^{(n)}(w_m) = 0$ pour tout entier naturel $n$. Donc, en vertu de la continuité des fonctions $f^{(n)}$, il s'ensuit que $f^{(n)}(w) = 0$ pour tout $n$. On a déjà montré que (3) entraîne (2), et ceci pour $z_0$ *quelconque*, en particulier pour $z_0 = w$. Donc $f$ est identiquement nulle au voisinage de $w$. Ainsi $w$ appartient à $D'$, ce qui achève la démonstration. □

**Corollaire 1.41.** *L'anneau des fonctions analytiques dans un ouvert connexe est un anneau intègre.*

*Démonstration.* Soient $f$ et $g$ deux fonctions analytiques dans l'ouvert connexe $D$ et soit $fg = 0$. Soit $z_0$ un point de $D$. Alors une des deux fonctions $f$ et $g$, soit $f$, est identiquement nulle dans un voisinage de $z_0$ puisque l'anneau des séries formelles est un anneau intègre. D'après le théorème 1.40, la fonction $f$ est nulle partout dans $D$. □

**Corollaire 1.42** (Principe du prolongement analytique)**.** *Deux fonctions analytiques dans un ouvert connexe $D$ qui coincident dans un voisinage d'un point de $D$ sont égales dans $D$.*

Le *problème du prolongement analytique* consiste en ceci : Étant donnée une fonction analytique $h$ dans un ouvert connexe $D'$, et étant donné un ouvert connexe $D$ contenant $D'$, on se demande s'il existe une fonction $f$ analytique dans $D$ et qui prolonge $h$. Une telle fonction $f$, si elle existe, s'appèlle *prolongement analytique* de $h$. Nous venons de voir qu'un prolongement analytique est unique s'il existe.

### 1.3.4 Multiplicité d'un zéro

Soit $f$ une fonction analytique au voisinage d'un point $z_0$, et soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

son développement en série entière autour de $z_0$ pour $|z - z_0|$ suffisamment petit. Supposons que $f(z_0) = 0$ et que $f$ ne soit identiquement nulle dans un voisinage de $z_0$.

Soit $k$ l'entier naturel le plus petit tel que $a_k \neq 0$. La série

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k}$$

converge pour $|z - z_0|$ suffisamment petit et sa fonction somme $g$ est une fonction analytique définie au voisinage de $z_0$ telle que $g(z_0) \neq 0$. Alors l'identité

$$f(z) = (z - z_0)^k \, g(z), \;\; g(z_0) \neq 0 \tag{1.19}$$

est vérifiée dans un voisinage de $z_0$. L'entier naturel $k$ ainsi déterminé s'appelle *multiplicité* ou *ordre* du zéro $z_0$ de $f$. Cet entier naturel est caractérisé par la relation (1.19) où $g$ est analytique. Il est également caractérisé par la relation

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \;\; (0 \leq n < k), \;\; f^{(k)}(z_0) \neq 0. \tag{1.20}$$

Si $k = 1$ on dit que $z_0$ est un zéro *simple*; si $k \geq 2$ on dit que $z_0$ est un zéro *multiple*.

### 1.3.5 Principe des zéros isolés

Rappelons qu'une partie $S$ d'un espace métrique $X$ est dite *discrète* si, quel que soit le point $x$ de $S$, il existe un voisinage $U$ de $x$ dans $X$ tel que $U \cap S = \{x\}$. Les points de $S$ sont alors dits *isolés.*

Le principe des zéros isolés s'énonce sous forme du théorème suivant.

**Théorème 1.43.** *Soit $f$ une fonction analytique dans un domaine $D$. Si $f$ n'est pas identiquement nulle, la partie de $D$ constituée des zéros de $f$ est une partie discrète de $D$. Autrement dit, tous les points de cette partie sont isolés.*

*Démonstration.* Supposons que $f$ ne soit identiquement nulle. D'après le corollaire 1.42, il n'existe aucun point de $D$ tel que $f$ soit identiquement nulle au voisinage de ce point. Soit alors $z_0$ un zéro de $f$. La relation (1.19) entraîne qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(z) \neq 0 \quad \text{pour} \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon.$$

Autrement dit: Le point $z_0$ admet un voisinage où $z_0$ est le seul zéro de $f$. Il s'ensuit que l'ensemble des zéros de $f$ est une partie discrète de $D$. □

**Remarque 1.44.** *L'hypothèse "D connexe" est essentielle: Si $D$ est réunion $D = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, alors la fonction $f = 0$ sur $D_1$ et $f = 1$ sur $D_2$ est bien analytique.*

Un espace métrique $E$ est dit *compact* si toute suite $(x_n)$ de points de $E$ admet une suite extraite convergente. Une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ est compacte (Théorème de Heine et Borel).

**Corollaire 1.45.** *Soit $f$ une fonction analytique dans un domaine $D$. Quelle que soit la partie compacte $C$ de $D$, il existe au plus un nombre fini de zéros de $f$ dans $C$.*

# 2 Géométrie des nombres complexes; symétries; angles

Muni de la norme $|\cdot|$ et de la distance associée, $\mathbb{C}$ s'identifie au plan *euclidien* $\mathbb{R}^2$. Nous pouvons donc employer à propos des nombres complexes le langage de la géométrie euclidienne: nous parlerons du *point* $z$ au lieu du nombre complexe $z$, nous appelerons *axe réel* la partie de $\mathbb{C}$ constituée des nombres réels, *axe imaginaire* la partie de $\mathbb{C}$ constituée des nombres complexes dont la partie réelle est nulle, *segment* $[a, b]$ la partie de $\mathbb{C}$ constituée de tous les nombres complexes de la forme $(1-t)a + tb$ $(0 \le t \le 1)$, *cercle* de centre $a$ et de rayon $\rho$ la partie de $\mathbb{C}$ constituée de tous les nombres complexes $z$ tels que $z - a| = \rho$, etc.

## 2.1 Transformations géométriques

Les opérations sur les nombres complexes s'interprètent alors comme des transformations géométriques :

$$\begin{array}{rl}
a \in \mathbb{C}: \quad z \mapsto z + a: & \text{translation} \\
z \mapsto \overline{z}: & \text{symétrie par rapport à l'axe réel} \\
z \mapsto \dfrac{1}{\overline{z}}: & \text{inversion de centre 0 et puissance 1 } (z \neq 0) \\
z \mapsto \dfrac{1}{z}: & \text{inversion-symétrie } (z \neq 0) \\
a \in \mathbb{C},\ a \neq 0: S_a\colon z \mapsto az: & \text{multiplication par } a \text{ ou homothétie complexe relative à } a.
\end{array}$$

**Définition 2.1.** *Une* similitude directe *du plan réel $\mathbb{R}^2$ est une transformation qui multiplie les distances par un réel positif et qui conserve les angles.*

**Remarque 2.2.** *L'algèbre des matrices du type $\begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix}$, $u, v \in \mathbb{R}$, est la sous-algèbre de* $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ *formée par les similitudes directes.*

**Proposition 2.3.** *Soit $a = \alpha + i\beta$ un nombre complexe, et soit $S_a\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la multiplication par a (homothétie complexe relative à a).*

- *Interprétée comme transformation du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, l'opération $S_a$ est une transformation linéaire dont la matrice dans la base $1, i$ est la similitude directe* $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

- *Toute similitude directe provient ainsi d'une homothétie complexe unique.*
- $\begin{vmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{vmatrix} = \text{dét}\begin{bmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{bmatrix} = \alpha^2+\beta^2 = |a|^2.$

*Démonstration.* Exercice. □

Le *cercle unitaire*, noté $\mathbb{S}^1$, est la partie de $\mathbb{C}$ constituée des nombres complexes de module 1. La multiplication complexe, restreinte à $\mathbb{S}^1$, munit $\mathbb{S}^1$ d'une structure de groupe abélien.

**Proposition 2.4.** *L'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $t \longmapsto \mathrm{e}^{it}$, induite par l'exponentielle complexe, est un homomorphisme du groupe additif des nombres réels sur le cercle unitaire $\mathbb{S}^1$, et le noyau de cet homomorphisme est le sous-groupe additif $2\pi\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$.*

*Démonstration.* Exercice. □

**Corollaire 2.5.**
- *Les similitudes directes du plan $\mathbb{R}^2$ forment un corps, et l'application*
$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \quad a=\alpha+i\beta \longmapsto \begin{bmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{bmatrix},$$
*établit un isomorphisme de $\mathbb{C}$ sur le corps des similitudes directes du plan $\mathbb{R}^2$.*
- *En particulier, la restriction de cet isomorphisme au cercle unitaire $\mathbb{S}^1$ établit un isomorphisme de $\mathbb{S}^1$ sur le groupe des rotations de $\mathbb{R}^2$ centrées à l'origine.*
- *Par conséquent, l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $t \longmapsto \mathrm{e}^{it}$, induit le paramétrage standard*
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}), \quad t \longmapsto \begin{bmatrix}\cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t\end{bmatrix},$$
*du groupe $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ des rotations de $\mathbb{R}^2$ centrées à l'origine.*

*Démonstration.* Exercice. □

## 2.2 Argument, angles

**Définition 2.6.** *Pour un nombre complexe $z$ non nul quelconque, un* argument *est un nombre réel $t$ tel que $z=|z|\mathrm{e}^{i\,t}$.*

L'argument n'est déterminé qu'à un multiple $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) près; la notation $\arg(z)$ désignera l'une quelconque des valeurs $t$ telles que $z=|z|\mathrm{e}^{i\,t}$. Sous forme *polaire*, le nombre complexe non nul $z$ s'écrit alors sous la forme
$$z=|z|\mathrm{e}^{i\arg(z)}=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
où $\varphi$ est *l'angle* entre le demi-axe réel positif et la direction déterminée par $z$. Ainsi, géométriquement, pour un nombre complexe $z$ non nul, $\arg(z)$ modulo $2\pi i$ est l'angle entre le demi-axe réel positif et la direction déterminée par $z$.

L'argument est une fonction *multiforme*; cette fonction résoud le problème de *mesure des angles*. La notion de fonction multiforme sera détaillée dans le §4.3.1 ci-dessous.

### 2.3 Sphère de Riemann

Considérons $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, muni de la topologie standard. Soit $u \notin \mathbb{C}$, et soit $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{u\}$, le point $u$ étant considéré comme "point idéal". Soit $\mathcal{T}$ le système des parties $V$ de $\widetilde{\mathbb{C}}$ jouissantes de la propriété suivante: Soit (i) $V \subseteq \mathbb{C}$ et $V$ est ouverte dans $\mathbb{C}$ ou soit (ii) le complémentaire de $V$ est dans $\mathbb{C}$ et y est une partie fermée et bornée.

**Proposition 2.7.** *La famille $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\widetilde{\mathbb{C}}$ telle que, dans cette topologie, $\widetilde{\mathbb{C}}$ soit un espace compact.*

*Démonstration.* Exercice. □

L'espace topologique $\widetilde{\mathbb{C}}$ que en résulte est appelé *sphère de Riemann*. Nous écrirons $\infty$ au lieu de $u$. En voici une identification explicite de $\widetilde{\mathbb{C}}$ avec une sphère:

Dans l'espace euclidien standard $\mathbb{R}^3$, nous identifierons le plan horizontal passant par l'origine au plan complexe $\mathbb{C}$, avec coordonnées $z = x + iy$. Considérons la sphère unité $\Sigma$ dans $\mathbb{R}^3$ tangente à $\mathbb{C}$ à l'origine, de sorte que le point $N = (0, 0, 2)$ soit le pôle nord de $\Sigma$. A chaque point $A$ de $\mathbb{C}$, on associe la droite qui passe par $N$ et $A$, et on y fait correspondre le point $A'$ où cette droite rencontre la sphère $\Sigma$.

**Définition 2.8.** *L'application qui fait correspondre au point $A'$ le point $A$ s'appelle* projection stéréographique.

On laisse au lecteur le soin d'en donner une interprétation géographique.

**Proposition 2.9.** *La projection stéréographique est un homéomorphisme de $\Sigma \setminus \{N\}$ sur $\mathbb{C}$ et induit un homéomorphisme de $\Sigma$ sur $\widetilde{\mathbb{C}}$. En particulier, $\widetilde{\mathbb{C}}$ est un espace compact.*

*Démonstration.* Exercice. □

Dans $\mathbb{C}$, les ouverts $|z| > r > 0$ forment un système fondamental de voisinages du point a l'infini.

**Définition 2.10.** *Une fonction $f$, définie dans l'ouvert $|z| > r > 0$, est analytique à l'infini si, par le changement de variable $z = 1/\zeta$, la fonction $f$ s'exprime comme fonction analytique de $\zeta$ pour $|\zeta| < 1/r$.*

Sur la sphère de Riemann, le principe des zéros isolées est toujours valable :

**Théorème 2.11.** *Soit $f$ une fonction analytique dans une partie ouverte et connexe $D$ de $\widetilde{\mathbb{C}}$. Si $f$ n'est pas identiquement nulle, la partie de $D$ constituée des zéros de $f$ est une partie discrète de $D$. Autrement dit, tous les points de cette partie sont isolés.*

## 3 Fonctions holomorphes. I

### 3.1 Dérivabilité ordinaire

Soit $D$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f$ une fonction réelle ou complexe définie sur $D$. La fonction $f$ est *différentiable* au point $z_0 = (x_0, y_0)$ de $D$ s'il existe deux constantes $a$ et $b$ et une fonction $\alpha$ avec $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h, k) = 0$ telles que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + \alpha(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \tag{3.1}$$

pour $h, k$ suffisamment petits. Si $f$ est différentiable en $(x_0, y_0)$, alors $a$ et $b$ sont uniques,

$$a = \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad b = \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \tag{3.2}$$

et la forme linéaire

$$(a, b) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$$

($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est la *dérivée* de $f$ au point $(x_0, y_0)$. Une fonction qui possède des dérivées partielles continues dans un ouvert est de classe $C^1$ dans cet ouvert, c.a.d. la dérivée existe en tout point de cet ouvert et y est continue.

N. B.: La dérivée $f'$ ou la différentielle $df$ d'une fonction $f\colon U \to \mathbb{K}$ définie dans un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ et différentiable en chaque point de $U$ est une fonction

$$f' = df\colon U \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{K}).$$

En particulier, les différentielles $dx$ et $dy$ sont des fonctions dans ce sens-la.

## 3.2 Holomorphie; équations de Cauchy-Riemann

Soit $D$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction complexe définie sur $D$.

**Définition 3.1.** *La fonction $f$ est* $\mathbb{C}$-dérivable *au point $z_0$ de $D$ si la limite*

$$\lim_{u \to 0, u \neq 0} \frac{f(z_0 + u) - f(z_0)}{u} \tag{3.3}$$

*existe; la fonction $f$ est* holomorphe *au point $z_0$ de $D$ s'il existe un voisinage ouvert $U$ de $z_0$ tel que $f$ soit* $\mathbb{C}$-dérivable *en chaque point de $U$. La fonction $f$ est* holomorphe *dans $D$ si elle est holomorphe en chaque point de $D$; elle est* holomorphe *dans une partie $M$ de $\mathbb{C}$ si elle est holomorphe dans un voisinage ouvert de $M$.*

Ainsi une fonction est *holomorphe* dans une partie ouverte de $\mathbb{C}$ si elle est holomorphe en chaque point de cette partie.

La condition de l'existence de la limite (3.3) s'exprime aussi sous la forme

$$f(z_0 + u) - f(z_0) = cu + \alpha(u)|u|, \quad \lim_{u \to 0} \alpha(u) = 0 \tag{3.4}$$

et le nombre complexe $c$, s'il existe, est la $\mathbb{C}$-*dérivée* ou *dérivée complexe* de $f$ au point $z_0$, notée $f'(z_0)$.

En fonction des parties réelles et imaginaires de la variable complexe, la condition (3.4) s'écrit sous la forme

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = c(h + ik) + \alpha(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}, \quad \lim_{(h,k) \to (0,0)} \alpha(h, k) = 0. \tag{3.5}$$

Si la fonction $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0$, elle est donc différentiable en tant que fonction des deux variables réelles $x$ et $y$ où $z = x + iy$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a = c, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b = ic$$

où $a$ et $b$ sont les coefficients qui figurent dans l'identité (3.1).

**Théorème 3.2.** *Pour que la fonction complexe $f$ des deux variables réelles $x$ et $y$ soit $\mathbb{C}$-dérivable par rapport à la variable complexe $z = x + iy$ au point $z_0 = x_0 + iy_0$ il faut et il suffit que, en tant que fonction des deux variables réelles $x$ et $y$, $f$ soit différentiable au point $(x_0, y_0)$ et que les dérivées partielles satisfassent, au point $(x_0, y_0)$, à l'équation*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{3.6}$$

*Démonstration.* En effet, si la fonction complexe $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable au point $z_0$, le raisonnement juste avant l'énoncé du théorème montre que les dérivées partielles satisfassent à l'équation (3.6).

Réciproquement, supposons que, en tant que fonction des deux variables réelles $x$ et $y$, la fonction complexe $f$ soit différentiable au point $(x_0, y_0)$ et que les dérivées partielles y satisfassent à l'équation (3.6). Alors la condition (3.1) entraîne la condition (3.5), avec $c = a$ et $ic = b$. □

Si nous écrivons la fonction complexe $f$ sous la forme $f = P + iQ$ où $P$ et $Q$ sont des fonctions réelles, la condition (3.6) revient aux équations dites de *Cauchy-Riemann* :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3.7}$$

## 3.3 Les variables $z$ et $\overline{z}$

Les fonctions $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$ ont les différentielles

$$dz = dx + idy, \quad d\overline{z} = dx - idy, \tag{3.8}$$

d'où

$$dx = \tfrac{1}{2}(dz + d\overline{z}), \quad dy = \tfrac{1}{2i}(dz - d\overline{z}). \tag{3.9}$$

Soit $f$ une fonction complexe, et supposons que $f$ soit différentiable relativement aux variables $x$ et $y$. En substituant $\frac{1}{2}(dz + d\overline{z})$ à $dx$ et $\frac{1}{2i}(dz - d\overline{z})$ à $dy$, nous trouvons l'expression suivante (3.10) de la différentielle ordinaire $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ de $f$ :

$$df = \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial f}{\partial x}(dz + d\overline{z}) + \tfrac{1}{2i}\tfrac{\partial f}{\partial y}(dz + d\overline{z}). \tag{3.10}$$

À l'aide des opérateurs différentiels

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{3.11}$$

l'identité (3.10) s'écrit sous la forme

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}. \tag{3.12}$$

Ainsi la condition (3.6) prend la forme

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0. \tag{3.13}$$

D'où:

**Proposition 3.3.** *Pour que la fonction $f$ dans l'ouvert $D$ de $\mathbb{C}$ soit holomorphe il faut et il suffit que $f$ satisfasse à l'identité* (3.13)*, c.a.d. que la différentielle $df$ soit proportionnelle à $dz$. S'il en est ainsi, le facteur de proportionalité est la $\mathbb{C}$-dérivée $f'$ de $f$.*

## 3.4 Développement de Taylor: Analyticité des fonctions holomorphes

**Théorème 3.4.** *Soit $f$ holomorphe dans le disque $|z| < \rho$. Alors $f$ admet dans ce disque un développement en série entière. C.a.d.: Il existe une série entière $S(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $\geq \rho$ telle que, dans le disque $|z| < \rho$, la fonction somme $S$ de la série coincide avec $f$.*

À cette étape, nous ne disposons pas encore de la technologie pour pouvoir démontrer le théorème de Taylor, et nous reportons la démonstration à la partie 6.3 ci-dessous.

**Remarque 3.5.** *Le théorème* 3.4 *montre que toute fonction holomorphe dans un ouvert $D$ est analytique dans $D$. Réciproquement, d'après le théoréme* 1.26*, toute fonction analytique dans un ouvert $D$ admet une $\mathbb{C}$-dérivée dans $D$ et est donc nécessairement holomorphe dans $D$. Ainsi, pour les fonctions d'une variable complexe, les notions d'analycité et d'holomorphie sont équivalentes. Si on applique aux fonctions holomorphes la théorie développée pour les fonctions analytiques, on arrive au résultat suivant:*

**Théorème 3.6.** *Une fonction holomorphe est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable, et la dérivée d'une fonction holomorphe est holomorphe.*

En voici, comme conséquence immédiate, une version du théorème de Taylor.

**Théorème 3.7** (Taylor)**.** *Pour une fonction holomorphe $f$ dans l'ouvert $D$ et un point quelconque $z_0$ de $D$, la série*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots$$

*converge dans le disque le plus grand dans $D$ ayant $z_0$ pour centre.*

Illustration. Soient $a$, $b$ et $z_0$ trois nombres complexes deux à deux distincts. Le développement de la fonction $f$ donnée par

$$f(z) = \frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b}$$

en série entière centrée en $z_0$ a rayon de convergence $\min(|a - z_0|, |b - z_0|)$.

# 4 Exemples de fonctions analytiques

## 4.1 Homographies

**Définition 4.1.** *Une* homographie*, ou* transformation homographique*, ou* fonction homographique *(non dégénérée) est une fonction analytique $f$ qui s'écrit sous la forme*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0. \tag{4.1}$$

Ici la non dégénérescence signifie que $ad - bc \neq 0$. Étant donnée une homographie du type (4.1), on la prolonge à la sphère de Riemann $\widetilde{\mathbb{C}}$ en convenant que

$$f(-\frac{d}{c}) = \infty, \text{ si } c \neq 0, \quad f(\infty) = \frac{a}{c} \ (= \infty \text{ si } c = 0). \tag{4.2}$$

Rappelons que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est le groupe des $(2,2)$-matrices complexes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ telles que $ad - bc = 1$; étant donnée une telle matrice, soit $f = f_{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$ l'homographie donnée par la formule (4.1).

**Proposition 4.2.** *1. Une homographie $f$ du type* (4.1) *est bijective, même un homéomorphisme $f\colon \widetilde{\mathbb{C}} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{C}}$, dont l'application réciproque est l'homographie $h$ donnée par*

$$h(w) = \frac{dw - b}{a - cw}. \tag{4.3}$$

2. *Par conséquent, les homographies forment un groupe $H$. L'application*

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow H, \ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto f_{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}},$$

*est un homomorphisme dont le noyau est isomorphe au groupe de deux éléments, l'élément non trivial du noyau étant la matrice* $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. *Une homographie quelconque s'écrit comme composée de translations avec homothéties non nulles et une inversion-symétrie $z \mapsto \frac{1}{z}$. Plus précisement, une homographie $h$ du type*

$$h(z) = \frac{a}{d}z + b \quad (ad \neq 0)$$

*est la composée d'une translation avec une homothétie non nulle, et une homographie $f$ quelconque du type* (4.1) *avec $c \neq 0$ s'écrit*

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}. \tag{4.4}$$

4. *Par conséquent, une homographique (non dégénérée) transforme une droite ou un cercle en une droite ou un cercle.*

5. *Les points invariants à distance finie de l'homographie* (4.1) *sont les racines de l'équation*

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0. \tag{4.5}$$

*De plus, pour que le point $\infty$ soit invariant il faut et il suffit que $c = 0$.*

6. *Par conséquent, toute homographie (non dégénérée) distincte de l'identité possède un ou deux points invariants.*

7. *Il existe une homographie unique qui applique trois points distincts $z_1$, $z_2$, $z_3$ de $\widetilde{\mathbb{C}}$ sur trois points distincts $w_1, w_2, w_3$ de $\widetilde{\mathbb{C}}$.*

8. *Une homographie (non dégénérée) quelconque conserve les angles.*

*Démonstration.* Vérification de 6): D'après l'énoncé 5), l'homographie (4.1) possède un ou deux points invariants sauf si l'équation (4.5) est indéterminée, c.a.d. si $b = c = 0$ et $a = d$; mais alors l'homographie (4.1) est l'identité.
Vérification de 8): Il suffit de raisonner dans le cas particulier où $w_1 = \infty$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$. En effet, si l'homographie $f$ resp. $g$ applique $z_1$, $z_2$, $z_3$ resp. $w_1, w_2, w_3$ sur $\infty$, 0, 1, la transformation composée $g^{-1}f$ répond à la question.

Si $z_1$, $z_2$, $z_3$ sont finis, la transformation cherchée est

$$z \longmapsto \frac{(z_3 - z_1)(z - z_2)}{(z_3 - z_2)(z - z_1)}.$$

Si $z_1$, $z_2$, ou $z_3$ est infini, la transformation cherchée est

$$z \longmapsto \frac{z - z_2}{z_3 - z_2}, \quad \text{resp.} \quad z \longmapsto \frac{z_3 - z_1}{z - z_1}, \quad \text{resp.} \quad z \longmapsto \frac{z - z_2}{z - z_1}. \quad \square$$

L'énoncé 8) résulte du théorème 6.15, qui sera établi plus tard.
Les autres assertions sont laissées comme exercices. □

## 4.2 Fonctions transcendentes qui se déduisent de l'exponentielle

### 4.2.1 Fonctions hyperboliques

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(z) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}) \\
\mathrm{sh}(z) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}) \\
\mathrm{th}(z) &= \frac{\mathrm{sh}(z)}{\mathrm{ch}(z)} = \frac{\mathrm{e}^{2z} - 1}{\mathrm{e}^{2z} + 1}
\end{aligned}$$

On en déduit les formules classiques

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}^2(z) - \mathrm{sh}^2(z) &= 1 \\
\mathrm{ch}(a + b) &= \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b) \\
\mathrm{sh}(a + b) &= \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b).
\end{aligned}$$

### 4.2.2 Fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}) \\ \sin(z) &= \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}) \\ \mathrm{tg}(z) &= \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{e}^{2iz} - 1}{\mathrm{e}^{2iz} + 1}\end{aligned}$$

Il en résultent les identités

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \mathrm{ch}(iz) \\ i\sin(z) &= \mathrm{sh}(iz) \\ i\,\mathrm{tg}(z) &= \mathrm{th}(iz).\end{aligned}$$

On en déduit les formules classiques

$$\begin{aligned}\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 & \\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

et les formules de transformation:

$$\begin{aligned}\cos(x+iy) &= \cos(x)\mathrm{ch}(y) - i\sin(x)\mathrm{sh}(y) \\ \sin(x+iy) &= \sin(x)\mathrm{ch}(y) + i\cos(x)\mathrm{sh}(y)\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}|\cos(x+iy)|^2 &= \cos^2(x) + \mathrm{sh}^2(y) \\ |\sin(x+iy)|^2 &= \sin^2(x) + \mathrm{ch}^2(y).\end{aligned}$$

On en déduit que les fonctions analytiques cos et sin ne s'annulent que pour des arguments réels.

## 4.3 Fonctions réciproques des fonctions usuelles

### 4.3.1 Fonctions multiformes

La fonction réciproque d'une fonction $f$ n'existe que si $f$ est injective. Si ce n'est pas le cas, on ne pourra définir que des *branches* de fonction réciproque, qui seront les fonctions inverses des restrictions de $f$ à des ensembles où $f$ est injective; par abus de langage, il convient de dire que ces diverses branches constituent une fonction *multiforme* : Une fonction multiforme associe à un même argument plusieurs valeurs.

**Définition 4.3.** *Soit $f$ une fonction à valeurs complexes définie et continue dans une partie ouverte $U$ de $\mathbb{C}$. Une fonction continue $\varphi$ à valeurs complexes définie dans une partie ouverte $D$ de $\mathbb{C}$ est une* branche uniforme *de la fonction réciproque de $f$ si $\varphi(D)$ est une partie ouverte de $\mathbb{C}$ contenue dans $U$, et si $f(\varphi(z)) = z$ pour tout $z \in D$.*

La famille des branches $\varphi$ de la fonction réciproque de $f$ constitue par définition la fonction *réciproque multiforme* $f^{-1}$ de $f$. La notation $f^{-1}(z)$ désignera dans la suite l'une quelconque des valeurs $\varphi(z)$; on dira que chacune de ses valeurs est une *détermination* de $f^{-1}(z)$.

### 4.3.2 Logarithme

Soit $w$ un nombre complexe; nous cherchons tous les nombres complexes $z$ tels que $\mathrm{e}^z = w$. Pour que $w$ soit de cette forme il faut (et il suffit) que $w \neq 0$. S'il en est ainsi, les nombres complexes cherchés sont de la forme

$$\log |w| + i \arg(w). \tag{4.6}$$

Ainsi, si $w_1 \neq 0$ et $w_2 \neq 0$,

$$\log |w_1 w_2| + i \arg(w_1 w_2) = \log |w_1| + i \arg(w_1) + \log |w_2| + i \arg(w_2) \qquad \mod 2\pi i. \tag{4.7}$$

**Définition 4.4.** *Une* branche *de l'argument est une fonction (réelle) continue $h$ définie sur un ouvert connexe $D$ de $\mathbb{C}$ qui ne contient pas l'origine telle que*

$$\mathrm{e}^{ih(w)} = \frac{w}{|w|}, \qquad \textit{quel que soit} \quad w \in D. \tag{4.8}$$

*Une* branche *du logarithme complexe est une fonction (complexe) continue $f$ définie sur un ouvert connexe $D$ de $\mathbb{C}$ qui ne contient pas l'origine telle que*

$$\mathrm{e}^{f(w)} = w, \qquad \textit{quel que soit} \quad w \in D. \tag{4.9}$$

**Proposition 4.5.**

- *S'il existe, dans l'ouvert connexe $D$, une branche $h$ de l'argument, alors toutes les branches de l'argument sont de la forme $h + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et, réciproquement, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, la fonction donnée par $h + 2k\pi$ est une branche de l'argument.*

- *S'il existe, dans l'ouvert connexe $D$, une branche $f$ du logarithme complexe, alors toutes les branches du logarithme complexe sont de la forme $f + 2k\pi i$ où $k \in \mathbb{Z}$ et, réciproquement, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, la fonction donnée par $f + 2k\pi i$ est une branche du logarithme complexe.*

- *Chaque branche de l'argument définit une branche du logarithme complexe et, réciproquement, chaque branche du logarithme complexe définit une branche de l'argument.*

*Démonstration.* Soient $h_1$ et $h_2$ deux branches de l'argument, définies sur l'ouvert connexe $D$. Alors les valeurs de la fonction $h$ définie par

$$h(w) = \frac{h_1(w) - h_2(w)}{2\pi}$$

sont des entiers. Puisque $h$ est continue et $D$ connexe, $h$ est constante. Car la partie de $D$ où $h$ prend une valeur fixée est ouverte et fermée dans $D$ et donc ou bien vide ou bien $D$ tout entier. Les autres assertions sont immédiates. □

**Proposition 4.6.** *Soit $D = \mathbb{C} \setminus \{-s; s \in \mathbb{R}, s \geq 0\}$, c.a.d., la partie $D$ est supposée d'être $\mathbb{C}$ privé du demi-axe réel négatif.*

1. *Il existe une branche de l'argument sur $D$.*
2. *Il existe une branche du logarithme complexe sur $D$.*

*Démonstration.* Notons $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ le cercle unitaire $|z| = 1$. L'application

$$p \colon D \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}, \quad z \longmapsto \frac{z}{|z|},$$

est bien continue, et l'application

$$\varphi \colon ]-\pi, \pi[ \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}, \quad y \longmapsto \mathrm{e}^{iy},$$

est bijective, même un homeomorphisme. En effet, soit $y_0 \in ]-\pi, \pi[$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle compact $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ soit une partie de $]-\pi, \pi[$. La restriction de $\varphi$ à $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ est un homéomorphisme. Le composée

$$\varphi^{-1} \circ p \colon D \longrightarrow ]-\pi, \pi[$$

est la branche de l'argument cherchée. La deuxième assertion est une conséquence immédiate de la première. □

**Définition 4.7.** *La branche de l'argument précisée dans la proposition* 4.6 *est la* détermination principale *ou* branche principale *de l'argument, notée* Arg. *La branche du logarithme complexe précisée dans la proposition* 4.6 *est la* détermination principale *ou* branche principale *du logarithme complexe, notée* Log.

### 4.3.3 Fonctions puissance

La fonction multiforme

$$z \longmapsto z^a, \quad z \neq 0, \; a \in \mathbb{C},$$

est définie de la façon suivante: À chaque branche $\varphi$ du logarithme complexe, on fait correspondre une branche $\psi$ de $z^a$ par la formule

$$\psi(z) = \mathrm{e}^{a\varphi(z)}. \tag{4.10}$$

On obtient ainsi en général une infinité de valeurs possibles pour $z^a$; il y en a un nombre fini seulement si $a$ est un nombre rationnel, et un seul si $a$ est entier.

**Remarque 4.8.** *Lorsque $a$ est réel, on peut définir par continuité $z^a$ même pour $z = 0$ ou $z = \infty$: Si $a$ est réel positif on pose $0^a = 0$, $\infty^a = \infty$; si $a$ est réel negatif on pose $0^a = \infty$, $\infty^a = 0$.*

*Si $a$ n'est pas un entier, quel que soit le voisinage de 0 ou de $\infty$, on ne peut définir aucune branche de la fonction puissance $z \mapsto z^a$ dans ce voisinage car la fonction ne reprend pas sa valeur initiale après qu'on ait effectué un tour autour de l'origine sur une circonférence puisque l'argument de $z^a$ varie de $2\pi\Re(a)$.*

### 4.3.4 Fonctions trigonométriques inverses et fonctions hyperboliques inverses

On peut ramener à la fonction logarithme et eventuellement à la fonction racine carrée les fonctions trigonométriques et hyperboliques inverses :

La relation $w = \arccos(z)$ équivaut à

$$z = \cos(w) = \frac{\mathrm{e}^{iw} + \mathrm{e}^{-iw}}{2}.$$

Avec $\zeta = \mathrm{e}^{iw}$ on obtient l'identité

$$z = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1})$$

d'où

$$\zeta^2 - 2z\zeta + 1 = 0$$

et, si le radical $\sqrt{z^2-1}$ désigne une des deux déterminations de $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$,

$$\zeta = z \pm \sqrt{z^2-1}$$

d'où

$$\arccos(z) = -i\log(z \pm \sqrt{z^2-1}) = \pm i \log(z + \sqrt{z^2-1}).$$

On peut déduire de cette formule des branches uniformes de la fonction arccos.

De même, la relation $w = \operatorname{arctg}(z)$ équivaut à

$$z = \operatorname{tg}(w) = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{e}^{2iw} - 1}{\mathrm{e}^{2iw} + 1}$$

d'où

$$\operatorname{arctg}(z) = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz} \tag{4.11}$$

ce qui montre que la fonction arctg est la composée du logarithme et d'une homographie.

On traite les fonction hyperboliques inverses de la même manière.

# 5 Intégrales de Cauchy

## 5.1 Intégration sur une courbe paramétrée de formes différentielles

Soit $D$ un domaine de $\mathbb{R}^2$. Une *forme différentielle* de classe $C^k$ dans $D$ est une application $\omega\colon D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ de classe $C^k$. Pour que la forme différentielle $\omega = f dx + h dy$ soit de classe $C^k$ il faut et il suffit que $f$ et $h$ le soient.

Une *courbe paramétrée* dans $D$ est une application

$$\gamma\colon I \longrightarrow D,$$

appelée *paramétrage*, définie sur un intervalle $I = [a, b]$. La courbe $\gamma$ est *continue* ou *de classe* $C^k$ si elle a cette propriété en tant qu'application. Le point $\gamma(a)$ est le *point de* *départ* de $\gamma$ et le point $\gamma(b)$ est son *point d'arrivée*; on appelle $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ *extrémités* de $\gamma$. La courbe continue $\gamma$ est *fermée* ou un *lacet* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Soit $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow D$ une courbe paramétrée de classe $C^1$ et soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle dans $D$. Comme d'habitude, on définit l'intégrale *curviligne* $\int_\gamma \omega$ par

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^* \omega. \tag{5.1}$$

Ici $\gamma^*\omega$ est la forme différentielle *induite*, soit

$$\gamma^*\omega = (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt.$$

Étant donnée la courbe paramétrée $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow D$, un *changement de paramétrage* est une application

$$[a_1, b_1] \longrightarrow [a,b], \;\; u \longmapsto t(u),$$

telle que $t'(u) > 0$, quel que soit $u \in [a_1, b_1]$; alors le paramétrage

$$\gamma_1 = \gamma \circ t\colon [a_1, b_1] \longrightarrow D$$

fournit aussi une courbe paramétrée (dans $D$), et

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

La notion de changement de paramétrage entraîne une relation d'équivalence; une *courbe orientée* est alors une classe d'équivalence, et l'intégrale $\int_\gamma \omega$ ne dépend que de la classe d'équivalence de $\gamma$. Par abus de langage, nous identifiérons souvent en notation deux courbes paramétrées qui ne diffèrent que par un changement de paramétrage.

Soit $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow D$ une courbe paramétrée. Un *changement d'orientation* est induit par une application

$$[a_1, b_1] \longrightarrow [a,b], \;\; u \longmapsto t(u),$$

telle que $t'(u) < 0$, quel que soit $u \in [a_1, b_1]$; alors, quel que soit la forme différentielle $\omega$ dans $D$,

$$\int_\gamma \omega = -\int_{\gamma_1} \omega.$$

Soit $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow D$ une courbe paramétrée continue; elle est dite de classe $C^k$ *par morceaux* s'il existe une subdivision

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k+1} = b$$

de $[a,b]$ telle que, quel que soit $j$, $0 \leq j \leq k$, la restriction de $\gamma$ à $]a_j, a_{j+1}[$ soit restriction d'une courbe paramétrée $\gamma_j\colon [a_j, a_{j+1}] \to D$ de classe $C^k$, définie sur l'intervalle *fermé* $[a_j, a_{j+1}]$.

Soit $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow D$ une courbe paramétrée de classe $C^1$ *par morceaux*, relativement à la subdivision $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k+1} = b$; alors, quelle que soit la forme différentielle $\omega$ dans $D$, on pose

$$\int_\gamma \omega = \sum \int_{\gamma_j} \omega.$$

Les propriétés de l'intégrale simple entraînent immédiatement les propriétés suivantes de l'intégrale d'une 1-forme :

**Proposition 5.1.** *Soient $\alpha$ et $\beta$ deux formes différentielles de classe $C^0$ dans $D$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.*

1. Linéarité par rapport aux formes*:* $\int_\gamma (\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda \int_\gamma \alpha + \mu \int_\gamma \beta$
2. Additivité par rapport aux arcs*: Si $c \in ]a, b[$ et si $\gamma_1$ et $\gamma_2$ désignent les parties d'une courbe paramétrée $\gamma\colon [a, b] \to D$ de classe $C^1$ par morceaux reliant $\gamma(a)$ et $\gamma(c)$ resp. $\gamma(c)$ et $\gamma(b)$, alors*
$$\int_\gamma \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha + \int_{\gamma_2} \alpha.$$
3. *Étant donnée une courbe paramétrée $\gamma\colon [a, b] \to D$ de classe $C^1$ par morceaux, si $-\gamma$ désigne la courbe paramétrée de l'orientation opposée, c'est-à-dire,*
$$-\gamma(t) = \gamma\,(b + a - t)\,,$$
*alors*
$$\int_{-\gamma} \alpha = -\int_\gamma \alpha.$$

## 5.2 Primitive d'une forme différentielle

Soit $D$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ et soit $\omega$ une forme différentielle dans $D$. Une *primitive* de $\omega$ est une fonction $F$ sur $D$ telle que $dF = \omega$.

Soit $F$ une primitive de $\omega$, et soit $\gamma[a, b] \to D$ une courbe de classe $C^1$ par morceaux. Alors il est évident que
$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \tag{5.2}$$
Par conséquent, en vertu de la proposition 1.38, si $dF = 0$, alors $F$ est *constante*.

**Théorème 5.2.** *Pour que la forme différentielle $\omega$ dans $D$ admette une primitive il faut et il suffit que, quelle que soit la courbe fermée $\gamma$ dans $D$, de classe $C^1$ par morceaux,*
$$\int_\gamma \omega = 0.$$
*S'il en est ainsi, étant donné un point quelconque $x_0$ de $D$, une primitive $F$ de $\omega$ est donnée par la formule*
$$F(x) = \int_{\gamma_x} \omega \tag{5.3}$$
*où $\gamma_x$ est une courbe de classe $C^1$ par morceau reliant $x_0$ a $x \in D$.*

*Démonstration.* Voir [2] (II.1.2.1). □

**Théorème 5.3.** *Soit $D$ un disque ouvert. Pour que la forme différentielle $\omega$ dans $D$ admette une primitive il suffit que, quel que soit le rectangle dans $D$ parallèle aux axes, l'intégrale $\int_\gamma \omega$ relativement au bord $\gamma$ de ce rectangle soit nulle.*

*Démonstration.* Voir e. g. [2] (II.1.2.2). □

## 5.3 La formule de Green-Riemann

Soit $D$ un domaine de $\mathbb{R}^2$. Une courbe paramétrée fermée $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow D$ dans $D$ est *simple* si la restriction de $\gamma$ à $[a,b[$ est injective.

**Théorème 5.4.** *Soit $\omega = fdx + gdy\colon D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ une forme différentielle de classe $C^1$ dans le domaine $D$ du plan $\mathbb{R}^2$ et soit $B \subseteq D$ une partie fermée, bornée par une courbe fermée paramétrée simple de classe $C^1$ par morceaux $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow D$, orientée dans le sens direct, c.a.d. comme le repère des coordonnées ordinaire. Alors*

$$\int_\gamma \omega = \int_B \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy.$$

*Démonstration.* Ce résultat sera supposé connu de la deuxième année; voir e. g. [2] (II.2.3) pour le cas particulier où $B$ est un rectangle. □

**Théorème 5.5.** *Soit $\omega = fdx + gdy\colon D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ une forme différentielle de classe $C^1$ dans $D$. Pour que $\omega$ admette une primitive (dans $D$), il faut que*

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{5.4}$$

*Si $D$ est un disque ouvert, la condition est aussi suffissante.*

*Démonstration.* Voir [2] (II.1.3.1). □

## 5.4 Formes différentielles fermées

Soit $D$ un domaine de $\mathbb{R}^2$.

**Définition 5.6.** *Une forme différentielle $\omega$ dans $D$ est* fermée *si tout point $z$ de $D$ a un voisinage où $\omega$ admet une primitive.*

**Théorème 5.7.** *Pour que la forme différentielle $\omega$ de classe $C^0$ dans $D$ soit fermée il faut et il suffit que, quel que soit le rectangle parallèle aux axes et contenu avec son intérieur dans $D$, l'intégrale $\int_\gamma \omega$ relativement au bord $\gamma$ de ce rectangle soit nulle.*

*Démonstration.* Voir [2] (II.1.4.1). □

**Théorème 5.8.** *Pour que la forme différentielle $\omega = fdx + gdy$ de classe $C^1$ dans $D$ soit fermée il faut et il suffit que $\omega$ vérifie la condition* (5.4).

*Démonstration.* Voir [2] (II.1.4.1). □

**Théorème 5.9.** *Soit $D = \mathbb{C} \setminus 0$. La forme différentielle $\frac{dz}{z}$ n'admet pas de primitive.*

*Démonstration.* Soit $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C} \setminus 0$ le cercle unitaire

$$\gamma(t) = \cos t + i \sin t = \mathrm{e}^{it}.$$

Alors $dz = izdt$, d'où

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i,$$

et l'énoncé résulte du théorème 5.2. $\square$

Examinons la partie imaginaire

$$\alpha = \frac{x}{r^2}dy - \frac{y}{r^2}dx$$

de la forme différentielle $\frac{dz}{z}$ sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus 0$. Soit $U$ le domaine

$$U = \{(x,y); (x,y) \neq (r,0) \text{ avec } r \geq 0\}.$$

Alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right) = \frac{r^2 - 2x^2}{r^4} = \frac{y^2 - x^2}{r^4}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^2}\right) = \frac{r^2 - 2y^2}{r^4} = \frac{x^2 - y^2}{r^4},$$

c'est-à-dire, $\alpha$ est fermée, en effet, $\alpha$ vérifie la condition (5.4). Une primitive $g$ de $\alpha$ sur $U$ est bien connue: On peut prendre

$$g(x,y) = \text{Arcctg}\left(\frac{x}{y}\right), \quad \text{lorsque} \quad y > 0,$$
$$g(x,y) = \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, \quad \text{lorsque} \quad x < 0,$$
$$g(x,y) = \text{Arcctg}\left(\frac{x}{y}\right) + \pi, \quad \text{lorsque} \quad y < 0.$$

Cependant, on ne peut pas prolonger $g$ dans le plan tout entier puisqu'on obtiendrait alors

$$g(r,0) = 0 = 2\pi = 4\pi$$

etc. Dans le plan privé de l'origine, la fonction Arctg est *multiforme*.

Pour illustrer la formule (5.3), soit $V$ le plan $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite

$$\{r(1,-\varepsilon); r \geq 0\}.$$

Si nous prenons

$$\gamma\colon [0, 2\pi - \delta] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)) = (r\cos t, r\sin t),$$

avec un $\delta > 0$ adapté (dépendant de $\varepsilon$), la formule (5.3) nous donne l'expression

$$\begin{aligned} g(x(\vartheta), y(\vartheta)) &= \int_0^\vartheta \langle \alpha(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\ &= \int_0^\vartheta \left\langle \frac{1}{r}(-\sin t, \cos t), (-r\sin t, r\cos t)\right\rangle dt \\ &= \int_0^\vartheta (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \vartheta \end{aligned}$$

pour une primitive $g$ de $\alpha$ sur $V$.

## 5.5 Primitives multiformes

Nous avons vu qu'une forme différentielle fermée dans un ouvert connexe $D$ de $\mathbb{C}$ n'admet pas nécessairement une primitive.

**Définition 5.10.** *Soit $\omega$ une forme différentielle fermée dans l'ouvert connexe $D$ de $\mathbb{C}$, et soit $\gamma\colon [a,b] \to D$ une courbe paramétrée continue. Une* primitive *de $\omega$* le long de *$\gamma$ est une fonction continue $f\colon [a,b] \to D$ satisfaisant à la condition* (P) *suivante:*
(P): *Quel que soit $\tau \in [a,b]$, il existe, dans un voisinage $V$ du point $\gamma(\tau)$ de $D$, une primitive $F$ de $\omega$ telle que,*

$$F(\gamma(t)) = f(t), \tag{5.5}$$

*quel que soit $t \in \gamma^{-1}(V)$.*

**Théorème 5.11.** *Soit $\omega$ une forme différentielle fermée dans l'ouvert connexe $D$ de $\mathbb{C}$, et soit $\gamma\colon [a,b] \to D$ une courbe paramétrée continue. Il existe toujours une primitive de $\omega$ le long de $\gamma$, et cette primitive est unique à l'addition d'une constante près.*

*Démonstration.* (Comparer [2] (II.1.5)). Soient $f_1$ et $f_2$ deux primitives de ce type, et soit $\tau \in [a,b]$. Il existe des primitives locales $F_1$ et $F_2$ de $\omega$ telles que, quel que soit $t \in [a,b]$ au voisinage de $\tau$,

$$f_1(t) - f_2(t) = F_1(\gamma(t)) - F_2(\gamma(t)).$$

Puisque la différence $F_1 - F_2$ est constante, il s'ensuit que la différence $f_1 - f_2$ est constante au voisinage de $\tau$. Par conséquent, le point $\tau$ de $[a,b]$ étant arbitraire, la différence $f_1 - f_2$ est localement constante sur $[a,b]$. Puisque $[a,b]$ est connexe, $f_1 - f_2$ est nécessairement constante sur $[a,b]$. Car une fonction continue et localement constante sur un espace connexe est nécessairement constante: La partie où la fonction prend la valeur disons $u$ est ouverte et fermée.

Il reste à établir l'existence de la primitive $f$ satisfaisant à la propriété (P). Un point quelconque $\tau$ de $[a,b]$ admet un voisinage $V$ dans $[a,b]$ tel que $\gamma(V)$ soit contenu dans un disque ouvert dans lequel $\omega$ admet une primitive $F$. Puisque l'intervalle $[a,b]$ est compact, il existe une subdivision

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k+1} = b \tag{5.6}$$

de $[a,b]$ telle que, quel que soit $j$, $0 \leq j \leq k$, $\gamma[a_j, a_{j+1}]$ soit contenu dans un disque ouvert $U_j$ de $\mathbb{C}$ sur lequel $\omega$ admette une primitive $F_j$. Pour $0 \leq j \leq k$, l'intersection $U_j \cap U_{j+1}$ n'est pas vide car $\gamma(a_{j+1})$ y appartient et cette intersection est connexe, d'où $F_{j+1} - F_j$ est constante dans $U_j \cap U_{j+1}$. En rajoutant une constante adaptée à $F_j$ on arrive à la situation où $F_{j+1}$ coincide avec $F_j$ sur $U_j \cap U_{j+1}$. Alors, pour $t \in [a_j, a_{j+1}]$, posons

$$f(t) = F_j(\gamma(t)).$$

La fonction $f$ est continue et satisfait à la condition (P). $\square$

Soit $\omega$ une forme différentielle fermée, et soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ une courbe de classe $C^1$ par morceaux, relativement à une subdivision de $[a,b]$ du type (5.6); supposons que, quel que soit $j$, $0 \leq j \leq k$, $\gamma[a_j, a_{j+1}]$ soit contenu dans un disque ouvert $U_j$ de $\mathbb{C}$ dans lequel $\omega$ admette une primitive $F_j$, comme dans la démonstration du théorème 5.11. Pour $0 \le j \le k$, soit $\gamma_j$ la restriction de $\gamma$ à $]a_j, a_{j+1}[$. Par définition,

$$\int_\gamma \omega = \sum \int_{\gamma_j} \omega.$$

D'après l'identité (5.2), si $f$ est une primitive de $\omega$ le long de $\gamma$, pour $0 \le j \le k$,

$$\int_{\gamma_j} \omega = f(a_{j+1}) - f(a_j),$$

d'où

$$\int_\gamma \omega = f(b) - f(a). \tag{5.7}$$

**Remarque 5.12.** *Pour une courbe paramétrée continue $\gamma$ qui n'est pas $C^1$ par morceaux, on peut ainsi définir l'intégrale $\int_\gamma \omega$ par le membre droit de l'identité* (5.7)*; ce membre droit ne dépend pas du choix de $\gamma$.*

**Théorème 5.13.** *Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ une courbe paramétrée fermée continue et $C^1$ par morceaux. Alors la valeur $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}$ est un entier.*

*Démonstration.* La forme différentielle $\frac{dz}{z}$ est fermée. On peut supposer que chacune des fonctions $F_j$ dans la démonstration du théorème 5.11 est une branche du logarithme complexe. La différence $f(b) - f(a)$ est donc la différence de deux branches du logarithme complexe au point $\gamma(a) = \gamma(b)$ et est donc de la forme $2\pi i n$ où $n$ est un entier. □

Pour une courbe paramétrée $\gamma$ de classe $C^1$ par morceaux, pas nécessairement fermée, dans le plan réel privé de l'origine, le nombre

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \tag{5.8}$$

s'appelle *variation de l'argument* le long de $\gamma$.

**Corollaire 5.14.** *Pour une courbe fermée, la variation de l'argument est un entier.*

## 5.6 Invariance par homotopie

Soit $D$ un domaine de $\mathbb{R}^2$, $J = [a,b]$, $I = [0,1]$, et soient $\gamma_0, \gamma_1\colon J \to D$ deux courbes paramétrées de classe $C^0$ ayant les mêmes points de départ et d'arrivée.

**Définition 5.15.** *Une* homotopie *de $\gamma_0$ vers $\gamma_1$* relativement aux extrémités *est une application continue*

$$\delta\colon J \times I \longrightarrow D$$

*jouissante des propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} \delta(t,0) &= \gamma_0(t) \quad (t \in J),\\ \delta(t,1) &= \gamma_1(t) \quad (t \in J),\\ \delta(a,u) &= \gamma_0(a) = \gamma_1(a) \quad (u \in I),\\ \delta(b,u) &= \gamma_0(b) = \gamma_1(b) \quad (u \in I). \end{aligned} \tag{5.9}$$

*S'il existe une homotopie de* $\gamma_0$ *vers* $\gamma_1$ relativement aux extrémités *on dit que* $\gamma_0$ *et* $\gamma_1$ *sont* homotopes relativement aux extrémités.

En particulier, cette définition est valable si $\gamma_0$ et $\gamma_1$ sont des courbes (continues) fermées avec

$$\gamma_0(a) = \gamma_0(b) = \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$$

et, dans ce cas-la, la condition *relativement aux extrémités* signifie que

$$\delta(a, u) = \delta(b, u) \ (u \in I),$$

c.a.d. quel que soit $u \in I$, la courbe paramétrée

$$\gamma_u \colon J \longrightarrow D, \ \gamma_u(t) = \delta(t, u)$$

est fermée. Si, dans ce cas-la, la courbe $\gamma_1$ est constante, la courbe paramétrée $\gamma_0$ est dite *homotope à un point* ou *homotope à zéro* ou *homotopiquement zéro*.

**Théorème 5.16.** *Soient $\gamma_0$ et $\gamma_1$ deux courbes paramétrées continues homotopes relativement aux extrémités dans le domaine $D$. Quelle que soit la forme différentielle fermée $\omega$ dans $D$,*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega. \tag{5.10}$$

**Définition 5.17.** *Soit*

$$\delta \colon [a, b] \times [a', b'] \longrightarrow D$$

*continue et soit $\omega$ une forme différentielle fermée dans $D$. Une fonction $f \colon [a, b] \times [a', b'] \longrightarrow D$ vérifiant la propriété* (P) *suivante est appelée* primitive *de $\omega$ relativement à $\delta$:*
(P): *Quel que soit le point $(\tau, \nu)$ de $[a, b] \times [a', b']$, au voisinage de $\delta(\tau, \nu)$, il existe une primitive $F$ de $\omega$ telle que*

$$F(\delta(t, u)) = f(t, u)$$

*pour $(t, u)$ quelconque au voisinage de $(\tau, \nu)$.*

**Lemme 5.18.** *Quelles que soient l'application continue*

$$\delta \colon [a, b] \times [a', b'] \longrightarrow D$$

*et la forme différentielle fermée $\omega$ dans $D$, il existe toujours une primitive de $\omega$ relativement à $\delta$.*

*Démonstration.* Voir [2] (II.1.6). □

*Démonstration du théorème* 5.16. Soit

$$\delta \colon J \times I \longrightarrow D$$

une homotopie de $\gamma_0$ vers $\gamma_1$ relativement aux extrémités de telle sorte que les conditions (5.9) soient vérifiées. Soit $f$ une primitive de $\omega$ relativement à $\delta$. Alors les fonctions $u \mapsto f(0, u)$ et $u \mapsto f(1, u)$ sont constantes. Puisque

$$\int_{\gamma_0} \omega = f(1, 0) - f(0, 0), \quad \int_{\gamma_1} \omega = f(1, 1) - f(0, 1),$$

le théorème en résulte. □

## 5.7 Ouverts simplement connexes, existence de primitives

**Définition 5.19.** *Une partie connexe $B$ du plan $\mathbb{R}^2$ est dite* simplement connexe *si une courbe paramétrée fermée continue quelconque dans $B$ est, dans $B$, homotope à zéro.*

**Théorème 5.20.** *Une forme différentielle fermée dans un domaine $D$ de $\mathbb{C}$ simplement connexe admet toujours une primitive.*

*Démonstration.* D'après le théoréme 5.16, pour une courbe paramétrée fermée quelconque $\gamma$, de classe $C^1$ par morceaux, l'intégrale $\int_\gamma \omega$ est nulle. Le théorème 5.2 entraîne alors que $\omega$ admet une primitive dans $D$. □

Une partie $E$ de $\mathbb{C}$ est *étoilée* par rapport au point $z_0$ de $E$ si, quel que soit le point $z$ de $E$, le segment de droite reliant $z_0$ et $z$ est dans $E$. Une partie de $\mathbb{C}$ étoilée par rapport à un point est simplement connexe. Par contre, le plan privé de l'origine n'est pas simplement connexe.
Illustration. La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ dans $\mathbb{C}$ privé de l'origine n'a pas de primitive dans ce domaine de définition. Cependant, la partie $D = \mathbb{C} \setminus \{-s; s \in \mathbb{R}, s \geq 0\}$ de $\mathbb{C}$ est simplement connexe, et chaque branche du logarithme est une primitive de $f$ dans $D$. De même, la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ dans $\mathbb{C}$ privé de $\pm i$ n'a pas de primitive dans ce domaine de définition. Cependant, en vertu de (4.11),

$$\operatorname{arctg}(z) = \frac{1}{2i}(\log(1+iz) - \log(1-iz)),$$

la partie

$$D = \mathbb{C} \setminus (\{si; s \in \mathbb{R}, s \geq 1\} \cup \{si; s \in \mathbb{R}, s \leq -1\}$$

de $\mathbb{C}$ est simplement connexe, et chaque branche de l'arctg est une primitive de $f$ dans $D$.

## 5.8 Indice d'un lacet

**Définition 5.21.** *Soit $\gamma$ un lacet (courbe continue fermée) dans $\mathbb{C}$ et soit $a$ un point qui n'appartient pas à l'image de $\gamma$.* L'indice *de $\gamma$ relativement au point $a$ est le nombre*

$$\mathrm{I}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a},$$

*nécessairement un entier, d'après le théoréme* 5.13.

**Proposition 5.22.** *L'indice jouit des propriétés suivantes :*

1. *Soit $\delta$ une homotopie du lacet $\gamma_1$ vers le lacet $\gamma_2$ relativement aux extrémités qui ne rencontre pas le point $a$. Alors*

$$\mathrm{I}(\gamma_1, a) = \mathrm{I}(\gamma_2, a).$$

2. *Le lacet $\gamma$ étant fixé, l'indice est une fonction localement constante de $a$ si $a$ varie dans le complémentaire de l'image de $\gamma$ dans $\mathbb{C}$.*

3. *Si l'image du lacet $\gamma$ dans $\mathbb{C}$ est dans une partie simplement connexe $D$ du plan qui ne contient pas le point $a$, alors l'indice $\mathrm{I}(\gamma, a)$ est nul.*

4. *Si $\gamma$ est un cercle orienté positivement, alors $\mathrm{I}(\gamma, a) = 1$ si $a$ est à l'intérieur de $\gamma$ et $\mathrm{I}(\gamma, a) = 0$ si $a$ est à l'extérieur de $\gamma$.*

*Démonstration.* Voir [2] (II.1.8). □

# 6 Fonctions holomorphes. II

## 6.1 Théorème de Cauchy

**Théorème 6.1.** *Si la fonction $f$ est holomorphe dans l'ouvert $D$ de $\mathbb{C}$ alors la forme différentielle $fdz$ dans $D$ est fermée.*

*Démonstration.* Nous supposons que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ soient continues. On peut montrer qu'il en est toujours ainsi dans $D$. Voir [2] (II.2.4).

Pour montrer que la forme différentielle

$$fdz = fdx + ifdy$$

est fermée, en vertu de la formule de Green-Riemann (5.4), il suffit de montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Mais ceci est justement la condition (3.6) disant que $f$ est holomorphe. □

**Corollaire 6.2.** *Une fonction holomorphe admet une primitive locale holomorphe.*

**Corollaire 6.3** (Théorème de Cauchy-Goursat)**.** *Soit $f$ une fonction holomorphe dans un ouvert $D$ de $\mathbb{C}$. Quelle que soit la courbe fermée $\gamma$ de classe $C^1$ par morceaux dans $D$ homotope à zéro dans $D$, l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ est nulle.*

**Théorème 6.4.** *Soit $f$ une fonction continue dans un ouvert $D$ de $\mathbb{C}$ et holomorphe dans le complémentaire dans $D$ d'une droite parallèle à l'axe des $x$. Alors la forme différentielle $fdz$ est fermée. En particulier, si $f$ est holomorphe dans $D$ à l'exception de points isolés de $D$, la forme différentielle $fdz$ est fermée.*

*Démonstration.* Voir [2] (II.2.4 Théorème 1').

## 6.2 Formule intégrale de Cauchy

**Théorème 6.5.** *Soit $f$ une fonction holomorphe dans un ouvert $D$ de $\mathbb{C}$, soit $a$ un point de $D$, et soit $\gamma$ un lacet qui ne rencontre pas le point $a$ et qui soit homotope à zéro dans $D$. Alors la valeur $f(a)$ satisfait à l'identité*

$$\mathrm{I}(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz. \tag{6.1}$$

*Démonstration.* Définissons la fonction $g$ par

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & z \neq a, \\ f'(a), & z = a. \end{cases}$$

La fonction $g$ est continue dans $D$ et holomorphe dans $D \setminus \{a\}$. D'après le théoréme 6.4,

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz = 0.$$

Suite à la définition de l'indice, voir la définition 5.21,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a} dz = \mathrm{I}(\gamma, a) f(a)$$

d'où la relation (6.1). □

## 6.3 Démonstration du théorème de Taylor

Rappel:

**Théorème 6.6.** *Soit $f$ holomorphe dans le disque $|z| < \rho$. Alors $f$ admet dans ce disque un développement en série entière. C.a.d.: Il existe une série entière $S(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $\geq \rho$ telle que, dans le disque $|z| < \rho$, la fonction somme $S$ de la série coincide avec $f$.*

*Démonstration.* Soit $r < \rho$, choisissons $r_0$ tel que $r < r_0 < \rho$, et soit $\gamma$ le cercle positif de rayon $r_0$ ayant l'origine pour centre. D'après la relation (6.1), pour $|z| \leq r$, la valeur $f(z)$ s'exprime sous la forme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Pour $|z| < |t|$,

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t} \frac{1}{1-z/t} = \frac{1}{t} \left(1 + \tfrac{z}{t} + \ldots + \tfrac{z^n}{t^n} + \ldots\right)$$

d'où

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n\geq 0} z^n \tfrac{f(t)}{t^{n+1}} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_0} \sum_{n\geq 0} z^n \tfrac{f(t)}{t^{n+1}} dt.$$

Pour $z$ fixé tel que $|z| \leq r$ et $|t| = r_0$, la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0} z^n \tfrac{f(t)}{t^{n+1}}$$

par rapport à la variable $t$ est normalement convergente au sens suivant: Soit

$$t(\varphi) = r_0 \mathrm{e}^{i\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

le paramétrage standard du cercle de rayon $r_0$ centré à l'origine de telle sorte que

$$dt = ir_0 \mathrm{e}^{i\varphi} d\varphi.$$

Alors

$$z^n \tfrac{f(t)}{t^{n+1}} t' = z^n \tfrac{f(r_0 \mathrm{e}^{i\varphi})}{r_0^{n+1} \mathrm{e}^{i(n+1)\varphi}} ir_0 \mathrm{e}^{i\varphi} = if(r_0 \mathrm{e}^{i\varphi}) \frac{z^n}{r_0^n} \mathrm{e}^{-in\varphi} \quad (n \geq 0),$$

et la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0} f(r_0 \mathrm{e}^{i\varphi}) \frac{z^n}{r_0^n} \mathrm{e}^{-in\varphi}$$

de la variable $\varphi$ converge normalement. Nous pouvons donc développer l'intégrale

$$\int_{|t|=r_0} \sum_{n\geq 0} z^n \tfrac{f(t)}{t^{n+1}} dt$$

terme à terme. Par conséquent

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_0} \tfrac{f(t)}{t^{n+1}} dt. \tag{6.2}$$

À cause de l'unicité du développement en série entière, voir le corollaire 1.30, les coefficients $a_n$ $(n \geq 0)$ ne dépendent pas des choix de $r$ et $r_0$. Ceci achève la démonstration. □

## 6.4 Formules intégrales de Cauchy

**Théorème 6.7** (Formules intégrales de Cauchy)**.** *Quelle que soit la courbe fermée simple positive $\gamma$ de classe $C^1$ dans le domaine de définition $D$ d'une fonction holomorphe $f$ de telle sorte que l'intérieur de $\gamma$ appartienne à $D$, la $n$-ième $\mathbb{C}$-dérivée $f^{(n)}$ de $f$ vérifie l'identité*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \tag{6.3}$$

*Démonstration.* Si $\gamma$ est un cercle, c'est une conséquence immédiate de la démonstration du théorème 3.4, voir l'identité (6.2). En particulier, suite au corollaire 1.30, les coefficients $a_n$ $(n \geq 0)$ qui figurent dans l'identité (6.2) ne dépendent pas des choix de $r$ et $r_0$ dans la démonstration du théorème 3.4. On peut montrer qu'une courbe fermée simple positive quelconque $\gamma$ de classe $C^1$ dans $D$ est homotope à un cercle relativement aux extrémités. On ne donne pas les détails ici. □

**Corollaire 6.8.** *Soit $f$ holomorphe dans un ouvert $D$ contenant l'origine et soit $f(z) = \sum a_n z^n$ le développement en série entière de $f$ centré à l'origine. Quel que soit $r > 0$ tel que le disque de rayon $r$ et de centre l'origine soit dans $D$, pour $n \geq 0$,*

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{i\varphi}) \mathrm{e}^{-in\varphi} d\varphi. \tag{6.4}$$

*Démonstration.* Soit
$$\zeta(\varphi) = r\mathrm{e}^{i\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$
le paramétrage standard du cercle de rayon $r$ centré à l'origine de telle sorte que
$$d\zeta = ir\mathrm{e}^{i\varphi}d\varphi.$$
L'énoncé est ainsi une conséquence immédiate du théorème 6.7. □

## 6.5 Théorème de Morera

**Théorème 6.9** (Réciproque du théorème 6.1)**.** *Soit $f$ une fonction continue dans l'ouvert $D$ du plan telle que la forme différentielle $fdz$ soit fermée. Alors $f$ est holomorphe.*

Autrement dit:

**Théorème 6.10** (Morera)**.** *Soit $f$ une fonction continue dans l'ouvert $D$ du plan telle que, quelle que soit la courbe fermée $\gamma$ de classe $C^1$ par morceaux dans $D$,*
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$
*Alors $f$ est holomorphe.*

*Démonstration.* Soit $z_0$ un point de $D$. Dans $D$, la fonction complexe $F$ définie par $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ est bien définie et admet $f$ pour $\mathbb{C}$-dérivée dans $D$; la fonction $F$ est donc holomorphe. Par conséquent, $f$ est elle-même holomorphe. □

**Corollaire 6.11.** *Soit $f$ une fonction continue dans l'ouvert $D$ du plan et holomorphe dans le complémentaire dans $D$ d'une droite. Alors $f$ est holomorphe dans $D$.*

*Démonstration.* Après une rotation, si nécessaire, la droite est parallèle à l'axe des $x$. D'après le théoréme 6.4, la forme differentielle $fdz$ est alors fermée. Le théorème 6.9 entraîne que $f$ est holomorphe dans $D$ tout entier. □

**Remarque 6.12.** *En particulier, le théorème* 6.4 *n'est pas une véritable généralisation du corollaire* 6.3*. Cependant, pour des raison techniques, nous avions besoin du théorème* 6.4.

## 6.6 Inversion locale d'une application holomorphe

**Théorème 6.13.** *Soit $f$ une fonction holomorphe au voisinage du point $z_0$ de $\mathbb{C}$ telle que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage ouvert $U$ de $z_0$, un voisinage ouvert $V$ de $w_0 = f(z_0)$, et une fonction holomorphe (uniforme) $g$ dans $V$ telles que $f$ sur $U$ et $g$ sur $V$ soient inverses l'une à l'autre.*

*Démonstration.* Soit $D$ le domaine de définition de $f$. Au point $z_0 = (x_0, y_0)$, la différentielle de l'application $f = u + iv\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ est non nulle. D'après le théorème d'inversion locale ordinaire—c'est une conséquence du théorème des fonctions implicites—il existe un voisinage ouvert $U$ de $(x_0, y_0)$, un voisinage ouvert $V$ de

$$(u_0, v_0) = f(x_0, y_0) = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)),$$

et une application $g\colon V \to U$ de classe $C^\infty$ telles que $f$ sur $U$ et $g$ sur $V$ soient inverses l'une à l'autre. Il reste à montrer que $g$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $V$.

Puisque $f = u + iv$ est holomorphe, en un point quelconque de son domaine de définition où la $\mathbb{C}$-dérivée est non nulle, la différentielle de $f$ s'écrit sous la forme

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

où $a^2 + b^2 \neq 0$ puisque la $\mathbb{C}$-dérivée est non nulle. Par conséquent, en un point quelconque $u + iv$ de $V$, la différentielle de $g$ s'écrit sous la forme

$$g'(u, v) = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

c.a.d. la fonction $g$ satisfait aux équations de Cauchy-Riemann. □

## 6.7 Propriété locale conforme : conservation des angles

**Définition 6.14.** *Une application différentiable $f = u + iv\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ dans un ouvert $D$ de $\mathbb{C}$* conserve les angles *ou est* conforme *si, en un point quelconque $z_0$ de $D$, quelles que soient les courbes paramétrées $\gamma_1\colon ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to D$ et $\gamma_2\colon ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to D$ régulières de classe $C^1$ telles que $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$, l'angle orienté entre les tangentes orientées $\gamma_1'(0)$ et $\gamma_2'(0)$ coincide avec l'angle orienté entre les tangentes orientées $(f \circ \gamma_1)'(0)$ et $(f \circ \gamma_2)'(0)$ au point $f(z_0)$ des courbes paramétrées $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$.*

**Théorème 6.15.** *Pour qu'une application différentiable $f = u + iv\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ dans un ouvert $D$ de $\mathbb{C}$ de différentielle non nulle en tout point de $D$ conserve les angles, c.a.d. soit conforme, il faut et il suffit qu'elle soit holomorphe.*

*Démonstration.* Pour que la différentielle

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

de $f$ en un point quelconque $x + iy$ de $D$ conserve les angles, il faut et il suffit que cette différentielle s'écrive sous la forme

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

c.a.d., d'après le corollaire 2.5, que $f'(x, y)$ soit une similitude directe. Mais cette condition est équivalente aux conditions de Cauchy-Riemann. □

## 6.8 Inversion globale d'une application holomorphe

**Théorème 6.16.** *Soit $f$ une fonction holomorphe injective dans l'ouvert connexe $U$ de $\mathbb{C}$. Alors $f(U)$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, la fonction $f$ est un homéomorphisme de $U$ sur $f(U)$, et la fonction réciproque $f^{-1}$ est holomorphe.*

*Démonstration.* Pour simplifier le raisonnement, supposons que $0 \in U$ et que $f(0) = 0$; soit $p$ l'ordre du zéro $z_0 = 0$. Alors, dans un voisinage de l'origine,

$$f(z) = cz^p(1 + f_1(z)),$$

cf. (1.19), où $c \neq 0$ et où $f_1$ est holomorphe avec $f_1(0) = 0$. Choisissons une branche $f_2$ de la fonction holomorphe multiforme

$$z \longmapsto c^{\frac{1}{p}}(1 + f_1(z))^{\frac{1}{p}}.$$

La fonction $f_2$ est holomorphe au voisinage de l'origine telle que $f_2(0) \neq 0$, et

$$f(z) = (zf_2(z))^p.$$

Puisque la fonction $f$ est supposée d'être injective, il s'ensuit que $p = 1$ d'où $f'(0) \neq 0$. Par translation, il s'ensuit que $f'(z) \neq 0$ quel que soit $z \in U$. D'après le théorème 6.13, l'application réciproque $f^{-1}$ est holomorphe en tout point $z$ de $f(U)$. Par conséquent, $f$ est un isomorphisme analytique et en particulier un homéomorphisme. □

# 7 Développements, singularités, résidus

## 7.1 Inégalités de Cauchy

**Théorème 7.1** (Inégalités de Cauchy)**.** *Soit $f$ holomorphe dans un ouvert $D$ contenant l'origine, soit $f(z) = \sum a_n z^n$ le développement en série entière de $f$ centré à l'origine, soit $r > 0$ tel que le disque de rayon $r$ et de centre l'origine soit dans $D$, et soit*

$$M(r) = \sup_{\varphi} \left| f(r\mathrm{e}^{i\varphi}) \right| = \max_{\varphi} \left| f(r\mathrm{e}^{i\varphi}) \right|. \tag{7.1}$$

*Alors, pour $n \geq 0$,*

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}. \tag{7.2}$$

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de l'identité (6.4), voir le corollaire 6.8. □

## 7.2 Théorème de Liouville

**Théorème 7.2** (Liouville)**.** *Une fonction holomorphe et bornée $f$ dans le plan tout entier est constante.*

*Démonstration.* Puisque $f$ est bornée, le nombre $M(r)$ défini dans (7.1) a une borne $M$ qui ne dépend pas de $r$. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ le développement en série entière de $f$. D'après les inégalités (7.2), il s'ensuit que

$$|a_n| \le \frac{M}{r^n}$$

quel que soit $r$. Par conséquent, $a_n = 0$ pour $n \ge 1$. □

## 7.3 Théorème de d'Alembert

**Théorème 7.3.** *Un polynôme non constant à coefficients complexes quelconque admet au moins une racine dans* $\mathbb{C}$.

*Démonstration.* Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients complexes. Supposons que $P(z)$ n'ait aucune racine. Alors la fonction $1/P$ est holomorphe dans le plan tout entier. Cette fonction est également bornée. C'est évident si $P(z)$ est constant. Si $P(z)$ n'est pas constant,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = z^n (a_n + \tfrac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \tfrac{a_0}{z^n}),\ a_n \neq 0,\ n \ge 1,$$

tend vers l'infini quand $|z|$ tend vers l'infini. Il s'ensuit qu'il existe un disque compact en dehors duquel $1/P$ est bornée. D'autre part, la fonction $1/P$ est bornée dans ce disque compact. Par conséquent, la fonction $1/P$ est bornée dans $\mathbb{C}$ tout entier. D'après le théorème 7.2 (Liouville), la fonction $1/P$ est constante, d'où $P$ est constant. □

## 7.4 Propriété de moyenne

On dit qu'une fonction $f$, définie et continue dans un ouvert $D$ de $\mathbb{C}$, à valeurs réelles ou complexes, possède la *propriété de moyenne* si, quel que soit le disque compact $S$ contenu dans $D$, la valeur de $f$ au centre de $S$ est égale à la valeur moyenne de $f$ sur le cercle-frontière de $S$.

N. B. Soit $S$ le disque compact de centre $z_0$ et de rayon $r$. La moyenne de la fonction $f$ sur le cercle-frontière de $S$ est l'intégrale

$$\frac{1}{\text{longueur}(\partial S)} \int_0^{2\pi} f(re^{i\vartheta}) r d\vartheta.$$

**Théorème 7.4** (Théorème de la moyenne)**.** *Toute fonction holomorphe possède la propriété de moyenne.*

*Démonstration.* Soit $f$ holomorphe dans un ouvert $D$ contenant l'origine, soit $f(z) = \sum a_n z^n$ le développement en série entière de $f$ centré à l'origine, et soit $r > 0$ tel que le disque de rayon $r$ et de centre l'origine soit dans $D$. L'identité (6.4) nous donne

$$f(0) = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\vartheta}) d\vartheta.$$

En développant autour d'un point quelconque, on déduit l'enoncé dans le cas général. □

**Corollaire 7.5.** *La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe possèdent la propriété de moyenne.*

## 7.5 Principe du maximum

**Théorème 7.6.** *Soit $f$ une fonction continue à valeurs complexes dans un ouvert $D$ de $\mathbb{C}$. Si $f$ possède la propriété de moyenne, et si $|f|$ possède un maximum relatif en un point $a$ de $D$, c.a.d. si $|f(z)| \leq |f(a)|$ quel que soit $z$ assez voisin de $a$, alors $f$ est constante dans un voisinage de $a$.*

*Démonstration.* Si $f(a) = 0$ il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $f(a) \neq 0$. Après multiplication par une constante si nécessaire nous pouvons supposer que la valeur $f(a)$ est réelle et positive. Posons

$$M(r) = \sup_{\varphi} \left| f(a + r\mathrm{e}^{i\varphi}) \right| = \max_{\varphi} \left| f(a + r\mathrm{e}^{i\varphi}) \right|. \tag{7.3}$$

Cette expression est définie pour $r$ suffisamment petit et, d'après l'hypothèse,

$$M(r) \leq f(a).$$

Puisque $f$ possède la propriété de moyenne,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{i\vartheta}) d\vartheta. \tag{7.4}$$

Il s'ensuit que $f(a) \leq M(r)$ d'où $f(a) = M(r)$. La fonction $g$ définie par

$$g(z) = \Re(f(a) - f(z))$$

est donc $\geq 0$ dès que $|z - a| = r$ est suffisamment petit et, pour que $g(z)$ s'annule il faut et il suffit que $f(z) = f(a)$. D'après l'identité (7.4), la moyenne de $g$ sur le cercle $|z - a| = r$ vaut zéro; puisque $g$ est continue et $\geq 0$ il s'ensuit que $g$ s'annule sur ce cercle. Par conséquent $f(z) = f(a)$ dès que $|z - a| = r$ est suffisamment petit. □

**Corollaire 7.7.** *Si $f$ est holomorphe et non constante dans un domaine $D$ de $\mathbb{C}$, la fonction $|f|$ n'a pas de maximum local en $D$.*

Autrement dit:

**Corollaire 7.8.** *Si $f$ est holomorphe dans un domaine borné $D$ de $\mathbb{C}$ et définie et continue dans $\overline{D}$, le maximum de la fonction $|f|$ est atteint au bord $\partial D$ de $D$.*

**Corollaire 7.9.** *Soit $f$ holomorphe dans un ouvert $D$ contenant l'origine, soit $f(z) = \sum a_n z^n$ le développement en série entière de $f$ centré à l'origine, et soit $r > 0$ tel que le disque de rayon $r$ et de centre l'origine soit dans $D$. Le maximum*

$$M(r) = \sup_{\varphi} \left| f(r\mathrm{e}^{i\varphi}) \right| = \max_{\varphi} \left| f(r\mathrm{e}^{i\varphi}) \right|$$

*(voir (7.1)) qui figure dans les inégalités de Cauchy (7.2) coincide avec la borne*

$$\sup_{|z| \leq r} |f(z)| = \max_{|z| \leq r} |f(z)|.$$

## 7.6 Fonctions holomorphes et fonctions harmoniques

**Définition 7.10.** *Une fonction $f$ dans l'ouvert $D$ du plan $\mathbb{R}^2$ est* harmonique *si elle satisfait à l'équation de* Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{7.5}$$

*L'opérateur $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est appelé* opérateur de Laplace.

**Proposition 7.11.** *La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont des fonctions harmoniques.*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate des équations de Cauchy-Riemann. □

**Théorème 7.12.** *Une fonction harmonique quelconque est localement la partie réelle (ou imaginaire) d'une fonction holomorphe; cette fonction est uniquement déterminée à une constante additive près.*

*Démonstration.* Voir [2] (IV.3.2). □

**Corollaire 7.13.** *Une fonction harmonique quelconque dans un ouvert simplement connexe est la partie réelle (ou imaginaire) d'une fonction holomorphe.*

ILLUSTRATION. La fonction $u(x, y) = -2xy + e^x \cos y$ est harmonique. Elle est la partie réelle de $f(z) = iz^2 + e^z + \lambda i$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le corollaire 7.5 entraîne donc le résultat suivant:

**Corollaire 7.14.** *Les fonctions harmoniques possèdent la propriété de moyenne. En particulier, elles satisfont au principe du maximum.*

En effet:

**Théorème 7.15.** *Les fonctions réelles qui possèdent la propriété de moyenne ne sont autres que les fonctions harmoniques.*

*Démonstration.* Voir [2] (IV.4.5). □

**Théorème 7.16.** *Une fonction harmonique quelconque est une fonction réelle analytique.*

*Démonstration.* Voir [2] (IV.3.2). □

## 7.7 Lemme de Schwarz

**Lemme 7.17** (Dit de Schwarz)**.** *Soit $f$ une fonction holomorphe dans le disque $|z| < 1$. Supposons $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$. Alors :*

1. $|f(z)| \leq |z|$ *et* $|f'(0)| \leq 1$*;*

2. *s'il existe $z_0 \neq 0$ tel que l'égalité $|f(z_0)| = |z_0|$ soit vérifiée, alors il existe une constante $\lambda$ de module 1 telle que*

$$f(z) = \lambda z;$$

3. *de même, si $|f'(0)| = 1$, il existe une constante $\lambda$ de module 1 telle que*

$$f(z) = \lambda z.$$

*Démonstration.* Puisque $f(0) = 0$, le développement de Taylor de $f$ prend la forme $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$ d'où la fonction $h(z) = f(z)/z$ pour $z \neq 0$ et $h(0) = 0$ est holomorphe. Puisque $|f(z)| \leq 1$ il s'ensuit que

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r}, \quad \text{pour} \quad |z| = r.$$

D'après le principe du maximum, cette inégalité est aussi valable pour $|z| \leq r$. Fixons $z$, $|z| < 1$; alors

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{r}$$

quel que soit $r$ avec $r \geq |z|$ et $r < 1$. À la limite nous avons donc

$$|f(z)| \leq |z|$$

ce qui montre la première assertion.

S'il existe $z_0 \neq 0$ tel que l'égalité $|f(z_0)| = |z_0|$ soit vérifiée alors la fonction holomorphe $h$ définie par $h(z) = f(z)/z$ atteint son maximum en module en un point intérieur du disque $|z| < 1$. D'après le principe du maximum, la fonction $h$ est constante au voisinage de $z_0$ et donc constante pour $|z| < 1$, d'où la deuxième assertion.

De même, supposons que $|f'(0)| = 1$. Alors le principle du maximum entraîne que $\frac{f(z)}{z}$ est constant d'où la troisième assertion. □

## 7.8 Séries de Laurent

**Définition 7.18.** *Une* singularité isolée *d'une fonction holomorphe $f$ est un point $z_0$ qui possède un voisinage ouvert $V$ tel que $f$ soit holomorphe dans $V \setminus \{z_0\}$.*

Exemples. L'origine présente une singularité isolée des fonctions $f(z) = \frac{1}{z}$ et $f(z) = \mathrm{Log}(z)$. La fonction $f$ donnée par

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \ldots +$$

est holomorphe pour $|z| < 1$. Les points $\zeta$ avec $\zeta^{(2^k)} = 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ forment une partie dense du cercle unité et présentent des singularités non isolées.

Pour étudier le comportement d'une fonction holomorphe au voisinage d'une singularité isolée nous allons d'abord généraliser le développement de Taylor d'une fonction holomorphe centré en un point quelconque de son domaine de définition.

### 7.8.1 Généralités

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n<0} a_n z^{-n}$ deux séries entières de rayons de convergence $R_1$ respectivement $1/R_2$, où $R_2 = 0$ signifie que le rayon de convergence de la deuxième série entière est infini. Alors

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \tag{7.6}$$

donne une fonction holomorphe $f_1$ dans $|z| < R_1$. De même,

$$f_2(z) = \sum_{n<0} a_n z^n \tag{7.7}$$

donne une fonction holomorphe $f_2$ pour $|z| > R_2$. En effet, posons $u = 1/z$. La fonction $g$ définie par

$$g(u) = \sum_{n>0} a_{-n} u^n$$

est holomorphe dans $|u| < 1/R_2$, et sa $\mathbb{C}$-dérivée est donnée par

$$g'(u) = \sum_{n>0} n a_{-n} u^{n-1}.$$

La fonction $f_2$ admet donc une $\mathbb{C}$-dérivée pour $|z| > R_2$, donnée par

$$f_2'(z) = -\frac{1}{z^2} g'(1/z) = -\frac{1}{z^2} \sum_{n>0} n a_{-n} z^{1-n} = \sum_{n<0} n a_n z^{n-1}.$$

En particulier, pour $|z| > R_2$, la $\mathbb{C}$-dérivée $f_2'$ est la fonction somme de la série dérivée terme à terme de (7.7).

Supposons que $R_2 < R_1$. Alors la fonction $f = f_1 + f_2$ est holomorphe dans la *couronne* $R_2 < |z| < R_1$; elle est la *fonction somme* de la série

$$\sum_{-\infty<n<\infty} a_n z^n \tag{7.8}$$

dans le sens que $f_1$ resp. $f_2$ sont les fonctions somme des séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ respectivement $\sum_{n<0} a_n z^n$. En plus, on obtient la $\mathbb{C}$-dérivée $f'$ en dérivant terme à terme la série (7.8). Une série du type (7.8) s'appelle *série de Laurent dans la couronne* $R_2 < |z| < R_1$. On dit alors que la *série de Laurent converge vers la fonction* $f$ ce qui signifie que les séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ respectivement $\sum_{n<0} a_n z^n$ convergent vers $f_1$ resp. $f_2$. Ici les cas où $R_2 = 0$ ou $R_1 = \infty$ ne sont pas exclus. La série (7.8) *converge normalement* dans chaque couronne

$$r_2 \leq |z| \leq r_1, \quad R_2 < r_2 < r_1 < R_1.$$

Plus généralement, pour un point $z_0$ de $\mathbb{C}$ quelconque, dans une couronne du type

$$R_2 < |z - z_0| < R_1,$$

une *série de Laurent centrée en* $z_0$ est une série du type

$$\sum_{-\infty<n<\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{7.9}$$

c.a.d. c'est une série de Laurent $\sum_{-\infty<n<\infty} a_n \zeta^n$ comme précédemment définie, mais relativement à la variable $\zeta = z - z_0$.

### 7.8.2 Développement d'une fonction holomorphe dans une couronne

**Définition 7.19.** *Une fonction $f$ dans la couronne $R_2 < |z-z_0| < R_1$ est dite d'admettre, dans cette couronne, un* développement en série de Laurent *s'il existe une série de Laurent $\sum_{-\infty<n<\infty} a_n(z-z_0)^n$ qui, dans cette couronne, converge vers la fonction $f$ dans le sens que chacune des séries $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ et $\sum_{n<0} a_n(z-z_0)^n$ converge vers une fonction $f_1$ resp. $f_2$ de telle sorte que $f = f_1 + f_2$.*

**Théorème 7.20.** *Soit $f$ une fonction qui, dans la couronne $R_2 < |z-z_0| < R_1$, admet un développement en série de Laurent $\sum_{-\infty<n<\infty} a_n(z-z_0)^n$. Alors la fonction $f$ est holomorphe et, dans chaque couronne*

$$r_2 \leq |z-z_0| \leq r_1, \quad R_2 < r_2 < r_1 < R_1,$$

*la convergence est normale.*

*Démonstration.* Ce résultat est établi par un raisonnement exactement du type que celui au début de ce paragraphe. □

**Théorème 7.21.** *Soit $\sum_{-\infty<n<\infty} a_n z^n$ une série de Laurent, de fonction somme $f$, nécessairement holomorphe, dans la couronne $R_2 < |z| < R_1$. Quel que soit le cercle positif $\gamma$ dans cette couronne centré à l'origine, pour $-\infty < n < \infty$,*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{f(t)}{t^{n+1}} dt. \tag{7.10}$$

*Par conséquent, quel que soit $r > 0$ tel que $R_2 < r < R_1$, pour $-\infty < n < \infty$,*

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{i\varphi})\mathrm{e}^{-in\varphi} d\varphi. \tag{7.11}$$

*Démonstration.* Le raisonnement est exactement le même que celui qui établit le théorème 6.7. □

**Corollaire 7.22.** *Il existe au plus un développement d'une fonction holomorphe en série de Laurent dans une couronne.*

**Théorème 7.23.** *Une fonction holomorphe quelconque $f$ dans une couronne*

$$R_1 < |z-z_0| < R_2$$

*admet un développement en série de Laurent unique*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

*Démonstration.* Voir [2] (III.4.2). □

### 7.8.3 Décomposition d'une fonction holomorphe dans une couronne

**Théorème 7.24.** *Soit $f$ une fonction holomorphe dans la couronne $R_2 < |z - z_0| < R_1$. Il existe une fonction $f_1$ holomorphe dans le disque $|z - z_0| < R_1$ et une fonction $f_2$ holomorphe pour $|z - z_0| > R_2$ telles que*

$$f = f_1 + f_2. \tag{7.12}$$

*La décomposition (7.12) est déterminée de façon unique par la condition supplémentaire que $f_2$ tende vers zéro quand $|z|$ tend vers l'infini.*

*Démonstration.* Voir [2] (III.4.3). □

### 7.8.4 Inégalités de Cauchy. II.

**Théorème 7.25** (Inégalités de Cauchy)**.** *Soit $f$ une fonction holomorphe dans la couronne $R_2 < |z| < R_1$, avec série de Laurent $\sum_{-\infty<n<\infty} a_n z^n$, soit $r > 0$ tel que $R_2 < r < R_1$, et soit*

$$M(r) = \sup_{\varphi} \left| f(r\mathrm{e}^{i\varphi}) \right| = \max_{\varphi} \left| f(r\mathrm{e}^{i\varphi}) \right|. \tag{7.13}$$

*Alors, pour $-\infty < n < \infty$,*

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}. \tag{7.14}$$

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de l'identité (7.11), voir le théoréme 7.21. □

## 7.9 Classification des singularités isolées

Une fonction holomorphe sur un disque ouvert privé de son centre présente, au voisinage du centre, trois types de comportement possibles, que l'on peut caractériser par la forme du développement en série de Laurent dans cette couronne particulière.

**Définition 7.26.** *La singularité isolée $z_0$ de la fonction holomorphe $f$ est* effaçable *si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe, c.a.d. si $f$ est continue en $z_0$ ou, plus précisement, admet un prolongement continu en $z_0$.*

**Théorème 7.27.** *Pour qu'une singularité isolée d'une fonction holomorphe $f$ soit effaçable il faut et il suffit que $f$ reste bornée au voisinage de cette singularité. S'il en est ainsi, la fonction $f$ se prolonge en une fonction qui est holomorphe au voisinage de cette singularité.*

*Démonstration.* Soit $z_0$ une singularité effaçable de $f$. Alors $f$ reste bornée au voisinage de cette singularité.

Réciproquement, soit $z_0$ une singularité isolée de $f$ et supposons qu'il existe une borne $M > 0$ de telle sorte que, pour $r$ suffisamment petit, la fonction $|f|$ soit bornée sur $|z - z_0| = r$ par $M$. Pour simplifier l'exposé, nous supposons $z_0 = 0$. Soit $\sum_{-\infty<n<\infty} a_n z^n$ le développement en série de Laurent de $f$. D'après les inégalités de Cauchy (7.14),

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad -\infty < n < \infty,$$

quel que soit $r$ aussi petit que l'on veut. Ceci n'est possible que si $a_n = 0$ pour $n < 0$. La série de Laurent se ramène alors à une série de Taylor. $\square$

Soit $f$ une fonction holomorphe et soit $z_0$ une singularitée isolée de $f$. Supposons que $z_0$ ne soit pas effaçable. Soit

$$\sum_{-\infty<n<\infty} a_n(z-z_0)z^n$$

la série de Laurent de $f$ centrée en $z_0$. Puisque la singularité $z_0$ n'est pas effaçable, les coefficients $a_n$ ne sont pas tous nuls pour $n < 0$.

1^er cas: les coefficients $a_n$ ne sont non nuls que pour un nombre fini des $n < 0$; alors

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty,$$

et il existe un entier naturel $n$ tel que la fonction $g$ définie par $g(z) = (z-z_0)^n f(z)$ soit holomorphe au voisinage de $z_0$.

2^ème cas: les coefficients $a_n$ sont non nuls pour un nombre infini des $n < 0$.

**Définition 7.28.** *Dans le premier cas, la singularité s'appelle* pôle*; l'entier naturel $n$ le plus petit tel que la fonction $g$ définie par $g(z) = (z-z_0)^n f(z)$ soit holomorphe au voisinage de $z_0$ s'appelle alors* ordre du pôle*. Dans le deuxième cas, la singularité s'appelle* singularité essentielle*.*

**Théorème 7.29** (Casorati-Weierstraß)**.** *Si le point $z_0$ présente une singularité isolée essentielle de la fonction holomorphe $f$, les valeurs prises par $f(z)$ dans un disque pointé quelconque $0 < |z-z_0| < \varepsilon$ forment un ensemble partout dense dans $\overline{\mathbb{C}}$, c.a.d. quel que soit $w \in \mathbb{C}$ ou $w = \infty$, dans ce disque pointé, il existe $z$ avec $f(z)$ aussi proche de $w$ que l'on veut.*

*Démonstration.* Voir [2] (III.4.4). $\square$

Exemple. La fonction $f$ définie par $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, et l'origine présente une singularité essentielle de cette fonction.

## 7.10 Fonctions méromorphes

**Définition 7.30.** *Une* fonction méromorphe dans un ouvert connexe *$D$ est une fonction $f$ définie et analytique (c.a.d. holomorphe) dans l'ouvert $D'$ obtenu par l'opération d'enlever de $D$ un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle pour $f$.*

Soit $D$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Au voisinage de chaque point de $D$, une fonction méromorphe $f$ peut donc se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions analytiques (c.a.d. holomorphes) $h/g$, le dénominateur $g$ n'étant pas identiquement nul. Les fonctions méromorphes dans $D$ forment un corps; c'est le corps de fractions de l'anneau intègre des fonctions holomorphes dans $D$.

**Théorème 7.31.** *La $\mathbb{C}$-dérivée $f'$ d'une fonction méromorphe $f$ dans $D$ est également méromorphe dans $D$. Les fonctions $f$ et $f'$ ont les mêmes pôles; si le point $z_0$ présente un pôle de $f$ d'ordre $k$, en tant que pôle de $f'$, son ordre est $k+1$.*

*Démonstration.* Voir [2] (I.4.5). □

ILLUSTRATION. L'origine présente un pôle d'ordre 1 de la fonction holomorphe $f$ définie par $f(z) = 1/z$, et c'est bien un pôle double de la dérivée $f'$ de $f$.

## 7.11 Théorème des résidus

### 7.11.1 Généralités

**Théorème 7.32.** *Soit $z_0$ un point de $\mathbb{C}$, soit $f$ une fonction holomorphe dans la couronne $R_2 < |z - z_0| < R_1$, avec série de Laurent $\sum_{-\infty<n<\infty} a_n(z - z_0)^n$ centrée en $z_0$, et soit $\gamma$ une courbe paramétrée fermée de classe $C^1$ par morceaux quelconque dans cette couronne. Alors*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \mathrm{I}(\gamma, z_0)a_{-1}. \tag{7.15}$$

*Démonstration.* Définissions la fonction holomorphe $g$ dans la couronne donnée par

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + g(z),\ \ R_2 < |z - z_0| < R_1.$$

Dans la couronne, la fonction $g$ a la primitive holomorphe $G$ définie par

$$G(z) = \sum_{-\infty<n<\infty, n\neq -1} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}.$$

Il s'ensuit que $\int_\gamma g(z)dz = 0$. Par conséquent

$$\int_\gamma f(z)dz = a_{-1}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

d'où le résultat annoncé. □

**Définition 7.33.** *Soit $z_0$ une singularité isolée de la fonction holomorphe $f$. Le* résidu *de $f$* au point *$z_0$, noté* Rés$(f, z_0)$*, est le coefficient d'indice $-1$ du développement, au voisinage de $z_0$, en série de Laurent de $f$ centrée en $z_0$.*

**Corollaire 7.34.** *Soit $z_0$ une singularité isolée de la fonction holomorphe $f$, et soit $\gamma$ un cercle simple positif autour de $z_0$ tel que $z_0$ soit la seule singularité isolée de $f$ à l'intérieur de $\gamma$. Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Rés}(f, z_0). \tag{7.16}$$

### 7.11.2 Le théorème des résidus

**Théorème 7.35** (Théorème des résidus)**.** *Soit $\gamma$ une courbe fermée simple, continue, $C^1$ par morceaux, et positive, dans le domaine de définition $D$ d'une fonction holomorphe $f$ de telle sorte que l'intérieur de $\gamma$ appartienne à $D$ à l'exception d'un nombre fini de singularités isolées $z_1, \ldots, z_n$ de $f$. Alors*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_j \mathrm{Rés}(f, z_j). \tag{7.17}$$

*Démonstration.* La courbe $\gamma$ est le bord d'une partie compacte disons $A$ de $\mathbb{C}$. Chaque singularité $z_j$ $(1 \leq j \leq n)$ est le centre d'un petit disque ouvert $D_j$ tel que $D_j \setminus \{z_j\}$ soit une partie de $D$ et tel que, pour $j_a \neq j_b$, les disques $D_{j_a}$ et $D_{j_b}$ ne se rencontrent pas. Soit

$$A' = A \setminus (D_1 \cup \ldots \cup D_n);$$

c'est une partie compacte de $\mathbb{C}$. Pour $1 \leq j \leq n$, soit $\gamma_j$ le bord positif de $D_j$. La fonction $f$ est holomorphe dans un voisinage ouvert de $A'$. Le théorème de Cauchy-Goursat (théoréme 6.3) entraîne que

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_j \int_{\gamma_j} f(z)dz. \tag{7.18}$$

D'autre part, d'après le théoréme 7.32, pour $1 \leq j \leq n$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} f(z)dz = \text{Rés}(f, z_j),$$

d'où l'énoncé du théorème. □

### 7.11.3 Calcul pratique des résidus

**Proposition 7.36.** *Soit $z_0$ un pôle d'ordre $h$ de la fonction holomorphe $f$. Alors*

$$\text{Rés}(f, z_0) = \frac{1}{(h-1)!}\lim_{z\to z_0, z\neq z_0} \frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}}((z-z_0)^h f(z)). \tag{7.19}$$

*Démonstration.* Au voisinage de $z_0$, la fonction $f$ s'écrit sous la forme

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^h} g(z)$$

où $g$ est holomorphe et $g(z_0) \neq 0$. Soit

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$$

le développement de $g$ en série de Taylor centrée en $z_0$. Alors

$$\text{Rés}(f, z_0) = a_{h-1} = \frac{1}{(h-1)!} g^{(h-1)}(z_0)$$

d'où la formule (7.19). □

*Cas d'un pôle simple.* Soit $z_0$ un pôle simple; au voisinage de $z_0$, il existe donc une fonction holomorphe $g$ telle que

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0} g(z),\ \ g(z_0) \neq 0$$

d'où

$$\text{Rés}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0, z\neq z_0} (z-z_0) f(z). \tag{7.20}$$

En particulier, si $f$ est donnée sous la forme d'un quotient $P/Q$, $P$ et $Q$ étant holomorphes au voisinage de $z_0$ avec $P(z_0) \neq 0$, on a

$$\text{Rés}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}, \tag{7.21}$$

$Q'$ désignant la dérivée de $Q$.

Exemple 1. Soit $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$; la fonction $f$ possède deux pôles simples $z = \pm i$; on a $P/Q' = \frac{1}{2z}e^{iz}$, et par suite le résidu de $f$ au pôle $i$ est égal à $-\frac{i}{2e}$.

*Cas d'un pôle multiple.* Au lieu d'appliquer la proposition 7.36, on peut raisonner diréctement ainsi: Soit $z_0$ un pôle d'orde $h$ de $f$. Au voisinage de $z_0$, la fonction $f$ s'écrit sous la forme

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^h} g(z)$$

où $g$ est holomorphe et $g(z_0) \neq 0$. Le résidu de $f$ au point $z_0$ est égal au coefficient de $(z-z_0)^{h-1}$ dans le développement de Taylor de $g$ au point $z_0$. Tout revient donc à calculer le développement limité de $g(z)$ en ce point. Pour cela, il est souvent commode de prendre comme nouvelle variable $t = z - z_0$.

Exemple 2. Soit $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$. Soit à calculer le résidu de la fonction $f$ au pôle double $z = i$. On a ici

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}, \ f(z) = (z-i)^{-2} g(z).$$

Posons $z = i + t$, et cherchons le coefficient de $t$ dans le développement de Taylor de

$$h(t) = \frac{e^{i(i+t)}}{(i+t)(2i+t)^2}.$$

Il suffit d'écrire le développement limité de degré 1 de chacun des termes

$$\begin{aligned} e^{i(i+t)} &= e^{-1}(1 + it + \ldots) \\ (i+t)^{-1} &= -i(1-it)^{-1} = -i(1 + it + \ldots) \\ (2i+t)^{-2} &= -\frac{1}{4}\left(1 - \tfrac{i}{2}t\right)^{-2} = -\frac{1}{4}(1 + it + \ldots). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$h(t) = \frac{i}{4e}(1 + 3it + \ldots),$$

et le résidu cherché vaut $-\frac{3}{4e}$.

### 7.11.4 Application du théorème des résidus au calcul de certaines intégrales

Le théorème des résidus permet le calcul de nombreuses intégrales réelles. Le calcule se fait sans expliciter une primitive de la fonction sous le signe d'intégration, mais en interprétant la valeur de l'intégrale comme somme des résidus relatifs à des points singuliers d'une fonction holomorphe convenablement choisie. Il n'y a pas de méthode générale permettant de traiter ce problème.

$1^{er}$ type :

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\vartheta, \sin\vartheta) d\vartheta,$$

où $R(x,y)$ est une fonction rationnelle des variables $x$ et $y$ n'ayant pas de pôle sur le cercle $x^2+y^2=1$. Posons $\mathrm{e}^{it}=z$; lorsque $t$ croît de 0 à $2\pi$, $z$ décrit le cercle-unité. Donc $I$ est égal au produit par $2\pi i$ de la somme des résidus de la fonction

$$\frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

aux pôles contenus dans le disque-unité. Il s'ensuit que

$$I = 2\pi \sum \text{Rés} \left\{ \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\right\},$$

la somme étant étendue aux pôles contenus dans le disque-unité.

Exemple 3. Soit $a>1$ un nombre réel et soit

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}.$$

On a

$$I = 2\pi \sum \text{Rés} \frac{2i}{z^2+2iaz-1}.$$

Le seul pôle contenu dans le disque-unité est

$$z_0 = -ia + i\sqrt{a^2-1};$$

l'autre pôle est $z_1 = -ia - i\sqrt{a^2-1}$, et le résidu au pôle $z_0$ vaut

$$\frac{2i}{z_0-z_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}},$$

d'où

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

$2^{\text{ème}}$ type :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx,$$

où $R=\frac{P}{Q}$ est une fonction rationnelle n'ayant pas de pôle réel. Il faut supposer en outre que l'intégrale est convergente; pour cela il faut et il suffit que $\deg(Q) \geq \deg(P)+2$. Une condition équivalente est la suivante :

$$\lim_{|x|\to\infty} xR(x) = 0 \tag{7.22}$$

Supposons dorénavant la fraction rationnelle $R = \frac{P}{Q}$ normalisée telle que $(P, Q) = 1$.

Pour calculer l'intégrale $I$ on va intégrer la fonction $R$, prise comme fonction de la variable complexe $z$, sur le bord $\gamma$ d'un demi-disque de centre 0, de rayon $r$, situé dans le demi-plan supérieur $\Im(z) \geq 0$. Pour $r$ assez grand la fonction $R$ est holomorphe sur le bord $\gamma$ et l'intégrale $\int_\gamma R(z)dz$ est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidues des pôles de $R$ contenus à l'intérieur de $\gamma$. On a donc

$$\int_{-r}^{+r} R(x)dx + \int_{\delta(r)} R(z)dz = 2\pi i \sum \text{Rés}\, R(z), \tag{7.23}$$

où $\delta(r)$ désigne la demi-circonférence de centre 0 et de rayon $r$ parcourue dans le sens direct, et où la sommation est étendue aux résidus des pôles situés dans le demi-plan supérieur $\Im(z) > 0$.

Lorsque $r$ tend vers $+\infty$, la deuxième intégrale du premier membre de (7.23) tend vers 0. Il en résultera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum \text{Rés}\, R(z), \tag{7.24}$$

la somme étant étendue à tous les pôles de $R$ situés dans le demi-plan supérieur. On verrait de même que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = -2\pi i \sum \text{Rés}\, R(z), \tag{7.25}$$

la somme étant étendue cette fois à tous les pôles de $R$ du demi-plan inférieur $\Im(z) < 0$.

Il reste à démontrer que

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\delta(r)} R(z)dz = 0.$$

Cela résulte aussitôt du lemme suivant :

**Lemme 7.37.** *Soit $f$ une fonction définie dans un secteur*

$$\vartheta_1 \leq \text{Arg}(z) \leq \vartheta_2.$$

*Si*

$$\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0 \quad (\vartheta_1 \leq \text{Arg}(z) \leq \vartheta_2),$$

*alors l'intégrale $\int f(z)dz$ étendue à l'arc de cercle de rayon $r$ contenu dans le secteur tend vers zéro lorsque $r$ tend vers $+\infty$.*

*Démonstration.* En effet, soit $M(r)$ la borne supérieure de $|f(z)|$ sur l'arc de cercle de rayon $|z| = r$. On a

$$\left| \int f(z)dz \right| \leq M(r)r(\vartheta_2 - \vartheta_1),$$

et le lemme en résulte aussitôt. □

Exemple 4. Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^6}.$$

La fonction $f$ donnée par $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$ possède six pôles, tous sur le cercle-unité; les trois pôles situés dans le demi-plan supérieur sont

$$z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}},\ z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}},\ z = \mathrm{e}^{5i\frac{\pi}{6}}.$$

Le résidu en un tel pôle est égal à $\frac{1}{6z^5} = -\frac{z}{6}$, d'où

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = -\frac{\pi i}{6}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{5i\frac{\pi}{6}}\right) \\ &= \frac{\pi}{6}\left(2\sin\tfrac{\pi}{6} + 1\right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

# References


[1] L. V. Ahlfors: *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1966

[2] H. Cartan: *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Herman, Paris, 1961