USTL, UFR de
Mathématiques

Analye complexe, 2009/2010, Devoir No 1

Corrigé

1) Trouver le rayon de convergence R de chacune des séries entières suivantes:
$\sum n^p z^n$ $(p \in \mathbf{C})$: $|n^p| = n^x$ où $p = x + iy$; $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{x}{n}} = 1$, donc $R = 1$;
$\sum n^{-n} z^n$: $\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{-1} = 0$, donc $R = \infty$;
$\sum n^{\log n} z^n$: $n^{\frac{\log n}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{(\log n)^2}{n}}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^2}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{\log n}{n}} = 1$, $R = 1$;
$\sum z^{n!}$: pour $|z| < 1$, $\sum |z|^{n!} \leq \sum |z|^n \leq \infty$, donc $R \geq 1$;
$\sum z^{n!}$ diverge pour $z = 1$ donc $R = 1$.
$\sum \tau(n) z^n$ ($\tau(n)$ étant le nombre de diviseurs de n) :
$1 \leq \tau(n) \leq n$: $1^{\frac{1}{n}} \leq (\tau(n))^{\frac{1}{n}} \leq n^{\frac{1}{n}}$, $R = 1$;
$\sum \varphi(n) z^n$ ($\varphi(n)$ étant le nombre des entiers positifs premiers à n (modulo n)) :
$1 \leq \varphi(n) \leq n$: $1^{\frac{1}{n}} \leq (\varphi(n))^{\frac{1}{n}} \leq n^{\frac{1}{n}}$, $R = 1$.

2) On considère la série entière

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^\ell (\log n)^k} z^n, \quad \ell, k \geq 0 \ (\ell, k \in \mathbf{R}).$$

Déterminer son rayon de convergence. Pour quelles valeurs de (ℓ, k), la série converge-t-elle sur le bord du disque de convergence
(a) partout
(b) en au moins un point
(c) en aucun point.

Puisque $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{\ell}{n}} = 1$ et $1 \leq \log n \leq n$ d'où $\lim_{n\to\infty} (\log n)^{\frac{k}{n}} = 1$, la série a rayon de convergence $R = 1$.

(c) $k = 0, \ell = 0$: $\sum z^n$ diverge pour tout z avec $|z| = 1$ car le terme général ne tend pas vers zéro.

(b) $k \geq 0, \ell > 0$ ou $k > 0, \ell \geq 0$: La série converge en -1, d'après le critère de Leibniz.

(a) (i) $k \geq 0, \ell > 1$: La série converge en chaque point du bord du disque de convergence car $\sum \frac{1}{n^\ell}$ converge.

(ii) $k > 1, \ell = 1$: La série converge également en chaque point du bord du disque de convergence, d'après le critère intégrale de Cauchy : *Soit f une fonction numérique continue définie sur la demi-droite réelle $x > n_0$, décroissante, et non-negative. Pour que $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge, il faut et il suffit que $\int_{n_0}^{\infty} f(t)dt$ converge.*

3) Sur quelles parties du plan, la série entière $\sum_1^\infty \frac{1}{n} z^n$ converge-t-elle uniformément?

(i) La convergence est uniforme sur les parties non-vides

$$D_\varepsilon = \{|z| \le 1\} \cap \{|1-z| \ge \varepsilon\}, \quad \varepsilon \in \mathbf{R},\, \varepsilon > 0$$

du plan complexe. En effet, posons $s_n(z) = \sum_0^n z^j = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Alors une sommation partielle (Abel) donne

$$\sum_1^N \frac{z^n}{n} = \sum_1^N \frac{s_n(z) - s_{n-1}(z)}{n} = \sum_1^{N-1} \frac{1}{n(n+1)} s_n(z) + \frac{s_N(z)}{N} - 1.$$

Puisque $|s_n(z)| \le \frac{2}{|1-z|}$, on obtient la majoration

$$\begin{aligned}\sum_1^N \left|\frac{z^n}{n}\right| &\le \sum_1^{N-1} \frac{1}{n(n+1)} |s_n(z)| + |\frac{s_N(z)}{N}| + 1 \\ &\le \sum_1^{N-1} \frac{1}{n^2} \frac{2}{|1-z|} + \frac{1}{N} \frac{2}{|1-z|} + 1 \le \sum_1^{N-1} \frac{1}{n^2} \frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{N} \frac{2}{\varepsilon} + 1\end{aligned}$$

pourvu que $|1-z| \ge \varepsilon$.

(ii) La série converge donc simplément dans $B = \{z; |z| \le 1,\, z \ne 1\}$, mais la convergence n'est pas uniforme sur B. En effet, soient $M > N \ge 1$. Alors

$$\sum_N^M \frac{z^n}{n} = \sum_N^{M-1} \frac{1}{n(n+1)} s_n(z) + \frac{s_M(z)}{M} - \frac{s_N(z)}{N}.$$

Soit $z_p = 1 - \frac{1}{p}$. Alors $s_n(z_p) = p\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n+1}\right) = n + 1 + \frac{1}{p}(\dots)$ (où $(\dots)$ est une expression avec un nombre fini de termes du type $(\frac{1}{p})^k, k \ge 0$) d'où $\lim_{p\to\infty} s_n(z_p) = n+1$. Il s'ensuit que

$$\sum_N^M \frac{z_p^n}{n} = \sum_N^{M-1} \frac{1}{n} + \frac{M+1}{M} - \frac{N+1}{N} + \frac{1}{p}(\dots)$$

d'où

$$\lim_{p\to\infty} \sum_N^M \frac{z_p^n}{n} = \sum_N^{M-1} \frac{1}{n} + \frac{M+1}{M} - \frac{N+1}{N} = \sum_N^{M-1} \frac{1}{n} - \frac{1 - \frac{N}{M}}{N} \ge \sum_N^{M-1} \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

Puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge, quel que soit N, il existe M tel que $\sum_N^{M-1} \frac{1}{n} \ge 3$. Alors $\lim_{p\to\infty} \sum_N^M \frac{z_p^n}{n} \ge 2$ et il existe p tel que $\sum_N^M \frac{z_p^n}{n} \ge 1$. Par conséquent, la convergence ne peut pas être uniforme sur B.

Remarque. Ce raisonnement fait apparaître $-\log(1 - z_p) = \log p$ quand p tend vers l'infini. Comment?

4) Déterminer la fonction $f(z) = \sum n^2 z^n$ (dans son domaine de convergence).

$$\sum_0^\infty z^n = \frac{1}{1-z}; \quad \left(\sum_0^\infty z^n\right)' = \sum_1^\infty n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$
$$\sum_1^\infty n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}; \quad \left(\sum_1^\infty n z^n\right)' = \sum_1^\infty n^2 z^{n-1} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$
$$\sum_1^\infty n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

5) Si $z = x + iy$ avec x, y réels, montrer que l'on a

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y, \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y.$$

En déduire les zéros de $\sin z$ et $\cos z$ dans $\mathbf{C}$.

$$\sin z = \sin x \,\mathrm{ch}\, y + i \cos x \,\mathrm{sh}\, y$$
$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \,\mathrm{ch}^2 y + \cos^2 x \,\mathrm{sh}^2 y = \sin^2 x (1 + \mathrm{sh}^2 y) + \cos^2 x \,\mathrm{sh}^2 y = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y$$
$$\cos z = \cos x \,\mathrm{ch}\, y - i \sin x \,\mathrm{sh}\, y$$
$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \,\mathrm{ch}^2 y + \sin^2 x \,\mathrm{sh}^2 y = \cos^2 x (1 + \mathrm{sh}^2 y) + \sin^2 x \,\mathrm{sh}^2 y = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y$$

Zéros de $\sin z$ dans $\mathbf{C}$: $\sin x = 0$ et $\mathrm{sh}\, y = 0$, c. a. d.: $x = k\pi$, $y = 0$;
Zéros de $\cos z$ dans $\mathbf{C}$: $\cos x = 0$ et $\mathrm{sh}\, y = 0$, c. a. d.: $x = (k + \frac{1}{2})\pi$, $y = 0$.

6) Résoudre les équations $\cos z = 2$, $\sin z = 2$, $\mathrm{e}^z = -10$, $\tan z = 2i$, $\mathrm{ch}\, z = \frac{1}{2}$, par chacune des manières suivantes :

(1) en identifiant les parties réelles et imaginaires
(2) en utilisant le logarithme.

On ne montrera que comment résoudre ces équations par la deuxième méthode:

(i) $\cos z = 2 = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2} : \mathrm{e}^{2iz} - 4\mathrm{e}^{iz} + 1 = 0$
avec $\zeta = \mathrm{e}^{iz}$: $\zeta^2 - 4\zeta + 1 = 0$, $\zeta = 2 \pm \sqrt{3}$ d'où les solutions
$ix - y = \log(2 \pm \sqrt{3}) = \pm \log(2 + \sqrt{3})$ (log étant le logarithme complexe)
c. a. d. : $z = 2k\pi \pm i \log_{\mathbf{R}}(2 + \sqrt{3})$ $(k \in \mathbf{Z})$ ($\log_{\mathbf{R}}$ étant le logarithme réel).

(ii) $\sin z = \cos(z - \frac{\pi}{2}) = 2$: $z = (2k + \frac{1}{2})\pi \pm \log_{\mathbf{R}}(2 + \sqrt{3})i$ $(k \in \mathbf{Z})$.

(iii) $\mathrm{e}^z = -10 : z = \log_{\mathbf{R}} 10 + (2k + 1)\pi i$ $(k \in \mathbf{Z})$.

(iv) $2i = \tan z = \frac{1}{i} \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}$: avec $\zeta = \mathrm{e}^{iz}$: $3\zeta^2 + 1 = 0$, $\zeta = \pm i \frac{\sqrt{3}}{3}$;
puisque $\log \zeta = -\frac{1}{2} \log_{\mathbf{R}} 3 + (k + \frac{1}{2})\pi i$ $(k \in \mathbf{Z})$, on obtient les solutions
$z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i}{2} \log_{\mathbf{R}} 3$ $(k \in \mathbf{Z})$.

(v) $\frac{1}{2} = \mathrm{ch}\, z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} : \mathrm{e}^{2z} - \mathrm{e}^z + 1 = 0$;
avec $\zeta = \mathrm{e}^z$: $\zeta^2 - \zeta + 1 = 0$, $\zeta = \mathrm{e}^{\pm \frac{\pi i}{3}}$ d'où les solutions
$z = \pm \frac{\pi i}{3} + 2k\pi i$ $(k \in \mathbf{Z})$.

7) La réciproque d'une série entière: Soit

$$P(z) = \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2} + \cdots + \frac{z^n}{(n+1)!} + \ldots.$$

Les nombres de Bernoulli B_n sont définis par

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Donner la formule de récurrence pour les B_n. Déterminer B_n pour $n \leq 4$.

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} z^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = B_0 + \left(\frac{B_0}{2} + B_1 \right) z + \ldots$$

Donc $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ et, quel que soit $n > 0$,

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \frac{B_j}{j!} \frac{1}{(n+1-j)!}.$$

En multipliant cette identité par $(n+1)!$ on trouve

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} B_j = \sum_{j=0}^{n} C_{n+1}^{j} B_j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} B_j.$$

Pour $n \leq 4$:

$$\begin{aligned} B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 0 : &\quad B_2 = \frac{1}{6} \\ B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 0 : &\quad B_3 = 0 \\ B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 = 0 : &\quad B_4 = -\frac{1}{30} \end{aligned}$$