THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Spécialité : Mathématiques

par

Julien Hauseux

Extensions entre séries principales p-adiques et modulo p d'un groupe réductif p-adique déployé

Soutenue le 11 décembre 2014 devant le jury composé de :

M.	Christophe Breuil	Université Paris-Sud	Directeur de thèse
M.	Gaëtan Chenevier	Université Paris-Sud	Examinateur
M.	Jean-François Dat	Université Pierre et Marie Curie	Examinateur
M.	Guy Henniart	Université Paris-Sud	Examinateur
M.	Vytautas Paškūnas	Universität Duisburg-Essen	Rapporteur

Rapporteur absent lors de la soutenance :

M.	Florian Herzig	University of Toronto

Résumé

Cette thèse est une contribution à l'étude des représentations p-adiques (c'est-à-dire continues unitaires sur des espaces de Banach p-adiques) et modulo p (c'est-à-dire lisses sur un corps fini de caractéristique p) d'un groupe réductif p-adique déployé G.

Nous déterminons les extensions entre séries principales p-adiques et modulo p de G. Pour cela, nous calculons le δ-foncteur $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_B$ des parties ordinaires dérivées d'Emerton relatif à un sous-groupe de Borel sur une série principale en utilisant une filtration de Bruhat. Nous déterminons également les extensions d'une série principale par une représentation ordinaire (c'est-à-dire obtenue par induction parabolique à partir d'une représentation spéciale du Levi tordue par un caractère), ainsi que les extensions de Yoneda de longueur supérieure entre séries principales modulo p sous une conjecture d'Emerton vraie pour GL_2.

Nous montrons de plus qu'il n'existe pas de « chaîne » de trois séries principales p-adiques ou modulo p distinctes de G. Pour cela, nous calculons partiellement le δ-foncteur $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_P$ relatif à un sous-groupe parabolique quelconque sur une série principale. En exploitant ce résultat, nous prouvons une conjecture de Breuil et Herzig sur l'unicité de certaines représentations p-adiques de G dont les constituants sont des séries principales, ainsi que son analogue modulo p.

Enfin, nous énonçons une nouvelle conjecture sur les extensions entre représentations modulo p irréductibles de G obtenues par induction parabolique à partir d'une représentations supersingulière du Levi. Nous prouvons cette conjecture pour les extensions par une série principale.

Mots clefs. — programme de Langlands p-adique, groupe réductif p-adique, représentation continue unitaire, extension, série principale, parties ordinaires dérivées, filtration de Bruhat.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 22E50.

***Abstract* (Extensions between p-adic and mod p principal series of a split p-adic reductive group)**

This thesis is a contribution to the study of p-adic (i.e. unitary continuous on p-adic Banach spaces) and mod p (i.e. smooth over a finite field of characteristic p) representations of a split p-adic reductive group G.

We determine the extensions between p-adic and mod p principal series of G. In order to do so, we compute Emerton's δ-functor $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_B$ of derived ordinary parts with respect to a Borel subgroup on a principal series using a Bruhat filtration. We also determine the extensions of a principal series by an ordinary representation (i.e. parabolically induced from a special representation of the Levi twisted by a character), as well as the Yoneda extensions of higher length between mod p principal series under a conjecture of Emerton true for GL_2.

Moreover, we show that there exists no "chain" of three distinct p-adic or mod p principal series of G. In order to do so, we partially compute the δ-functor $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_P$ with respect to any parabolic subgroup on a principal series. Exploiting this result, we prove a conjecture of Breuil and Herzig on the uniqueness of certain p-adic representations of G whose constituents are principal series, as well as its mod p analogue.

Finally, we formulate a new conjecture on the extensions between irreducible mod p representations of G parabolically induced from a supersingular representation of the Levi. We prove this conjecture for extensions by a principal series.

Key words and phrases. — p-adic Langlands programme, p-adic reductive group, unitary continuous representation, extension, principal series, derived ordinary parts, Bruhat filtration.

REMERCIEMENTS

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à Christophe Breuil pour avoir accepté de diriger cette thèse. Il m'a fait découvrir un domaine passionnant et m'a donné un sujet de recherche très fécond. Je lui suis profondément reconnaissant d'avoir partagé avec moi ses connaissances et ses idées, ainsi que pour sa grande disponibilité et ses conseils. Les explications qu'il a apportées à mes questions ainsi que ses nombreuses remarques sur mon travail ont été une aide très précieuse.

Je remercie vivement Florian Herzig et Vytautas Paškūnas d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je leur suis très reconnaissant pour le temps qu'ils ont pu accorder à mon travail. Je remercie aussi Florian Herzig pour ses remarques qui ont permis d'améliorer ce manuscrit. Je remercie également Gaëtan Chenevier, Jean-François Dat et Guy Henniart qui me font l'honneur d'être membres du jury.

Plusieurs professeurs ont eu une grande influence sur mon orientation mathématique. Je tiens à remercier en particulier Marie Monier qui a développé mon goût pour les mathématiques en classe préparatoire au lycée Condorcet, David Renard qui m'a fait découvrir les représentations des groupes p-adiques à l'École polytechnique et Paul Garrett qui m'a beaucoup appris pendant mon stage de recherche à la University of Minnesota.

Je remercie Benoît Stroh pour son aide au cours d'un groupe de travail à l'université Paris 13, ainsi qu'Ariane Mézard pour tous ses bons conseils. Je remercie également tous les doctorants avec qui j'ai eu le plaisir de pouvoir échanger au cours de ce travail, en particulier Stéphane Bijakowski, Yiwen Ding et Tristan Vaccon.

Cette thèse est aussi l'occasion pour moi de remercier mes parents qui ont toujours porté une attention particulière à mes études et m'ont soutenu dans mes choix.

Enfin, je remercie affectueusement Yaëlle pour son soutien et ses encouragements constants, ainsi que pour tout le bonheur qu'elle m'a apporté durant ces années.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Contexte

La correspondance de Langlands p-adique

Soit G un groupe algébrique connexe réductif déployé sur une extension finie F de $\mathbb{Q}_p$. On note $\widehat{G}$ le groupe dual de G.

La correspondance de Langlands p-adique (resp. modulo p) devrait associer à toute représentation continue $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \widehat{G}(E)$ avec E une extension finie suffisamment grande de $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \to \widehat{G}(k_E)$ avec k_E le corps résiduel de E), une ou plusieurs représentations continues unitaires $\Pi(\rho)$ de $G(F)$ sur des E-espaces de Banach (resp. une ou plusieurs représentations lisses $\Pi(\overline{\rho})$ de $G(F)$ sur des k_E-espaces vectoriels).

Pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, cette correspondance, initiée par Breuil ([**8, 9**]), est désormais bien établie (voir [**15, 30, 16**]). Les représentations $\Pi(\rho)$ qui apparaissent ne sont pas semi-simples en général : lorsque ρ est ordinaire (c'est-à-dire à valeurs dans un sous-groupe de Borel), ce sont génériquement des extensions non scindées entre deux séries principales.

Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, que le centre de G est connexe et que le groupe dérivé de G est simplement connexe (par exemple $G = \mathrm{GL}_n$ ou $G = \mathrm{GSp}_{2n}$), les résultats de Breuil et Herzig ([**12**]) suggèrent que ce phénomène se généralise : les représentations $\Pi(\rho)$ associées à une représentation ordinaire ρ devraient génériquement contenir des extensions successives non scindées de séries principales (ainsi que d'autres constituants en général).

Cela conduit naturellement au problème de connaître les extensions entre séries principales p-adiques et modulo p de $G(F)$.

Extensions entre séries principales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Les premiers résultats concernant les extensions entre séries principales lisses de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E sont dus à Colmez ([**15**]). On note $\omega : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{F}_p^\times$ la réduction modulo p du caractère cyclotomique p-adique. Soient $\chi_1, \chi_2, \chi_1', \chi_2' : \mathbb{Q}_p^\times \to k_E^\times$ des caractères lisses. Si $\chi_1\chi_2^{-1} \neq \omega$ et $\chi_1'\chi_2'^{-1} \neq \omega$, alors le k_E-espace vectoriel

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1'\omega^{-1} \otimes \chi_2', \mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1\omega^{-1} \otimes \chi_2\right)$$

des extensions dans la catégorie des représentations lisses de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E ayant un caractère central est non nul si et seulement si $(\chi_1', \chi_2') = (\chi_1, \chi_2)$ ou $(\chi_1', \chi_2') = (\chi_2, \chi_1)$. L'hypothèse de généricité sur les caractères est équivalente à l'irréductibilité des séries principales considérées (voir [**2**, Théorème 30 (1) (a)]). De plus si $\chi_1\chi_2^{-1} \notin \{1, \omega, \omega^{-1}\}$, alors

$$\dim_{k_E} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_2\omega^{-1} \otimes \chi_1, \mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1\omega^{-1} \otimes \chi_2\right) = 1.$$

Emerton ([**19, 20**]) a construit pour tout sous-groupe parabolique $P \subset G$ un foncteur $\mathrm{Ord}_{P(F)}$, appelé foncteur des parties ordinaires, qui est un quasi-inverse à gauche et l'adjoint à droite du foncteur d'induction parabolique $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}$ avec $P^- \subset G$ un sous-groupe parabolique opposé à P. En calculant les foncteurs dérivés du foncteur $\mathrm{Ord}_{P(F)}$ sur une série principale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, il détermine toutes les extensions entre séries principales lisses de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E sans hypothèse de généricité.

Cette méthode se généralise aux représentations lisses à coefficients de torsion. En procédant par réduction modulo p^k et dévissage, il est alors possible de déterminer les extensions entre séries principales continues unitaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E (voir [**21**, Remarque 3.3.20] et [**12**, Proposition B.2]). On note $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers de E et $\varepsilon : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique p-adique. Soient $\chi_1, \chi_2, \chi_1', \chi_2' : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ des caractères continus unitaires. Le E-espace vectoriel

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1'\varepsilon^{-1} \otimes \chi_2', \mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1\varepsilon^{-1} \otimes \chi_2\right)$$

des extensions dans la catégorie des représentations continues unitaires admissibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E est non nul si et seulement si $(\chi_1', \chi_2') = (\chi_1, \chi_2)$ ou $(\chi_1', \chi_2') = (\chi_2, \chi_1)$. De plus si $\chi_1 \neq \chi_2$, alors

$$\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_2\varepsilon^{-1} \otimes \chi_1, \mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1\varepsilon^{-1} \otimes \chi_2\right) = 1.$$

Lorsque $\chi_1\chi_2^{-1} \notin \{1, \varepsilon, \varepsilon^{-1}\}$, les séries principales considérées dans ce E-espace vectoriel sont topologiquement irréductibles et distinctes (voir [**12**, Proposition B.1]), donc l'unique extension non scindée correspondante admet un caractère central. Cette extension avait déjà été construite par Breuil et Emerton ([**11**]) dans un cas particulier par complétion unitaire universelle d'une série principale localement analytique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E.

Une conjecture de Breuil-Herzig

Soient $B \subset G$ un sous-groupe de Borel et $T \subset B$ un tore maximal déployé. On note $B^- \subset G$ le sous-groupe de Borel opposé à B par rapport à T. On note Φ^+ les racines positives de (G, B, T) et Δ les racines simples de Φ^+. On note W le groupe de Weyl de (G, T) et $\ell : W \to \mathbb{N}$ la longueur relative à Δ. Pour tout $\alpha \in \Phi^+$, on note $\alpha^\vee$ la coracine correspondante et $s_\alpha \in W$ la réflexion correspondante.

On suppose $F = \mathbb{Q}_p$, le centre de G connexe et le groupe dérivé de G simplement connexe. On note θ la somme des poids fondamentaux relatifs à Δ (bien définie à un caractère algébrique de G près). Soient $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire et $\alpha \in \Delta$. Si $\chi \circ \alpha^\vee \neq 1$, alors Breuil et Herzig observent que

$$\mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta), \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)\right) \neq 0$$

en construisant une extension non scindée par induction parabolique à partir de l'unique extension non scindée entre les séries principales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ correspondantes (en notant

$P_\alpha \subset G$ le sous-groupe parabolique standard correspondant à α et $G_\alpha \subset P_\alpha$ le sous-groupe de Levi standard, on a un isomorphisme $G_\alpha \cong T' \times \mathrm{GL}_2$ avec $T' \subset T$ un sous-tore et le foncteur $\mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ est exact et admet un quasi-inverse à gauche, le foncteur $\mathrm{Ord}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$, donc il induit une injection entre les Ext^1).

Soit $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \widehat{G}(E)$ une représentation continue ordinaire générique (définie à conjugaison près). À partir de l'extension précédente, Breuil et Herzig construisent (voir [**12**, § 3.3]) une représentation continue unitaire $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E qui devrait être la plus grande sous-représentation de $\Pi(\rho)$ constituée de sous-quotients de séries principales. Ils conjecturent l'unicité des facteurs directs indécomposables de cette représentation étant donnés les gradués de leurs filtrations par le socle ([**12**, Conjecture 3.5.1]).

Plus précisément, ils associent à ρ un sous-ensemble $\Psi_\rho \subset \Phi^+$ (noté C_ρ dans [**12**]) et un caractère continu unitaire $\chi_\rho : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ vérifiant $\chi_\rho \circ \alpha^\vee \notin \{1, \varepsilon, \varepsilon^{-1}\}$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$ par généricité de ρ. Ils notent $W_{\Psi_\rho} \subset W$ le sous-ensemble constitué des éléments $w \in W$ tels que $w^{-1}(\Psi_\rho) \subset \Phi^+$ et posent

$$\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}} \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{w_{\Psi_\rho} \in W_{\Psi_\rho}} \Pi(\rho)_{\Psi_\rho, w_{\Psi_\rho}}$$

où pour tout $w_{\Psi_\rho} \in W_{\Psi_\rho}$, $\Pi(\rho)_{\Psi_\rho, w_{\Psi_\rho}}$ est une représentation continue unitaire de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E munie d'une filtration $\mathrm{Fil}^\bullet \Pi(\rho)_{\Psi_\rho, w_{\Psi_\rho}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariant

$$\mathrm{Gr}^k \Pi(\rho)_{\Psi_\rho, w_{\Psi_\rho}} \cong \bigoplus_{\mathrm{card}\, I = k} \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \Big(\big(\prod_{\alpha \in I} s_\alpha \big) w_{\Psi_\rho} \Big)^{-1} \big(\chi_\rho\big) \cdot \big(\varepsilon^{-1} \circ \theta\big)$$

avec $I \subset w_{\Psi_\rho}(\Delta) \cap \Psi_\rho$ parmi les sous-ensembles de racines deux à deux orthogonales. Soit $w_{\Psi_\rho} \in W_{\Psi_\rho}$. Par généricité de ρ, les représentations

$$\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \Big(\big(\prod_{\alpha \in I} s_\alpha \big) w_{\Psi_\rho} \Big)^{-1} \big(\chi_\rho\big) \cdot \big(\varepsilon^{-1} \circ \theta\big)$$

avec $I \subset w_{\Psi_\rho}(\Delta) \cap \Psi_\rho$ constitué de racines deux à deux orthogonales, devraient être topologiquement irréductibles d'après [**12**, Conjecture 3.1.2]. Lorsque c'est le cas (par exemple lorsque leurs réductions modulo p sont irréductibles, voir le paragraphe suivant), la filtration $\mathrm{Fil}^\bullet \Pi(\rho)_{\Psi_\rho, w_{\Psi_\rho}}$ est la filtration par le socle et la conjecture de Breuil-Herzig affirme que la représentation $\Pi(\rho)_{\Psi_\rho, w_{\Psi_\rho}}$ est unique étant donné $\mathrm{Gr}^\bullet \Pi(\rho)_{\Psi_\rho, w_{\Psi_\rho}}$.

De même, si $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \widehat{G}(k_E)$ est une représentation continue ordinaire générique (définie à conjugaison près), Breuil et Herzig construisent (voir [**12**, § 3.4]) une représentation lisse $\Pi(\overline{\rho})^{\mathrm{ord}}$ de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E et conjecturent l'unicité de ses facteurs directs indécomposables étant donnés les gradués de leurs filtrations par le socle. Par généricité de $\overline{\rho}$, le caractère lisse associé $\chi_{\overline{\rho}} : T(\mathbb{Q}_p) \to k_E^\times$ vérifie $\chi_{\overline{\rho}} \circ \alpha^\vee \notin \{1, \omega, \omega^{-1}\}$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$ mais comme l'analogue modulo p de [**12**, Conjecture 3.1.2] est vrai d'après [**29**, Théorème 4] lorsque $G = \mathrm{GL}_n$ et [**1**, Théorème 1.3] dans le cas général déployé, on *sait* que les séries principales qui apparaissent dans la représentation $\Pi(\overline{\rho})^{\mathrm{ord}}$ sont irréductibles.

Extensions entre séries principales de $\mathrm{GL}_2(F)$

On suppose $F \neq \mathbb{Q}_p$. Dans ce cas, les résultats de Breuil et Paškūnas ([**13**]) montrent qu'il n'existe pas d'extension non scindée entre deux séries principales lisses distinctes de $\mathrm{GL}_2(F)$ sur k_E. On en conclut qu'il n'existe pas d'extension non scindée entre deux séries principales continues unitaires de $\mathrm{GL}_2(F)$ sur E dont les réductions modulo p sont distinctes.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il était également connu que pour tous caractères lisses $\chi_1, \chi_2 : F^\times \to k_E^\times$ tels que $\chi_1\chi_2^{-1} \notin \{1, \omega, \omega^{-1}\}$, le k_E-espace vectoriel

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{GL}_2(F)}\left(\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(F)}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)} \chi_2\omega^{-1} \otimes \chi_1, \mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(F)}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)} \chi_1\omega^{-1} \otimes \chi_2\right)$$

est nul si $n < [F : \mathbb{Q}_p]$ et de dimension 1 si $n = [F : \mathbb{Q}_p]$ (voir [**10**, Remarque 3.9]).

Principaux résultats

Extensions entre séries principales

Soient $\chi, \chi' : T(F) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ des caractères continus unitaires. Le foncteur $\mathrm{Ind}^{G(F)}_{B^-(F)}$ est exact et admet un quasi-inverse à gauche (le foncteur $\mathrm{Ord}_{P(F)}$), donc il induit une injection E-linéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{T(F)}(\chi', \chi) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}^{G(F)}_{B^-(F)} \chi', \mathrm{Ind}^{G(F)}_{B^-(F)} \chi\right).$$

Lorsque $\chi' \neq \chi$ il n'existe pas d'extension non scindée de χ' par χ, donc les éventuelles extensions non scindées entre leurs induites sont construites autrement.

Supposons d'abord $F = \mathbb{Q}_p$. Dans ce cas, le résultat suivant montre qu'il peut exister des extensions non scindées entre deux séries principales distinctes.

***Théorème A* (Théorème 6.1.1).** — *Soit* $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ *un caractère continu unitaire.*

(i) *Si* $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ *est un caractère continu unitaire distinct de* χ*, alors*

$$\dim_E \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{Q}_p)}_{B^-(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}^{G(\mathbb{Q}_p)}_{B^-(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) = \mathrm{card}\left\{\alpha \in \Delta \mid \chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)\right\}.$$

(ii) *Si* $\chi \neq s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$ *pour tout* $\alpha \in \Delta$*, alors le foncteur* $\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{Q}_p)}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}$ *induit un isomorphisme* E*-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{Q}_p)}_{B^-(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}^{G(\mathbb{Q}_p)}_{B^-(\mathbb{Q}_p)} \chi\right).$$

La dimension du point (i) peut être arbitrairement grande et on s'attend à ce que le point (ii) soit vrai pour *tout* caractère continu unitaire $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ (voir la remarque 6.1.2).

Lorsque le centre de G est connexe et le groupe dérivé de G est simplement connexe, on utilise θ (la somme des poids fondamentaux relatifs à Δ) pour normaliser les séries principales et les copoids fondamentaux relatifs à Δ permettent de montrer que le cardinal du point (i) est au plus 1. Dans ce cas, on déduit du théorème A le résultat suivant.

***Corollaire B* (Corollaire 7.1.1).** — *Soit* $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ *un caractère continu unitaire.*

(i) *Si* $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ *est un caractère continu unitaire tel que* $\chi' \neq \chi$ *et* $\chi' \neq s_\alpha(\chi)$ *pour tout* $\alpha \in \Delta$*, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi' \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta), \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)\right) = 0.$$

(ii) *Soit* $\alpha \in \Delta$*. Si* $s_\alpha(\chi) \neq \chi$*, alors*

$$\dim_E \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta), \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)\right) = 1.$$

Supposons maintenant $F \neq \mathbb{Q}_p$ sans faire d'hypothèse sur G. Dans ce cas, le résultat suivant montre que toute extension entre deux séries principales de $G(F)$ est induite à partir d'une extension entre les caractères de $T(F)$ correspondants.

***Théorème C* (Théorème 6.1.9).** — *Soit* $\chi : T(F) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ *un caractère continu unitaire.*

(i) *Si* $\chi' : T(F) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ *est un caractère continu unitaire distinct de* χ*, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi', \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi\right) = 0.$$

(ii) *Le foncteur* $\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)}$ *induit un isomorphisme* E*-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{T(F)}(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi, \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi\right).$$

Les analogues modulo p (c'est-à-dire dans les catégories de représentations lisses admissibles sur k_E) des théorèmes A et C sont démontrés au cours des preuves de ces derniers. Nous calculons également les extensions d'une série principale de $G(F)$ par une représentation ordinaire de $G(F)$ (c'est-à-dire obtenue par induction parabolique à partir d'une représentation spéciale du Levi tordue par un caractère) en traitant séparément les cas $F = \mathbb{Q}_p$ (Proposition 6.2.6) et $F \neq \mathbb{Q}_p$ (Proposition 6.2.15).

Enfin, en supposant vraie une conjecture d'Emerton ([**20**, Conjecture 3.7.2]), nous calculons aussi les Ext^n avec $n > 1$ entre séries principales lisses de $G(F)$ sur k_E dans la catégorie des représentations lisses *localement* admissibles de $G(F)$ sur k_E (Théorème 6.3.1). En particulier pour $G = \mathrm{GL}_2$, cette conjecture est démontrée par Emerton et Paškūnas ([**23**]) et on obtient le résultat suivant.

***Proposition D* (Corollaire 6.3.4).** — *Soient* $\chi_1, \chi_2 : F^\times \to k_E^\times$ *deux caractères lisses et* $n \in \mathbb{N}$*.*

(i) *Soient* $\chi_1', \chi_2' : F^\times \to k_E^\times$ *deux autres caractères lisses tels que* $(\chi_1', \chi_2') \neq (\chi_1, \chi_2)$*. Si* $n < [F : \mathbb{Q}_p]$ *ou* $(\chi_1', \chi_2') \neq (\chi_2, \chi_1)$*, alors*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{GL}_2(F)}\left(\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(F)} \chi_1'\omega^{-1} \otimes \chi_2', \mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(F)} \chi_1\omega^{-1} \otimes \chi_2\right) = 0.$$

(ii) *Si* $\chi_1 \neq \chi_2$*, alors*

$$\dim_{k_E} \mathrm{Ext}^{[F:\mathbb{Q}_p]}_{\mathrm{GL}_2(F)}\left(\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(F)} \chi_2\omega^{-1} \otimes \chi_1, \mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(F)} \chi_1\omega^{-1} \otimes \chi_2\right) = 1.$$

Preuve d'une conjecture de Breuil-Herzig

On suppose $F = \mathbb{Q}_p$, le centre de G connexe et le groupe dérivé de G simplement connexe. On note θ la somme des poids fondamentaux relatifs à Δ. Les analogues modulo p des résultats suivants se démontrent de façon analogue.

Nous montrons tout d'abord qu'il n'existe pas de « chaîne » de trois séries principales continues unitaires distinctes topologiquement irréductibles de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E.

***Théorème E* (Théorème 7.1.2).** — *Si $\chi, \chi', \chi'' : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ sont des caractères continus unitaires deux à deux distincts tels que les séries principales de $G(\mathbb{Q}_p)$ correspondantes soient topologiquement irréductibles, alors il n'existe pas de représentation continue unitaire admissible de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E ayant $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi$ pour socle, $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi''$ pour cosocle et un unique constituant intermédiaire $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi'$.*

En utilisant le corollaire B et le théorème E, nous démontrons le résultat suivant.

***Théorème F* (Théorème 7.2.1).** — *Soient $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire et $J \subset \Delta$. On suppose que $\chi \circ \alpha^\vee \neq 1$ pour tout $\alpha \in J$ et que pour tout $I \subset J$ constitué de racines deux à deux orthogonales, la représentation*

$$\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \big(\prod_{\alpha \in I} s_\alpha\big)(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)$$

est topologiquement irréductible. Alors il existe une unique représentation continue unitaire admissible $\Pi_J(\chi)$ de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E de longueur finie sans multiplicité, dont le socle est $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)$ et dont les constituants irréductibles sont exactement les représentations ci-dessus pour tout $I \subset J$ constitué de racines deux à deux orthogonales.

Les séries principales considérées dans le théorème F devraient être topologiquement irréductibles lorsque $\chi \circ \alpha^\vee \notin \{\varepsilon, \varepsilon^{-1}\}$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$ d'après [**12**, Conjecture 3.1.2]. La conjecture analogue modulo p est vraie d'après [**29**, Théorème 4] lorsque $G = \mathrm{GL}_n$ et [**1**, Théorème 1.3] dans le cas général déployé. En particulier si la réduction $\overline{\chi}$ de χ modulo ϖ_E vérifie $\overline{\chi} \circ \alpha^\vee \notin \{\omega, \omega^{-1}\}$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$, alors ces séries principales sont topologiquement irréductibles.

Soient $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \widehat{G}(E)$ une représentation continue ordinaire générique (définie à conjugaison près) et $w_{\Psi_\rho} \in W_{\Psi_\rho}$. En utilisant le théorème F avec $\chi = w_{\Psi_\rho}^{-1}(\chi_\rho)$ et $J = \Delta \cap w_{\Psi_\rho}^{-1}(\Psi_\rho)$, nous démontrons enfin la conjecture de Breuil-Herzig.

***Corollaire G* (Corollaire 7.2.3).** — [**12**, Conjecture 3.5.1] *est vraie.*

Conjecture sur les extensions modulo p

Nous terminons cette thèse en énonçant une nouvelle conjecture (suggérée par Breuil lorsque $G = \mathrm{GL}_n$) sur les extensions entre représentations lisses irréductibles de $G(F)$ sur k_E obtenues par induction parabolique à partir d'une représentation supersingulière du Levi. On suppose le centre de G connexe et le groupe dérivé de G simplement connexe.

Si $P \subset G$ est un sous-groupe parabolique standard et $L \subset P$ est le sous-groupe de Levi standard, on note $\Delta_L^\perp \subset \Delta$ le sous-ensemble des racines simples orthogonales aux racines de (L,T) et pour toute représentation lisse π de $L(F)$ sur k_E, on note π^α la représentation lisse de $L(F)$ sur k_E dont le k_E-espace vectoriel sous-jacent est π et sur lequel $l \in L(F)$ agit à travers $\dot{s}_\alpha l \dot{s}_\alpha$ (voir la section 7.3).

***Conjecture H* (Conjecture 7.3.3)**. — *Soient $P,P' \subset G$ deux sous-groupes paraboliques standards, $L \subset P, L' \subset P$ les sous-groupes de Levi standards et π,π' des représentations supersingulières de $L(F), L'(F)$ respectivement sur k_E. On suppose que les représentations $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \pi$ et $\mathrm{Ind}_{P'^-(F)}^{G(F)} \pi'$ sont irréductibles.*

(i) *Si $P' \not\subset P$ et $P \not\subset P'$, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{P'^-(F)}^{G(F)} \pi', \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \pi\right) = 0.$$

(ii) *Si $F = \mathbb{Q}_p$, $P' = P$ et $\pi' \cong \pi^\alpha \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha) \not\cong \pi$ avec $\alpha \in \Delta_L^\perp$, alors*

$$\dim_{k_E} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi^\alpha \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha), \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi\right) = 1.$$

(iii) *Sinon si $P' \subset P$, alors le foncteur $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}$ induit un isomorphisme k_E-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{L(F)}\left(\mathrm{Ind}_{(P'^-\cap L)(F)}^{L(F)} \pi', \pi\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{P'^-(F)}^{G(F)} \pi', \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \pi\right).$$

(iv) *Sinon si $P \subset P'$, alors le foncteur $\mathrm{Ind}_{P'^-(F)}^{G(F)}$ induit un isomorphisme k_E-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{L'(F)}\left(\pi', \mathrm{Ind}_{(P^-\cap L')(F)}^{L'(F)} \pi\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{P'^-(F)}^{G(F)} \pi', \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \pi\right).$$

Dans les points (iii) et (iv), la condition « Sinon » signifie que les conditions du point (ii) ne sont pas toutes satisfaites. Nous démontrons la conjecture H lorsque $P = B$ en traitant séparément le cas $F = \mathbb{Q}_p$ avec une condition de généricité (Proposition 7.3.6) et le cas $F \neq \mathbb{Q}_p$ sans condition de généricité (Proposition 7.3.8).

Méthodes utilisées

La stratégie d'Emerton

Nous montrons tout d'abord que l'on peut calculer les extensions entre représentations continues unitaires admissibles de $G(F)$ sur E par réduction modulo p^k et dévissage (Proposition 1.1.3). On se ramène ainsi à des calculs d'extensions entre représentations lisses admissibles de $G(F)$ sur $\mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E$ avec ϖ_E une uniformisante de $\mathcal{O}_E$.

Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique standard et $L \subset P$ le sous-groupe de Levi standard. On note A une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale artinienne de corps résiduel k_E (par exemple $A = \mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E$) et $\omega : \mathbb{Q}_p^\times \to A^\times$ l'image du caractère cyclotomique. On utilise le δ-foncteur $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)}$ des parties ordinaires dérivées d'Emerton ([**20**]). On a une suite exacte de A-modules

$$(\star) \quad 0 \to \mathrm{Ext}^1_{L(F)}\left(U, \mathrm{Ord}_{P(F)} V\right) \to \mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U, V\right) \to \mathrm{Hom}_{L(F)}\left(U, \mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{P(F)} V\right)$$

pour toutes représentations lisses localement admissibles U et V de $L(F)$ et $G(F)$ respectivement sur A (voir la suite exacte (1.2.10)).

Calculs de parties ordinaires dérivées

Nous calculons tout d'abord le foncteur $\mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{B(F)}$ sur une induite. Si U est une représentation lisse de $T(F)$ sur A, alors pour tout $w \in W$, on note U^w (ou simplement U^α lorsque $w = s_\alpha$ avec $\alpha \in \Delta$) la représentation lisse de $T(F)$ sur A dont le A-module sous-jacent est U et sur lequel $t \in T(F)$ agit à travers $\dot{w}t\dot{w}^{-1}$.

***Théorème I* (Corollaires 4.2.9 et 4.1.14).** — *Soit U une représentation lisse localement admissible de $T(F)$ sur A.*

(i) *Si $F = \mathbb{Q}_p$, alors on a un isomorphisme naturel $T(\mathbb{Q}_p)$-équivariant*

$$\mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{B(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U\right) \cong \bigoplus_{\alpha\in\Delta} U^\alpha \otimes (\omega^{-1}\circ\alpha).$$

(ii) *Si $F \neq \mathbb{Q}_p$, alors* $\mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{B(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) = 0$.

En utilisant le théorème I et la suite exacte $(\star)$, on démontre le point (ii) du théorème A et le théorème C. On obtient également une inégalité $(\leq)$ dans le point (i) du théorème A. Pour démontrer l'autre inégalité $(\geq)$, on construit des extensions non scindées par induction parabolique à partir d'extensions non scindées (données par la proposition 5.2.2) entre les séries principales de $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ correspondantes pour tout $\alpha \in \Delta$ tel que $\chi' = s_\alpha(\chi)\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\alpha)$ et on montre que les classes de ces extensions sont linéairement indépendantes sur E (grâce à la proposition 5.3.5).

Nous calculons ensuite les foncteurs $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{B(F)}$ en degré quelconque sur une série principale lorsque G admet un « twisting element » (voir la définition 4.2.10) noté θ.

***Théorème J* (Corollaire 4.2.12).** — *Soit $\chi : T(F) \to A^\times$ un caractère lisse. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme $T(F)$-équivariant*

$$\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi\cdot(\omega^{-1}\circ\theta)\right) \cong \bigoplus_{[F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(w)=n} w(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\theta).$$

En utilisant le théorème J et une suite spectrale de Grothendieck (voir la suite spectrale (1.2.9)), on démontre le résultat sur les Ext^n avec $n > 1$ entre séries principales lisses de $G(F)$ sur k_E (Théorème 6.3.1) conditionnellement à [**20**, Conjecture 3.7.2]. En particulier avec $G = \mathrm{GL}_2$, on en déduit la proposition D.

Enfin, nous calculons partiellement les foncteurs $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)}$ (avec P standard quelconque) sur une induite. On note $B_L \subset L$ (resp. $B_L^- \subset L$) le sous-groupe de Borel $B\cap L$ (resp. $B^-\cap L$), $\widetilde{W}_P \subset W$ les représentants de Kostant des classes à droite W/W_L avec $W_L \subset W$ le groupe le Weyl de (L,T) et pour tout $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$, on note $\alpha_{\widetilde{w}_P}$ la somme des racines positives $\alpha\in\Phi^+$ telles que $\widetilde{w}_P(\alpha)\notin\Phi^+$. On conjecture le résultat suivant.

***Conjecture K* (Conjecture 4.1.10).** — *Soit U une représentation lisse localement admissible de $T(F)$ sur A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme naturel $L(F)$-équivariant*

$$\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) \cong \bigoplus_{[F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(\widetilde{w}_P)=n} \mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)}\left(U^{\widetilde{w}_P}\otimes(\omega^{-1}\circ\alpha_{\widetilde{w}_P})\right).$$

Nous prouvons la conjecture K lorsque les termes de la somme directe sont des représentations irréductibles de $L(F)$ d'une part (Proposition 4.1.11) et lorsque $F \neq \mathbb{Q}_p$ et $n = 1$ d'autre part, auquel cas la somme directe est nulle (Corollaire 4.1.14). Dans le cas général, nous montrons qu'il existe un morphisme naturel $L(F)$-équivariant entre les deux représentations de la conjecture K et que ces deux représentations sont naturellement munies de filtrations dont les gradués sont isomorphes en tant que représentations d'un sous-groupe fermé de $B_L(F)$ (Corollaire 4.1.7). Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, $n = 1$ et $P = P_\alpha$ (le sous-groupe parabolique standard de G correspondant à $\alpha \in \Delta$), ce dernier résultat nous suffit pour démontrer le théorème E en utilisant encore la suite exacte $(\star)$.

Filtrations et dévissages

Nous expliquons la méthode utilisée pour les calculs de parties ordinaires dérivées d'une induite, c'est-à-dire pour démontrer les théorèmes I, J et les résultats partiels sur la conjecture K. On note N_P le radical unipotent de P. Les foncteurs $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)}$ sont construits à partir des A-modules de cohomologie d'un sous-groupe ouvert compact $N_{P,0} \subset N_P(F)$ et d'une action (dite de Hecke) d'un sous-monoïde $L^+ \subset L(F)$ sur ces derniers. Soient U une représentation lisse localement admissible de $L(F)$ sur A et $n \in \mathbb{N}$. On procède en deux temps.

Dans un premier temps, on définit des filtrations de représentations induites et on calcule leurs gradués (voir la section 2.2). On définit une filtration de $\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U$ par des sous-$P(F)$-représentations et une filtration de chaque terme de son gradué par des sous-$B(F)$-représentations. Les gradués de ces dernières filtrations sont des sommes directes de représentations lisses de $B(F)$ sur A notées V_w avec $w \in W$. On écrit $w = \widetilde{w}_P w_L$ avec $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$ et $w_L \in W_L$. On détermine le A-module sous-jacent à V_w, ainsi que l'action de sous-groupes fermés $N_{P,w}(F)$ et $(TN_{L,w_L})(F)$ de $N_P(F)$ et $B_L(F)$ respectivement sur V_w. On montre que les filtrations précédentes induisent des filtrations de $\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)}(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U)$ par des sous-$L(F)$-représentations et une filtration de chaque terme de son gradué par des sous-$B_L(F)$-représentations (Propositions 4.1.1 et 4.1.3).

Dans un second temps, on utilise des dévissages de $N_{P,0}$ pour calculer le A-module $\mathrm{H}^n(N_{P,0}, V_w)$ et l'action de Hecke d'un sous-monoïde ouvert $(TN_{L,w_L})^+ \subset (TN_{L,w_L})(F)$. Dans la section 3.1, on généralise la définition de l'action de Hecke à certains monoïdes $\widetilde{L}^+$ sur la cohomologie de certains groupes $\widetilde{N}_0$ munis d'une action de $\widetilde{L}^+$ et on la calcule en degré maximal (Proposition 3.1.5). Dans la section 3.2, on montre comment calculer la cohomologie de $\widetilde{N}_0$ et l'action de Hecke de $\widetilde{L}^+$ à travers certains dévissages de $\widetilde{N}_0$ respectant l'action de $\widetilde{L}^+$. Plus précisément, on montre que la suite spectrale de Hochschild-Serre respecte l'action de Hecke (Proposition 3.2.6). Dans la section 3.3, on utilise des dévissages successifs de $N_{P,0}$: on considère une suite de sous-groupes fermés de $N_{P,0}$ dont le plus petit est un sous-groupe ouvert compact $N_{P,w,0} \subset N_{P,w}(F)$ et dont les quotients successifs sont isomorphes à $\mathbb{Z}_p^{[F:\mathbb{Q}_p]}$. On procède par récurrence. Pour l'initialisation, on calcule le A-module $\mathrm{H}^n(N_{P,w,0}, V_w)$ et l'action de Hecke de $(TN_{L,w_L})^+$ (en degré 0 c'est un calcul explicite et en degré supérieur on montre que V_w est $N_{P,w,0}$-acyclique). Pour l'itération, on utilise un résultat clef (Lemme 3.1.10) qui permet, sous une condition de finitude, de calculer la cohomologie et l'action de Hecke en degré nul et en degré maximal (on utilise ce résultat avec les quotients $\mathbb{Z}_p^{[F:\mathbb{Q}_p]}$).

Notations et conventions

Corps de base

Soit F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On note $\mathrm{val}_p : F^\times \to \mathbb{Q}$ la valuation p-adique normalisée par $\mathrm{val}_p(p) = 1$ et $| \ |_p$ la valeur absolue p-adique correspondante (définie par $|x|_p = p^{-\mathrm{val}_p(x)}$ pour tout $x \in F^\times$). On note $\varepsilon : F^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique p-adique et $\omega : F^\times \to \mathbb{F}_p^\times$ sa réduction modulo p. On note enfin $\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}_p} : F^\times \to \mathbb{Q}_p^\times$ la norme. Par définition, on a $\varepsilon(x) = \mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}_p}(x)| \mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}_p}(x)|_p$ pour tout $x \in F^\times$.

Groupes algébriques

Soit (G, B, T) un triplet avec G un groupe algébrique connexe réductif déployé sur F, $B \subset G$ un sous-groupe de Borel et $T \subset B$ un tore maximal déployé. On note $B^- \subset G$ le sous-groupe de Borel opposé à B par rapport à T et N le radical unipotent de B. On note enfin S le plus grand sous-tore déployé de $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} T$.

Système de racines

On note W le groupe de Weyl de (G, T) et $\ell : W \to \mathbb{N}$ la longueur relative à B. On note Φ les racines de (G, T), $\Phi^+ \subset \Phi$ les racines positives par rapport à B et Δ les racines simples de Φ^+. Pour tout $\alpha \in \Phi$, on note $\alpha^\vee$ la coracine correspondante et $s_\alpha \in W$ la réflexion correspondante. Pour tout $w \in W$, on fixe un représentant $\dot{w} \in G(F)$ de w dans le normalisateur de $T(F)$ et on appelle décomposition réduite de w toute écriture $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{\ell(w)}}$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell(w)} \in \Delta$. On note $w_0 \in W$ l'élément de longueur maximale.

Sous-groupes paraboliques

Si $P \subset G$ est un sous-groupe parabolique standard (c'est-à-dire contenant B) et $L \subset P$ est le sous-groupe de Levi standard (c'est-à-dire contenant T), on introduit les notations suivantes.

On note Z_L le centre de L, $B_L \subset L$ (resp. $B_L^- \subset L$) le sous-groupe de Borel $B \cap L$ (resp. $B^- \cap L$), N_P et N_L les radicaux unipotents de P et B_L respectivement (on a un produit semi-direct $N = N_L \ltimes N_P$). On note enfin N_L^- le radical unipotent de B_L^-.

On note $W_L \subset W$ le groupe de Weyl de (L, T) et $w_{L,0} \in W_L$ l'élément de longueur maximale, $\Phi_L \subset \Phi$ les racines de (L, T), $\Phi_L^+ = \Phi^+ \cap \Phi_L$ les racines positives de (L, B_L, T) et $\Delta_L = \Delta \cap \Phi_L$ les racines simples de Φ_L^+.

Anneaux de coefficients

Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On note $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers de E, ϖ_E une uniformisante de $\mathcal{O}_E$ et k_E le corps résiduel de $\mathcal{O}_E$. On note A une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale artinienne de corps résiduel k_E et on note encore $\omega : F^\times \to A^\times$ l'image de ε dans $A^\times$.

Espaces de fonctions localement constantes

Si X est un espace topologique et V est un A-module, on note $\mathcal{C}^\infty(X, V)$ le A-module des fonctions $f : X \to V$ localement constantes, $\mathrm{supp}(f)$ le support d'une telle fonction (c'est-à-dire le sous-ensemble ouvert et fermé $f^{-1}(V - \{0\})$ de X) et $\mathcal{C}_c^\infty(X, V)$ le sous-A-module constitué des fonctions à support compact.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans un premier temps, nous rappelons les différentes catégories de représentations (p-adiques et modulo p^k) d'un groupe de Lie p-adique, ainsi que leurs propriétés. Dans un second temps, nous rappelons la définition du foncteur d'induction parabolique et du δ-foncteur des parties ordinaires dérivées, ainsi que leurs propriétés.

1.1. Représentations d'un groupe de Lie p-adique

Soit H un groupe de Lie p-adique. On rappelle les différentes catégories de représentations p-adiques et modulo p^k de H ainsi que leurs propriétés. On montre que l'on peut calculer les Ext^1_H entre représentations p-adiques par réduction modulo p^k et dévissages.

Représentations modulo p^k

Soit $\mathrm{Mod}_H(A)$ la catégorie des représentations de H sur A et des applications A-linéaires H-équivariantes. Si V est une représentation de H sur A, on note V^H le sous-A-module des invariants par H et V_H le A-module quotient des coinvariants par H (c'est-à-dire le quotient de V par le sous-A-module engendré par les éléments de la forme $h \cdot v - v$ avec $h \in H$ et $v \in V$). On dit que V est de *type fini* si elle est engendrée sur $A[H]$ par un nombre fini d'éléments. On définit des sous-catégories abéliennes pleines de $\mathrm{Mod}_H(A)$ comme dans [**19**, § 2.2].

On dit qu'une représentation V de H sur A est *lisse* si pour tout $v \in V$, le fixateur de v dans H est ouvert. On note $\mathrm{Mod}_H^\infty(A)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_H(A)$ constituée des représentations lisses. Elle est stable par passage aux sous-objets, quotients et limites inductives filtrantes (voir [**19**, Lemme 2.2.6]). D'après [**30**, Lemme 2.2], c'est une catégorie de Grothendieck[(1)].

On dit qu'une représentation lisse V de H sur A est *admissible* si pour tout sous-groupe ouvert $H_0 \subset H$, le A-module V^{H_0} est de type fini. On note $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{adm}}(A)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_H^\infty(A)$ constituée des représentations admissibles. C'est une sous-catégorie de Serre[(2)] de $\mathrm{Mod}_H^\infty(A)$ (voir [**19**, Lemme 2.2.13]).

[(1)] Une catégorie de Grothendieck est une catégorie abélienne qui possède un générateur, des limites inductives et dans laquelle les limites inductives filtrantes sont exactes.

[(2)] Une sous-catégorie de Serre est une sous-catégorie abélienne pleine stable par passage aux extensions.

On dit qu'une représentation lisse V de H sur A est *localement admissible* si pour tout $v \in V$, la sous-H-représentation de V engendrée par v est admissible. Les représentations localement admissibles de H sur A sont exactement les limites inductives filtrantes dans $\mathrm{Mod}_H^\infty(A)$ de représentations admissibles. On note $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{l,adm}}(A)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_H^\infty(A)$ constituée des représentations localement admissibles. Elle est stable par passage aux sous-objets, quotients et limites inductives filtrantes (voir [**19**, Proposition 2.2.18]). C'est donc une catégorie de Grothendieck.

On définit enfin une condition de finitude. Soit V une représentation de H sur A. On dit que $v \in V$ est localement H-fini si la sous-H-représentation de V engendrée par v est de type fini sur A. On note $V_{H\text{-fin}}$ la sous-H-représentation de V constituée des éléments localement H-finis. On dit que V est *localement H-finie* si $V_{H\text{-fin}} = V$.

Objets injectifs et cohomologie

On donne quelques résultats sur les objets injectifs des différentes catégories de représentations de H sur A. Les catégories $\mathrm{Mod}_H^\infty(A)$ et $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{l,adm}}(A)$ possèdent suffisamment d'injectifs (voir [**20**, Proposition 2.1.1]). On ne connaît pas de résultat analogue pour la catégorie $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{adm}}(A)$, sauf lorsque H est compact auquel cas la catégorie $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{adm}}(A)$ possède suffisamment d'injectifs et ces derniers sont encore injectifs dans la catégorie $\mathrm{Mod}_H^\infty(A)$ (voir [**20**, Proposition 2.1.9]). Si $H_0 \subset H$ est un sous-groupe ouvert ou compact de H, alors les objets injectifs de $\mathrm{Mod}_H^\infty(A)$ sont encore injectifs dans la catégorie $\mathrm{Mod}_{H_0}^\infty(A)$ (voir [**20**, Proposition 2.1.2] et [**20**, Proposition 2.1.11]).

On définit la cohomologie de H à valeurs dans une représentation lisse sur A comme dans [**20**, § 2.2]. Soit V une représentation lisse de H sur A. On note $\mathrm{H}^\bullet(H, V)$ les A-modules de cohomologie de H à valeurs dans V calculés en utilisant des cochaînes localement constantes. On obtient ainsi un δ-foncteur A-linéaire

$$\mathrm{H}^\bullet(H, -) : \mathrm{Mod}_H^\infty(A) \to \mathrm{Mod}(A).$$

On dit que V est *H-acyclique* si $\mathrm{H}^n(H, V) = 0$ pour tout entier $n > 0$.

On suppose H compact. En utilisant l'injection H-équivariante $V \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(H, V)$ qui envoie un élément de V sur son orbite et le lemme 1.1.1 ci-dessous, on voit que les foncteurs $\mathrm{H}^n(H, -)$ sont effaçables pour tout entier $n > 0$. En particulier, ces derniers coïncident avec les foncteurs dérivés à droite du foncteur $(-)^H : \mathrm{Mod}_H^\infty(A) \to \mathrm{Mod}(A)$ et on peut les calculer en utilisant une résolution injective dans la catégorie $\mathrm{Mod}_H^\infty(A)$. De plus, les foncteurs $\mathrm{H}^\bullet(H, -)$ commutent aux limites inductives filtrantes (car l'image d'une cochaîne localement constante est finie par compacité)

Lemme 1.1.1. — *Si H est compact, alors le A-module $\mathcal{C}^\infty(H, V)$ muni de l'action de H par translation à droite est une représentation lisse H-acyclique.*

Démonstration. — C'est un résultat classique. Si H est compact, alors il est profini et $\mathcal{C}^\infty(H, V)$ est un H-module discret induit. Le lemme de Shapiro permet de conclure (voir par exemple [**34**, Chapitre I, § 2.5]). □

Représentations p-adiques

On définit des catégories de représentations continues de H sur $\mathcal{O}_E$ et E (voir [**31**] pour une vue d'ensemble).

Une représentation ϖ_E-adiquement continue de H sur $\mathcal{O}_E$ est un $\mathcal{O}_E$-module ϖ_E-adiquement séparé et complet V^0 dont la torsion est d'exposant borné[(3)] muni d'une action $\mathcal{O}_E$-linéaire de H continue pour la topologie ϖ_E-adique, c'est-à-dire que l'application d'évaluation $H \times V^0 \to V^0$ est continue, ou de façon équivalente que pour tout entier $k \geq 1$, la représentation $V^0/\varpi_E^k V^0$ de H sur $\mathcal{O}_E/\varpi_E^k \mathcal{O}_E$ est lisse.

On dit qu'une représentation ϖ_E-adiquement continue V^0 de H sur $\mathcal{O}_E$ est admissible si $V^0/\varpi_E V^0$ est une représentation lisse admissible de H sur k_E, auquel cas $V^0/\varpi_E^k V^0$ est une représentation lisse admissible de H sur $\mathcal{O}_E/\varpi_E^k \mathcal{O}_E$ pour tout entier $k \geq 1$. La catégorie $\mathrm{Mod}_H^{\varpi_E\text{-adm}}(\mathcal{O}_E)$ des représentations ϖ_E-adiquement continues admissibles de H sur $\mathcal{O}_E$ et des applications $\mathcal{O}_E$-linéaires H-équivariantes est abélienne d'après [**19**, Proposition 2.4.11].

Un E-espace de Banach est un E-espace vectoriel topologique V complet pour une norme ultramétrique. Un réseau $V^0 \subset V$ est un sous-$\mathcal{O}_E$-module tel que $V \cong E \otimes_{\mathcal{O}_E} V^0$. On appelle *boule* de V tout réseau ouvert borné de V. Une représentation *continue* de H sur E est un E-espace de Banach V muni d'une action E-linéaire de H continue au sens où l'application d'évaluation $H \times V \to V$ est continue.

On dit qu'une représentation continue V de H sur E est *admissible* si son dual continu $V' = \mathrm{Hom}_E^{\mathrm{cont}}(V, E)$ est de type fini sur l'algèbre d'Iwasawa $E \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_E[[H_0]]$ de H_0 pour tout (ou de façon équivalente pour un) sous-groupe ouvert compact $H_0 \subset H$. La catégorie $\mathrm{Ban}_H^{\mathrm{adm}}(E)$ des représentations continues admissibles de H sur E et des applications continues E-linéaires H-équivariantes est abélienne d'après [**32**, Théorème 3.5].

On dit qu'une représentation continue V de H sur E est *unitaire* si elle admet une boule V^0 stable par H (ou de façon équivalente si elle admet une norme H-équivariante compatible avec sa topologie). Dans ce cas, V^0 est une représentation ϖ_E-adiquement continue de H sur $\mathcal{O}_E$ et V est admissible si et seulement si V^0 est admissible (voir [**22**, Proposition 6.5.7]). Réciproquement si V^0 est une représentation ϖ_E-adiquement continue de H sur $\mathcal{O}_E$, alors $V = E \otimes_{\mathcal{O}_E} V^0$ est une représentation continue unitaire de H sur E et l'image de V^0 dans V est une boule stable par H. On note $\mathrm{Ban}_H^{\mathrm{adm,u}}(E)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ban}_H^{\mathrm{adm}}(E)$ constituée des représentations unitaires. Elle est stable par passage aux sous-objets et quotients, donc c'est une sous-catégorie abélienne.

Soient V une représentation continue unitaire de H sur E et V^0 une boule de V stable par H. On dit que V est *résiduellement de longueur finie* si $V^0/\varpi_E V^0$ est de longueur finie dans la catégorie $\mathrm{Mod}_H^\infty(k_E)$. Cette condition ne dépend pas du choix de V^0 et lorsqu'elle est satisfaite, la semi-simplifiée de $V^0/\varpi_E V^0$ ne dépend pas non plus du choix de V^0 (voir par exemple [**30**, Lemme 4.3]).

Extensions entre représentations

On précise dans quelles catégories on calcule les groupes abéliens $\mathrm{Ext}_H^\bullet$ d'extensions de Yoneda (voir [**28**, Chapitre VII]) entre représentations de H.

En degré 1, on calcule les A-modules (resp. $\mathcal{O}_E$-modules, E-espaces vectoriels) Ext_H^1 entre représentations lisses (resp. ϖ_E-adiquement continues, continues unitaires) admissibles de H sur A (resp. $\mathcal{O}_E$, E) dans la catégorie $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{adm}}(A)$ (resp. $\mathrm{Mod}_H^{\varpi_E\text{-adm}}(\mathcal{O}_E)$, $\mathrm{Ban}_H^{\mathrm{adm,u}}(E)$).

(3) C'est-à-dire que le sous-$\mathcal{O}_E$-module de torsion $V^0[\varpi_E^\infty] \subset V^0$ est annulé par une puissance de ϖ_E.

En degré quelconque, on calcule les A-modules $\mathrm{Ext}_H^\bullet$ entre représentations lisses localement admissibles de H sur A dans la catégorie $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{l.adm}}(A)$. Entre représentations admissibles, il est équivalent de calculer le A-module Ext_H^1 dans la catégorie $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{adm}}(A)$, mais on ne sait pas si cela est encore vrai pour les A-modules Ext_H^n avec $n > 1$ entier (voir [**20**, Remarque 3.7.8]).

Soient U et V des représentations continues unitaires admissibles de H sur E. On note U^0 et V^0 des boules de U et V respectivement stables par H. Le $\mathcal{O}_E$-module $\mathrm{Hom}_H(U^0, V^0)$ s'identifie à un réseau de $\mathrm{Hom}_H(U, V)$ et on a un isomorphisme $\mathcal{O}_E$-linéaire

$$\mathrm{Hom}_H(U^0, V^0) \cong \varprojlim_k \mathrm{Hom}_H(U^0/\varpi_E^k U^0, V^0/\varpi_E^k V^0),$$

d'où un isomorphisme E-linéaire

$$\mathrm{Hom}_H(U, V) \cong E \otimes_{\mathcal{O}_E} \varprojlim_k \mathrm{Hom}_H(U^0/\varpi_E^k U^0, V^0/\varpi_E^k V^0). \tag{1.1.2}$$

De plus pour tout entier $k \geq 1$, le noyau de l'application de réduction modulo ϖ_E^k des morphismes

$$\mathrm{Hom}_H(U^0, V^0) \to \mathrm{Hom}_H(U^0/\varpi_E^k U^0, V^0/\varpi_E^k V^0)$$

est le sous-$\mathcal{O}_E$-module $\varpi_E^k \mathrm{Hom}_H(U^0, V^0)$, d'où avec $k = 1$ l'inégalité

$$\dim_E \mathrm{Hom}_H(U, V) \leq \dim_{k_E} \mathrm{Hom}_H(U^0/\varpi_E U^0, V^0/\varpi_E V^0).$$

Nous montrons des propriétés analogues (déjà connues, voir l'appendice de [**12**]) pour le bifoncteur Ext_H^1.

Proposition 1.1.3. — *Avec les notations précédentes, si U est résiduellement de longueur finie, alors on a un isomorphisme E-linéaire*

$$\mathrm{Ext}_H^1(U, V) \cong E \otimes_{\mathcal{O}_E} \varprojlim_k \mathrm{Ext}_H^1(U^0/\varpi_E^k U^0, V^0/\varpi_E^k V^0)$$

et

$$\dim_E \mathrm{Ext}_H^1(U, V) \leq \dim_{k_E} \mathrm{Ext}_H^1(U^0/\varpi_E U^0, V^0/\varpi_E V^0).$$

Démonstration. — Le produit tensoriel par E sur $\mathcal{O}_E$ est exact (en tant que localisation), donc il induit une application $\mathcal{O}_E$-linéaire

$$\Lambda : \mathrm{Ext}_H^1(U^0, V^0) \to \mathrm{Ext}_H^1(U, V).$$

Montrons que $\ker \Lambda$ est le sous-$\mathcal{O}_E$-module de torsion de $\mathrm{Ext}_H^1(U^0, V^0)$. Comme $\mathrm{Ext}_H^1(U, V)$ est sans torsion, il suffit de montrer que toute classe dans $\ker \Lambda$ est de torsion. Soit donc $x \in \ker \Lambda$ représentée par une extension

$$0 \to V^0 \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{\pi} U^0 \to 0.$$

Par hypothèse, il existe une section $\sigma : U \to \mathcal{E}$ avec $\mathcal{E} = E \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{E}^0$. Comme U^0 et V^0 sont sans torsion il en est de même pour $\mathcal{E}^0$, donc l'application naturelle $\mathcal{E}^0 \to \mathcal{E}$ identifie $\mathcal{E}^0$ à une boule de $\mathcal{E}$ stable par H. Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut choisir n suffisamment grand pour que $\varpi_E^n \sigma(U^0) \subset \mathcal{E}^0$. Alors $\varpi_E^n \sigma$ induit une section de l'extension

$$0 \to V^0 \xrightarrow{\iota} \iota(V^0) + \varpi_E^n \mathcal{E}^0 \xrightarrow{\varpi_E^{-n}\pi} U^0 \to 0.$$

Or la classe de cette extension est $\varpi_E^n x$, d'où $\varpi_E^n x = 0$. Ainsi x est de torsion.

Montrons que $\operatorname{im}\Lambda$ est un réseau de $\operatorname{Ext}^1_H(U,V)$. Il suffit de montrer que toute classe de $\operatorname{Ext}^1_H(U,V)$ est envoyée dans $\operatorname{im}\Lambda$ par une homothétie. Soit donc $x \in \operatorname{Ext}^1_H(U,V)$ représentée par une extension

$$0 \to V \xrightarrow{\iota} \mathcal{E} \xrightarrow{\pi} U \to 0.$$

Soient $\mathcal{E}^0$ une boule de $\mathcal{E}$ stable par H et $n \in \mathbb{N}$. On peut supposer $\iota^{-1}(\mathcal{E}^0) = V^0$, quitte à remplacer $\mathcal{E}^0$ par $\iota(V^0) + \varpi_E^n\mathcal{E}^0$ avec n suffisamment grand pour que $\iota^{-1}(\varpi_E^n\mathcal{E}^0) \subset V^0$. La classe $\varpi_E^n x$ est représentée par l'extension

$$0 \to V \xrightarrow{\iota} \mathcal{E} \xrightarrow{\varpi_E^{-n}\pi} U \to 0.$$

On peut choisir n suffisamment grand pour que $U^0 \subset \varpi_E^{-n}\pi(\mathcal{E}^0)$. Alors $\mathcal{E}^0 \cap (\varpi_E^{-n}\pi)^{-1}(U^0)$ est une boule de $\mathcal{E}$ stable par H et par construction c'est une extension de U^0 par V^0. Ainsi $\varpi_E^n x \in \operatorname{im}\Lambda$.

Le $\mathcal{O}_E$-module U^0 est plat car sans torsion, donc la réduction modulo ϖ_E^k des extensions induit une application $\mathcal{O}_E$-linéaire $\upsilon_k : \operatorname{Ext}^1_H(U^0,V^0) \to \operatorname{Ext}^1_H(U^0/\varpi_E^k U^0, V^0/\varpi_E^k V^0)$ pour tout entier $k \geq 1$, d'où une application $\mathcal{O}_E$-linéaire

$$\Upsilon : \operatorname{Ext}^1_H(U^0,V^0) \to \varprojlim_k \operatorname{Ext}^1_H(U^0/\varpi_E^k U^0, V^0/\varpi_E^k V^0)$$

où les morphismes de transition du système projectif sont les applications $\mathcal{O}_E$-linéaires $\upsilon_{i,j} : \operatorname{Ext}^1_H(U_j,V_j) \to \operatorname{Ext}^1_H(U_i,V_i)$ induites par la réduction modulo ϖ_E^i des extensions pour tous $1 \leq i \leq j$ entiers (le $\mathcal{O}_E/\varpi_E^j\mathcal{O}_E$-module U_j étant plat par changement de base).

Montrons que Υ est surjective. Soit $(x_k) \in \varprojlim_k \operatorname{Ext}^1_H(U^0/\varpi_E^k U^0, V^0/\varpi_E^k V^0)$ représentée par des extensions

$$(0 \to V^0/\varpi_E^k V^0 \xrightarrow{\iota_k} \mathcal{E}_k \xrightarrow{\pi_k} U^0/\varpi_E^k U^0 \to 0).$$

Ces extensions forment un système projectif qui vérifie la condition de Mittag-Leffler (car les morphismes de transition $V^0/\varpi_E^j V^0 \to V^0/\varpi_E^i V^0$ sont surjectifs pour tous $1 \leq i \leq j$ entiers). En passant à la limite projective et en notant $\mathcal{E}^0 = \varprojlim_k \mathcal{E}_k$, on obtient donc une suite exacte courte de représentations continues (pour la topologie de la limite projective, qui coïncide ici avec la topologie ϖ_E-adique) de H sur $\mathcal{O}_E$

$$0 \to V^0 \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{\pi} U^0 \to 0.$$

Comme $\mathcal{E}^0$ est ϖ_E-adiquement séparé et complet (en tant que limite projective de $\mathcal{O}_E$-modules ϖ_E-adiquement discrets) et sans torsion (puisque V^0 et U^0 le sont), on obtient une classe $x \in \operatorname{Ext}^1_H(U^0,V^0)$. Par construction, on a $\Upsilon(x) = (x_k)$.

Montrons que Υ est injective. Soit $x \in \ker\Upsilon$ représentée par l'extension

$$0 \to V^0 \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{\pi} U^0 \to 0.$$

Par hypothèse, il existe une section $U^0/\varpi_E^k U^0 \to \mathcal{E}^0/\varpi_E^k\mathcal{E}^0$ pour tout entier $k \geq 1$. Comme $U^0/\varpi_E^k U^0$ est de type fini sur $A[H]$ (car U est résiduellement de longueur finie) et $V^0/\varpi_E^k V^0$ est admissible (car V l'est), $\operatorname{Hom}_H(U^0/\varpi_E^k U^0, V^0/\varpi_E^k V^0)$ est de type fini sur $\mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E$ d'après [**19**, Lemme 2.3.10], donc fini. On en déduit qu'il existe un nombre fini de sections $U^0/\varpi_E^k U^0 \to \mathcal{E}^0/\varpi_E^k\mathcal{E}^0$. On peut donc choisir par récurrence une section $\sigma_k : U^0/\varpi_E^k U^0 \to \mathcal{E}^0/\varpi_E^k\mathcal{E}^0$ pour tout entier $k \geq 1$, de sorte que $\sigma_j \equiv \sigma_i \pmod{\varpi_E^i}$ pour tous $1 \leq i \leq j$ entiers. On obtient ainsi une section $\sigma : U^0 \to \mathcal{E}^0$, d'où $x = 0$.

On a ainsi montré que Υ est un isomorphisme. Par ce qui précède, on a une application $\mathcal{O}_E$-linéaire

$$\Lambda \circ \Upsilon^{-1} : \varprojlim_k \operatorname{Ext}^1_H(U^0/\varpi_E^k U^0, V^0/\varpi_E^k V^0) \to \operatorname{Ext}^1_H(U, V)$$

dont le noyau est le sous-$\mathcal{O}_E$-module de torsion et dont l'image est un réseau. En tensorisant par E sur $\mathcal{O}_E$, on obtient donc l'isomorphisme de l'énoncé.

Il reste à démontrer l'inégalité de l'énoncé. Montrons que pour tout entier $k \geq 1$, le noyau de l'application de réduction modulo ϖ_E^k des extensions

$$\upsilon_k : \operatorname{Ext}^1_H(U^0, V^0) \to \operatorname{Ext}^1_H(U^0/\varpi_E^k U^0, V^0/\varpi_E^k V^0)$$

est le sous-$\mathcal{O}_E$-module $\varpi_E^k \operatorname{Ext}^1_H(U^0, V^0)$. Comme $\varpi_E^k \operatorname{Ext}^1_H(U^0/\varpi_E^k U^0, V^0/\varpi_E^k V^0) = 0$, on a $\ker \upsilon_k \supset \varpi_E^k \operatorname{Ext}^1_H(U^0, V^0)$. Montrons l'autre inclusion. Soit donc $x \in \ker \upsilon_k$ représentée par l'extension

$$0 \to V^0 \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{\pi} U^0 \to 0.$$

Par hypothèse, il existe une rétraction $\mathcal{E}^0/\varpi_E^k \mathcal{E}^0 \to V^0/\varpi_E^k V^0$. Soit $\varrho_k : \mathcal{E}^0 \to V^0/\varpi_E^k V^0$ sa composée avec la projection $\mathcal{E}^0 \twoheadrightarrow \mathcal{E}^0/\varpi_E^k \mathcal{E}^0$. Alors $x = \varpi_E^k y$ avec $y \in \operatorname{Ext}^1_H(U^0, V^0)$ la classe de l'extension

$$0 \to V^0 \xrightarrow{\varpi_E^k \iota} \ker \varrho_k \xrightarrow{\pi} U^0 \to 0,$$

d'où $x \in \varpi_E^k \operatorname{Ext}^1_H(U^0, V^0)$.

On a ainsi montré que pour tout entier $k \geq 1$, la réduction modulo ϖ_E^k des extensions induit une injection $\mathcal{O}_E$-linéaire

$$\operatorname{Ext}^1_H(U^0, V^0)/\varpi_E^k \operatorname{Ext}^1_H(U^0, V^0) \hookrightarrow \operatorname{Ext}^k_H(U^0/\varpi_E^k U^0, V^0/\varpi_E^k V^0).$$

Avec $k = 1$, on en déduit l'inégalité de l'énoncé. □

1.2. Induction parabolique et parties ordinaires

Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique standard et $L \subset P$ le sous-groupe de Levi standard. On rappelle les résultats de [**19, 20**] relatifs au triplet (G, P, L).

Définitions et premières propriétés

Si U est une représentation lisse de $L(F)$ sur A, alors U est une représentation lisse de $P^-(F)$ sur A par *inflation* et on pose

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U \overset{\text{déf}}{=} \big\{ & f : G(F) \to U \text{ localement constante} \\ & \mid f(pg) = p \cdot f(g) \text{ pour tous } p \in P^-(F) \text{ et } g \in G(F) \big\}\end{aligned}$$

et on fait agir $G(F)$ sur ce A-module par translation à droite. On définit ainsi le foncteur A-linéaire d'*induction parabolique* $\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} : \operatorname{Mod}_{L(F)}^{\infty}(A) \to \operatorname{Mod}_{G(F)}^{\infty}(A)$ qui est exact (voir [**19**, Proposition 4.1.5]). De plus, il préserve l'admissibilité (voir [**19**, Proposition 4.1.7]) et commute aux limites inductives filtrantes (voir [**19**, Lemme 4.1.4]), donc il induit par restriction des foncteurs A-linéaires exacts $\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} : \operatorname{Mod}_{L(F)}^{\mathrm{adm}}(A) \to \operatorname{Mod}_{G(F)}^{\mathrm{adm}}(A)$ et $\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} : \operatorname{Mod}_{L(F)}^{\mathrm{l.adm}}(A) \to \operatorname{Mod}_{G(F)}^{\mathrm{l.adm}}(A)$.

On fixe un sous-groupe ouvert compact $N_{P,0} \subset N_P(F)$ et on définit des sous-monoïdes ouverts de $L(F)$ et $Z_L(F)$ en posant

$$L^+ \overset{\text{déf}}{=} \left\{ l \in L(F) \mid lN_{P,0}l^{-1} \subset N_{P,0} \right\}$$
$$Z_L^+ \overset{\text{déf}}{=} Z_L(F) \cap L^+.$$

Si V est une représentation lisse de $P(F)$ sur A, les A-modules $\mathrm{H}^\bullet(N_{P,0}, V)$ sont naturellement des représentations lisses de L^+ sur A (voir la section 3.1) et les A-modules

$$\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)} V \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{A[Z_L^+]} \left(A[Z_L(F)], \mathrm{H}^\bullet(N_{P,0}, V) \right)_{Z_L(F)\text{-fin}}$$

sont naturellement des représentations lisses de $L(F)$ sur A (voir [**19**, Lemme 3.1.7]) appelée les *parties ordinaires dérivées* de V. On définit ainsi des foncteurs A-linéaires $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)} : \mathrm{Mod}^\infty_{P(F)}(A) \to \mathrm{Mod}^\infty_{L(F)}(A)$ qui ne dépendent pas du choix de $N_{P,0}$ à isomorphisme près (voir [**20**, Proposition 3.3.2]). Ils sont nuls en degré plus grand que $[F : \mathbb{Q}_p] \cdot \dim N_P$ (voir [**20**, Proposition 3.6.1]) et commutent aux limites inductives filtrantes (voir [**19**, Proposition 3.2.2]).

Si V est une représentation lisse admissible de $G(F)$ sur A, alors les représentations lisses $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)} V$ de $L(F)$ sur A sont admissibles (voir [**20**, Théorème 3.4.7 (2)]). On en déduit que les foncteurs $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)}$ induisent par restriction des foncteurs A-linéaires $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{G(F)}(A) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{L(F)}(A)$ et $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G(F)}(A) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{L(F)}(A)$.

δ-Foncteurs

En degré 0, le foncteur des *parties ordinaires*

$$\mathrm{Ord}_{P(F)} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{H}^0\mathrm{Ord}_{P(F)}$$

est exact à gauche (voir [**19**, Proposition 3.2.4]). On compare ses foncteurs dérivés à droite avec les foncteurs $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)}$.

Soit $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.fin}}_{Z_L^+}(A)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}^\infty_{Z_L^+}(A)$ (voir la section 3.1) constituée des représentations qui sont réunions de sous-A-modules de type fini Z_L^+-invariants. C'est une sous-catégorie abélienne car A est noethérien. Le résultat suivant montre que la restriction du foncteur $\mathrm{Hom}_{A[Z_L^+]}(A[Z_L(F)], -)_{Z_L(F)\text{-fin}}$ à $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.fin}}_{Z_L^+}(A)$ est une localisation.

Lemme 1.2.1 **(**[**20**, Lemme 3.2.1]**)**. — *Pour toute représentation M dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.fin}}_{Z_L^+}(A)$, l'évaluation en $1 \in A[Z_L(F)]$ induit un isomorphisme naturel $Z_L(F)$-équivariant*

$$\mathrm{Hom}_{A[Z_L^+]}(A[Z_L(F)], M)_{Z_L(F)\text{-fin}} \xrightarrow{\sim} A[Z_L(F)] \otimes_{A[Z_L^+]} M.$$

En particulier, le foncteur $\mathrm{Hom}_{A[Z_L^+]}(A[Z_L(F)], -)_{Z_L(F)\text{-fin}}$ est exact sur $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.fin}}_{Z_L^+}(A)$.

On rappelle à présent le résultat suivant.

Théorème 1.2.2 **(**[**20**, Théorème 3.4.7 (1)]**)**. — *Pour toute représentation lisse localement admissible V de $G(F)$ sur A, les représentations lisses $\mathrm{H}^\bullet(N_{P,0}, V)$ de L^+ sur A sont dans la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.fin}}_{Z_L^+}(A)$.*

On déduit du théorème 1.2.2 que pour toute suite exacte courte de représentations lisses admissibles (resp. localement admissibles) de $G(F)$ sur A

$$0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0,$$

la suite exacte longue de cohomologie associée

$$0 \to \mathrm{H}^0(N_{P,0}, V_1) \to \mathrm{H}^0(N_{P,0}, V_2) \to \mathrm{H}^0(N_{P,0}, V_3) \to \mathrm{H}^1(N_{P,0}, V_1) \to \cdots$$

est dans la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.fin}}_{Z_L^+}(A)$, donc en utilisant le lemme 1.2.1 on voit que la suite de représentations lisses admissibles (resp. localement admissibles) de $L(F)$ sur A

$$0 \to \mathrm{H}^0\mathrm{Ord}_{P(F)}\, V_1 \to \mathrm{H}^0\mathrm{Ord}_{P(F)}\, V_2 \to \mathrm{H}^0\mathrm{Ord}_{P(F)}\, V_3 \to \mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{P(F)}\, V_1 \to \cdots$$

obtenue en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{A[Z_L^+]}(A[Z_L(F)], -)_{Z_L(F)\text{-fin}}$ est exacte. Les foncteurs $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{G(F)}(A) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{L(F)}(A)$ (resp. $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G(F)}(A) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{L(F)}(A)$) forment ainsi un δ-foncteur (voir aussi [**20**, Corollaire 3.4.8]).

Soient $\mathrm{R}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G(F)}(A) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{L(F)}(A)$ les foncteurs dérivés à droite du foncteur $\mathrm{Ord}_{P(F)} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G(F)}(A) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{L(F)}(A)$. Par universalité des foncteurs dérivés, l'égalité $\mathrm{R}^0\mathrm{Ord}_{P(F)} = \mathrm{H}^0\mathrm{Ord}_{P(F)} = \mathrm{Ord}_{P(F)}$ se prolonge de façon unique en un morphisme de δ-foncteurs

$$\mathrm{R}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)} \to \mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)} \tag{1.2.3}$$

qui est un isomorphisme en degré 0, donc par décalage une injection en degré 1

$$\mathrm{R}^1\mathrm{Ord}_{P(F)} \hookrightarrow \mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{P(F)}\,. \tag{1.2.4}$$

En degré quelconque, on a la conjecture suivante (voir [**20**, Conjecture 3.7.2]) qui est démontrée pour $G = \mathrm{GL}_2$ dans [**23**].

Conjecture 1.2.5 **(Emerton)**. — *Le morphisme* (1.2.3) *est un isomorphisme.*

Relation d'adjonction

On donne le lien entre les foncteurs $\mathrm{Ind}^{G(F)}_{P^-(F)}$ et $\mathrm{Ord}_{P(F)}$.

Proposition 1.2.6 **(**[**19**, Proposition 4.3.4]**)**. — *Soit U une représentation lisse localement $Z_L(F)$-finie de $L(F)$ sur A. On un isomorphisme naturel $L(F)$-équivariant*

$$U \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}_{P(F)}\left(\mathrm{Ind}^{G(F)}_{P^-(F)}\, U\right).$$

En particulier, le foncteur $\mathrm{Ord}_{P(F)} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{G(F)}(A) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{L(F)}(A)$ *(resp.* $\mathrm{Ord}_{P(F)} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G(F)}(A) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{L(F)}(A)$*) est un quasi-inverse à gauche du foncteur* $\mathrm{Ind}^{G(F)}_{P^-(F)} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{L(F)}(A) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{G(F)}(A)$ *(resp.* $\mathrm{Ind}^{G(F)}_{P^-(F)} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{L(F)}(A) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G(F)}(A)$*).*

Démonstration. — D'après [**4**, Proposition 4.10 d)], la projection $G(F) \twoheadrightarrow P^-(F)\backslash G(F)$ induit une immersion ouverte $N_P(F) \hookrightarrow P^-(F)\backslash G(F)$, d'où une injection naturelle $P(F)$-équivariante (voir [**19**, Lemme 4.1.9])

$$\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(N_P(F), U) \hookrightarrow \mathrm{Ind}^{G(F)}_{P^-(F)}\, U$$

qui induit un isomorphisme $L(F)$-équivariant (voir [**19**, Lemme 4.3.1])

$$\mathrm{Ord}_{P(F)}\left(\mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(N_P(F),U)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}_{P(F)}\left(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U\right).$$

On déduit de [**19**, Proposition 4.2.7] que l'injection naturelle A-linéaire

$$U \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(N_P(F),U)^{N_{P,0}}$$

définie par $u \mapsto 1_{N_{P,0}}u$ avec $1_{N_{P,0}}$ la fonction caractéristique de $N_{P,0}$ sur $N_P(F)$ est L^+-équivariante et que son image par le foncteur $\mathrm{Hom}_{A[Z_L^+]}(A[Z_L(F)],-)_{Z_L(F)\text{-fin}}$ est un isomorphisme $L(F)$-équivariant

$$U \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}_{P(F)}\left(\mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(N_P(F),U)\right).$$

En composant ces deux injections, on obtient une injection naturelle L^+-équivariante

$$U \hookrightarrow \left(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U\right)^{N_{P,0}} \tag{1.2.7}$$

dont l'image par le foncteur $\mathrm{Hom}_{A[Z_L^+]}(A[Z_L(F)],-)_{Z_L(F)\text{-fin}}$ est l'isomorphisme $L(F)$-équivariant de l'énoncé.

Ainsi le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)}$ restreint aux représentations localement $Z_L(F)$-finies admet le foncteur $\mathrm{Ord}_{P(F)}$ pour quasi-inverse à gauche. Comme toute représentation lisse localement admissible de $L(F)$ sur A est localement $Z_L(F)$-finie d'après [**19**, Lemme 2.3.4], on en déduit la proposition. □

Théorème 1.2.8 ([**19**, Théorème 4.4.6]). — *Soient U une représentation lisse admissible de $L(F)$ sur A et V une représentation lisse de $G(F)$ sur A. Le foncteur* $\mathrm{Ord}_{P(F)}$ *induit un isomorphisme A-linéaire*

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U,V\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{L(F)}\left(U,\mathrm{Ord}_{P(F)} V\right).$$

En particulier, le foncteur $\mathrm{Ord}_{P(F)} : \mathrm{Mod}_{G(F)}^{\mathrm{adm}}(A) \to \mathrm{Mod}_{L(F)}^{\mathrm{adm}}(A)$ *(resp.* $\mathrm{Ord}_{P(F)} : \mathrm{Mod}_{G(F)}^{\mathrm{l.adm}}(A) \to \mathrm{Mod}_{L(F)}^{\mathrm{l.adm}}(A)$*) est l'adjoint à droite du foncteur* $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} : \mathrm{Mod}_{L(F)}^{\mathrm{adm}}(A) \to \mathrm{Mod}_{G(F)}^{\mathrm{adm}}(A)$ *(resp.* $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} : \mathrm{Mod}_{L(F)}^{\mathrm{l.adm}}(A) \to \mathrm{Mod}_{G(F)}^{\mathrm{l.adm}}(A)$*).*

Adjonction dérivée

Soient U et V des représentations lisses localement admissibles de $L(F)$ et $G(F)$ respectivement sur A. Le théorème 1.2.8 montre que l'on a un isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Hom}_{L(F)}(U,-) \circ \mathrm{Ord}_{P(F)} \cong \mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U,-)$$

et que $\mathrm{Ord}_{P(F)}$ envoie les injectifs de $\mathrm{Mod}_{G(F)}^{\mathrm{l.adm}}(A)$ sur des injectifs de $\mathrm{Mod}_{L(F)}^{\mathrm{l.adm}}(A)$ (car c'est l'adjoint à droite du foncteur $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}$ qui est exact). On en déduit une suite spectrale de Grothendieck (voir [**25**, Théorème 2.4.1]) de A-modules

$$\mathrm{Ext}_{L(F)}^{i}\left(U,\mathrm{R}^j\mathrm{Ord}_{P(F)} V\right) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{G(F)}^{i+j}\left(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U,V\right). \tag{1.2.9}$$

Les termes de bas degré de cette suite spectrale forment une suite exacte de A-modules

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{L(F)}\left(U, \operatorname{Ord}_{P(F)} V\right) \to \operatorname{Ext}^1_{G(F)}\left(\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U, V\right) \to \operatorname{Hom}_{L(F)}\left(U, \mathrm{R}^1\operatorname{Ord}_{P(F)} V\right)$$
$$\to \operatorname{Ext}^2_{L(F)}\left(U, \operatorname{Ord}_{P(F)} V\right) \to \operatorname{Ext}^2_{G(F)}\left(\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U, V\right)$$

et en utilisant l'injection (1.2.4), on obtient une suite exacte de A-modules

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{L(F)}\left(U, \operatorname{Ord}_{P(F)} V\right) \to \operatorname{Ext}^1_{G(F)}\left(\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U, V\right) \to \operatorname{Hom}_{L(F)}\left(U, \mathrm{H}^1\operatorname{Ord}_{P(F)} V\right). \tag{1.2.10}$$

Le premier morphisme non trivial de cette suite exacte est induit par le foncteur exact $\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}$ et le morphisme naturel $\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \operatorname{Ord}_{P(F)} V \to V$. Le second morphisme non trivial associe à la classe d'une extension

$$0 \to V \to \mathcal{E} \to \operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U \to 0$$

le morphisme δ de la suite exacte longue

$$0 \to \operatorname{Ord}_{P(F)} V \to \operatorname{Ord}_{P(F)} \mathcal{E} \to \operatorname{Ord}_{P(F)} \operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1\operatorname{Ord}_{P(F)} V \to \cdots$$

composé avec l'inverse de l'isomorphisme de la proposition 1.2.6.

Analogues p-adiques

Si U une représentation continue unitaire admissible de $L(F)$ sur E, alors U est une représentation continue unitaire de $P^-(F)$ sur E par inflation et on pose

$$\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U \overset{\text{déf}}{=} \big\{f : G(F) \to U \text{ continue}$$
$$\mid f(pg) = p \cdot f(g) \text{ pour tous } p \in P^-(F) \text{ et } g \in G(F)\big\}$$

et on fait agir $G(F)$ sur ce E-espace de Banach par translation à droite. Si $U^0 \subset U$ est une boule stable par $L(F)$, alors le sous-$\mathcal{O}_E$-module $\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U^0 \subset \operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U$ constitué des fonctions à valeurs dans U^0 est une boule stable par $G(F)$ et on a un isomorphisme $G(F)$-équivariant

$$\left(\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U^0\right) / \varpi_E^k \left(\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U^0\right) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \left(U^0/\varpi_E^k U^0\right)$$

pour tout entier $k \geq 1$ (voir [**19**, Lemme 4.1.3]). On en conclut que $\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U$ est une représentation continue unitaire admissible de $G(F)$ sur E et que l'on a un isomorphisme $G(F)$-équivariant

$$\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U \cong E \otimes_{\mathcal{O}_E} \varprojlim_k \operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \left(U^0/\varpi_E^k U^0\right). \tag{1.2.11}$$

On obtient ainsi un foncteur E-linéaire $\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} : \operatorname{Ban}_{L(F)}^{\mathrm{adm,u}}(E) \to \operatorname{Ban}_{G(F)}^{\mathrm{adm,u}}(E)$ qui est exact (voir [**19**, Proposition 4.1.5]).

Si V est une représentation continue unitaire admissible de $G(F)$ sur E et $V^0 \subset V$ est une boule stable par $G(F)$, on pose

$$\mathrm{Ord}_{P(F)} V \stackrel{\text{déf}}{=} E \otimes_{\mathcal{O}_E} \varprojlim_k \mathrm{Ord}_{P(F)} \left(V^0/\varpi_E^k V^0\right).$$

On obtient ainsi un foncteur E-linéaire $\mathrm{Ord}_{P(F)} : \mathrm{Ban}_{G(F)}^{\mathrm{adm,u}}(E) \to \mathrm{Ban}_{L(F)}^{\mathrm{adm,u}}(E)$ qui est exact à gauche (voir [**19**, Théorème 3.4.8]).

Proposition 1.2.12. — *Soit U une représentation continue unitaire admissible de $L(F)$ sur E. On un isomorphisme naturel $L(F)$-équivariant*

$$U \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U\right).$$

En conséquence, le foncteur $\mathrm{Ord}_{P(F)} : \mathrm{Ban}_{G(F)}^{\mathrm{adm,u}}(E) \to \mathrm{Ban}_{L(F)}^{\mathrm{adm,u}}(E)$ *est un quasi-inverse à gauche du foncteur* $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} : \mathrm{Ban}_{L(F)}^{\mathrm{adm,u}}(E) \to \mathrm{Ban}_{G(F)}^{\mathrm{adm,u}}(E)$.

Démonstration. — Soit $U^0 \subset U$ une boule stable par $L(F)$. En utilisant l'isomorphisme (1.2.11) et la proposition 1.2.6 avec $U^0/\varpi_E^k U^0$ au lieu de U pour tout entier $k \geq 1$, on obtient l'isomorphisme de l'énoncé (voir aussi [**19**, Corollaire 4.3.5]). □

Théorème 1.2.13. — *Soient U et V des représentations continues unitaires admissibles de $L(F)$ et $G(F)$ respectivement sur E. Le foncteur* $\mathrm{Ord}_{P(F)}$ *induit un isomorphisme E-linéaire*

$$\mathrm{Hom}_{G(F)} \left(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U, V\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{L(F)} \left(U, \mathrm{Ord}_{P(F)} V\right).$$

En conséquence, le foncteur $\mathrm{Ord}_{P(F)} : \mathrm{Ban}_{G(F)}^{\mathrm{adm,u}}(E) \to \mathrm{Ban}_{L(F)}^{\mathrm{adm,u}}(E)$ *est l'adjoint à droite du foncteur* $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} : \mathrm{Ban}_{L(F)}^{\mathrm{adm,u}}(E) \to \mathrm{Ban}_{G(F)}^{\mathrm{adm,u}}(E)$.

Démonstration. — Soient $U^0 \subset U$ et $V^0 \subset V$ des boules stables par $L(F)$ et $G(F)$ respectivement. En utilisant les isomorphismes (1.1.2) et (1.2.11) et le théorème 1.2.8 avec $U^0/\varpi_E^k U^0$ et $V^0/\varpi_E^k V^0$ au lieu de U et V respectivement pour tout entier $k \geq 1$, on obtient l'isomorphisme de l'énoncé (voir aussi [**19**, Corollaire 4.4.6]). □

CHAPITRE 2

FILTRATIONS DE BRUHAT

Nous définissons des foncteurs d'induction compacte en lien avec le foncteur d'induction parabolique. Puis, nous définissons des filtrations de certaines représentations induites à partir de la décomposition de Bruhat et nous calculons leurs gradués. Enfin, nous adaptons nos résultats aux représentations ordinaires.

2.1. Les foncteurs d'induction compacte

Après quelques préliminaires topologiques, on définit et on étudie des foncteurs $\text{c-ind}_{B^-(F)}^{X}$ en lien avec le foncteur $\text{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)}$.

Préliminaires

Un espace séparé est dit *localement profini* si tout point admet une base de voisinages constituée d'ouverts compacts. Tout sous-espace localement fermé (c'est-à-dire intersection d'un ouvert et d'un fermé) d'un espace localement profini est encore localement profini (voir [**3**, Lemme 1.2]). Un espace topologique est dit *profini* s'il est compact et localement profini.

Tout groupe de Lie p-adique est localement profini. Soient H un groupe de Lie p-adique et X un espace localement profini muni d'une action continue $X \times H \to X$. Si le quotient X/H est séparé, alors X/H est localement profini (voir [**3**, Lemme 6.4]).

Lemme 2.1.1. — *Tout recouvrement ouvert d'un espace profini admet un raffinement fini constitué d'ouverts compacts deux à deux disjoints.*

Démonstration. — Il s'agit de [**3**, Lemme 1.3] dont nous donnons la preuve. Soit X un espace topologique profini. Puisque la topologie de X admet une base constituée d'ouverts compacts, tout recouvrement ouvert admet un raffinement constitué d'ouverts compacts que l'on peut supposer fini par compacité de X. Si $(O_i)_{i\in I}$ est un tel recouvrement, alors

$$\left(\left(\bigcap_{j\in J} O_j\right)\bigcap\left(\bigcap_{i\in I-J} X - O_i\right)\right)_{J\subset I}$$

est un raffinement fini de $(O_i)_{i\in I}$ constitué d'ouverts compacts deux à deux disjoints. $\square$

Le groupe $G(F)$ est localement profini et le quotient $B^-(F)\backslash G(F)$ est compact donc profini. On déduit du lemme 2.1.1 que le fibré principal $G(F) \twoheadrightarrow B^-(F)\backslash G(F)$ est trivial, c'est-à-dire qu'il admet une section continue $\varsigma : B^-(F)\backslash G(F) \hookrightarrow G(F)$. En effet, d'après [**4**, Théorème 4.13 a)] il possède une section locale, donc par translation on peut trouver un recouvrement de $B^-(F)\backslash G(F)$ par des ouverts trivialisants. En choisissant un raffinement de ce recouvrement par des ouverts deux à deux disjoints, on peut recoller ces sections locales en une section globale.

Définition et propriétés

Soit U une représentation lisse de $T(F)$ sur A. On fixe un sous-groupe fermé H de $G(F)$. Pour tout sous-ensemble $X \subset G(F)$ localement fermé et $(B^-(F), H)$-biinvariant (c'est-à-dire $B^-(F)$-invariant par translation à gauche et H-invariant par translation à droite), on définit une représentation lisse de H sur A en faisant agir H par translation à droite sur le A-module

$$\begin{aligned}\text{c-ind}_{B^-(F)}^X U \overset{\text{déf}}{=} \big\{ & f : X \to U \text{ localement constante à support compact} \\ & \text{modulo } B^-(F) \mid f(bx) = b \cdot f(x) \text{ pour tous } b \in B^-(F) \text{ et } x \in X \big\}\end{aligned}$$

et on obtient ainsi un foncteur $\text{c-ind}_{B^-(F)}^X : \text{Mod}_{T(F)}^\infty(A) \to \text{Mod}_H^\infty(A)$.

Proposition 2.1.2. — *Soient X un ouvert $(B^-(F), H)$-biinvariant de $G(F)$ et Y un fermé $(B^-(F), H)$-biinvariant de X. On a une suite exacte courte de représentations lisses de H sur A*

$$0 \to \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X-Y} U \to \text{c-ind}_{B^-(F)}^X U \to \text{c-ind}_{B^-(F)}^Y U \to 0$$

où le premier morphisme non trivial est le prolongement par 0 sur Y et le second est la restriction à Y. Elle est scindée lorsque Y est ouvert dans X.

Démonstration. — Il s'agit de [**3**, Proposition 1.8] que nous redémontrons ici. L'injectivité du premier morphisme non trivial est évidente et l'exactitude de la suite au milieu résulte du fait que les fonctions considérées sont localement constantes. Si Y est ouvert dans X, alors le prolongement par 0 sur X induit une section H-équivariante du second morphisme non trivial. Dans le cas général, on vérifie la surjectivité de ce dernier.

Soit donc $f \in \text{c-ind}_{B^-(F)}^Y U$. On note respectivement $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les sous-ensembles $B^-(F)\backslash X$ et $B^-(F)\backslash Y$ de $B^-(F)\backslash G(F)$. Comme X et Y sont $B^-(F)$-invariants par translation à gauche, la projection $G(F) \twoheadrightarrow B^-(F)\backslash G(F)$ induit des projections $X \twoheadrightarrow \overline{X}$ et $Y \twoheadrightarrow \overline{Y}$ et la section continue $\varsigma : B^-(F)\backslash G(F) \hookrightarrow G(F)$ induit des sections continues $\overline{X} \hookrightarrow X$ et $\overline{Y} \hookrightarrow Y$.

On montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des sous-ensembles ouverts compacts deux à deux disjoints $\overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_n$ de $\overline{Y}$ tels que :

– $B^-(F)\backslash \operatorname{supp}(f) = \coprod_{k=1}^n \overline{Y}_k$;
– $\forall k \in [\![1, n]\!]$, f est constante sur $\varsigma(\overline{Y}_k)$.

Par définition, $\operatorname{supp}(f)$ est un ouvert fermé $B^-(F)$-invariant par translation à gauche de Y et $B^-(F)\backslash \operatorname{supp}(f)$ est compact. On choisit un recouvrement de $B^-(F)\backslash \operatorname{supp}(f)$ par des ouverts sur lesquels $f \circ \varsigma$ est constante. D'après le lemme 2.1.1, ce recouvrement admet un raffinement fini constitué d'ouverts compacts deux à deux disjoints $\overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_n$ avec $n \in \mathbb{N}$, qui vérifient bien les propriétés ci-dessus.

On montre qu'il existe des sous-ensembles ouverts compacts deux à deux disjoints $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n$ de $\overline{X}$ tels que
$$\overline{X}_k \cap \overline{Y} = \overline{Y}_k$$
pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Comme $\overline{Y}_k$ est ouvert dans $\overline{Y}$, il existe un ouvert $\overline{X}_k \subset \overline{X}$ tel que $\overline{X} \cap \overline{Y} = \overline{Y}_k$. Par compacité de $\overline{Y}_k$, on peut supposer $\overline{X}_k$ compact (quitte à recouvrir $\overline{X}_k$ par des ouverts compacts de $\overline{X}$ et à extraire un recouvrement fini de $\overline{Y}_k$) et puisque les sous-ensembles $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n$ de $\overline{Y}$ sont deux à deux disjoints, on peut supposer les sous-ensembles $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n$ de $\overline{X}$ ainsi construits deux à deux disjoints (quitte à remplacer $\overline{X}_k$ par $\overline{X}_k - \bigcup_{k' \neq k} (\overline{X}_k \cap \overline{X}_{k'})$).

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $u_k \in U - \{0\}$ l'unique valeur de f sur $\varsigma(\overline{Y}_k)$, B_k^- le stabilisateur de u_k dans $B^-(F)$ et on pose
$$X_k \overset{\text{déf}}{=} B_k^- \varsigma(\overline{X}_k) \subset X$$
$$Y_k \overset{\text{déf}}{=} B_k^- \varsigma(\overline{Y}_k) \subset Y.$$
Ce sont des sous-ensembles ouverts de X et Y respectivement. En effet, ς induit une trivialisation globale du fibré principal $X \twoheadrightarrow \overline{X}$ (resp. $Y \twoheadrightarrow \overline{Y}$), B_k^- est un ouvert de la fibre $B^-(F)$ par lissité et $\overline{X}_k$ (resp. $\overline{Y}_k$) est un ouvert de la base $\overline{X}$ (resp. $\overline{Y}$). De plus par construction, on a :

- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $X_k \cap Y = Y_k$;
- $\forall k, k' \in [\![1, n]\!], \forall b \in B^-(F), X_k \cap bX_{k'} \neq \emptyset \Rightarrow (k = k'$ et $b \in B_k^-)$.

On prolonge f sur $B^-(F)X_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ en posant $f(bx) = b \cdot u_k$ pour tous $b \in B^-(F)$ et $x \in X_k$ (ce prolongement est bien défini grâce aux propriétés ci-dessus), puis sur X par 0. On obtient ainsi une fonction $\widetilde{f} : X \to U$ dont la restriction à Y est f. Par construction, $\widetilde{f}$ est localement constante en restriction à $\widetilde{f}^{-1}(U - \{0\}) = \coprod_{k=1}^{n} B^-(F)X_k$ qui est d'une part ouvert dans X (car les X_k sont ouverts dans X) et d'autre part $B^-(F)$-invariant par translation à gauche et compact modulo $B^-(F)$ (car les X_k sont compacts modulo $B^-(F)$) donc fermé dans X. On en déduit que $\widetilde{f}$ est localement constante sur X. Enfin $\widetilde{f}$ vérifie la formule de l'induite, donc $\widetilde{f} \in \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X} U$. □

Proposition 2.1.3. — *On reprend les notations de la proposition 2.1.2. Soient $H_0 \subset H$ un sous-groupe compact et $V \subset \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X-Y} U$ un sous-A-module de type fini. Il existe un morphisme H_0-équivariant $\varrho : \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X} U \to \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X-Y} U$ qui induit l'identité sur V.*

Démonstration. — L'espace $B^-(F)\backslash G(F)$ est profini et le groupe H_0 est compact, donc l'espace quotient $B^-(F)\backslash G(F)/H_0$ est encore profini. En effet, il est encore compact d'après [**6**, Chapitre III, § 4, Proposition 2, Corollaire 1] et il est encore localement profini par passage au quotient (car il est séparé par ce qui précède). On en déduit que l'application quotient $B^-(F)\backslash G(F) \twoheadrightarrow B^-(F)\backslash G(F)/H_0$ est fermée (car sa source est quasi-compacte et son but est séparé).

Pour tout $f \in V$, le sous-ensemble $\operatorname{supp}(f) \subset X - Y$ est $B^-(F)$-invariant par translation à gauche et fermé dans $G(F)$ (car compact modulo $B^-(F)$). On pose
$$Z \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{f \in V} \operatorname{supp}(f) \subset X - Y.$$

Comme V est de type fini sur A qui est fini, cette réunion est finie donc Z est fermé dans $G(F)$. On pose

$$Z' \overset{\text{déf}}{=} G(F) - (X - Y).$$

Ainsi Z et Z' sont fermés dans $G(F)$, disjoints et $B^-(F)$-invariants par translation à gauche, donc leurs images par l'application quotient $G(F) \twoheadrightarrow B^-(F)\backslash G(F)$ sont encore fermées et disjointes. L'application quotient $B^-(F)\backslash G(F) \twoheadrightarrow B^-(F)\backslash G(F)/H_0$ étant fermée, les images $\overline{Z}$ et $\overline{Z'}$ de Z et Z' respectivement dans $B^-(F)\backslash G(F)/H_0$ sont encore fermées et Z' étant H_0-invariant par translation à droite (car $H_0 \subset H$), $\overline{Z}$ et $\overline{Z'}$ sont encore disjointes.

L'espace quotient $B^-(F)\backslash G(F)/H_0$ étant compact, il est normal (axiome de séparation T4), donc il existe deux ouverts disjoints contenant respectivement $\overline{Z}$ et $\overline{Z'}$. Avec le complémentaire de $\overline{Z} \cup \overline{Z'}$, ils forment un recouvrement ouvert de $B^-(F)\backslash G(F)/H_0$. Ce recouvrement admet un raffinement fini constitué d'ouverts deux à deux disjoints d'après le lemme 2.1.1. Soit $\overline{O}$ la réunion de ceux qui intersectent $\overline{Z}$. C'est un sous-ensemble ouvert et fermé de $B^-(F)\backslash G(F)/H_0$ qui vérifie $\overline{Z} \subset \overline{O} \subset B^-(F)\backslash(X - Y)/H_0$. Son image réciproque par l'application quotient $G(F) \twoheadrightarrow B^-(F)\backslash G(F)/H_0$ est donc un sous-ensemble ouvert, fermé et $(B^-(F), H_0)$-biinvariant O de $G(F)$ qui vérifie $Z \subset O \subset X - Y$.

On note 1_O la fonction caractéristique de O sur X. Pour tout $f \in \text{c-ind}_{B^-(F)}^X U$, $1_O f$ est localement constante (car O est ouvert et fermé dans X), à support dans $X - Y$ (car $O \subset X - Y$) compact modulo $B^-(F)$ (car O est fermé modulo $B^-(F)$) et vérifie $(1_O f)(bx) = b \cdot (1_O f)(x)$ pour tous $b \in B^-(F)$ et $x \in X$ (car O est $B^-(F)$-invariant par translation à gauche), donc $1_O f \in \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X-Y} U$. On définit ainsi une application A-linéaire $\varrho : \text{c-ind}_{B^-(F)}^X U \to \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X-Y} U$ qui est H_0-équivariante (car O est H_0-invariante par translation à droite) et qui induit l'identité sur V (car $Z \subset O$). □

Lien avec l'induction parabolique

Pour tout sous-ensemble $X \subset G(F)$ ouvert et $(B^-(F), H)$-biinvariant, on définit une sous-H-représentation de $\text{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U$ en posant

$$\left(\text{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right)(X) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ f \in \text{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U \mid \text{supp}(f) \subset X \right\}.$$

Lemme 2.1.4. — *Soit X un ouvert $(B^-(F), H)$-biinvariant de $G(F)$. La restriction à X induit un isomorphisme H-équivariant*

$$\left(\text{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right)(X) \xrightarrow{\sim} \text{c-ind}_{B^-(F)}^X U.$$

Démonstration. — L'application est bien définie car les supports des éléments de $(\text{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U)(X)$ sont fermés dans $G(F)$ et $B^-(F)$-invariants par translation à gauche, donc leurs images dans le quotient $B^-(F)\backslash G(F)$ sont fermées donc compactes. Le prolongement par 0 sur $G(F) - X$ est une application inverse bien définie car les supports des éléments de $\text{c-ind}_{B^-(F)}^X U$ sont d'une part ouverts dans X donc dans $G(F)$, d'autre part $B^-(F)$-invariants par translation à gauche et compacts modulo $B^-(F)$ donc fermés dans $G(F)$. □

2.2. Filtrations d'une représentation induite

Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique standard et $L \subset P$ le sous-groupe de Levi standard. En utilisant la décomposition de Bruhat, on définit des filtrations topologiques, puis de représentations induites et on calcule leurs gradués.

Définition des filtrations

On définit les représentants de Kostant des classes à droite W/W_L en posant

$$\widetilde{W}_P \overset{\text{déf}}{=} \{w \in W \mid w \text{ de longueur minimale dans } wW_L\}.$$

Pour tout $w \in W$, il existe une décomposition unique $w = \widetilde{w}_P w_L$ avec $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P, w_L \in W_L$ et on a $\ell(w) = \ell(\widetilde{w}_P) + \ell(w_L)$ (voir [**5**, Proposition 3.9]).

En utilisant l'identité $B^- = \dot{w}_0 B \dot{w}_0$, la décomposition de Bruhat relative à B (voir [**4**, Théorème 5.15]) donne

$$G(F) = \coprod_{w \in W} (B^- \dot{w} B)(F)$$

et pour tout $w \in W$, l'adhérence de $(B^- \dot{w} B)(F)$ dans $G(F)$ est

$$\coprod_{w' \geq w} (B^- \dot{w}' B)(F)$$

avec $\leq$ l'ordre de Bruhat[4] sur W (voir [**5**, Théorème 3.13] et [**5**, Corollaire 3.15]). En utilisant la décomposition $P = B\dot{W}_L B$ et [**5**, Lemme 3.4], on obtient pour tout $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$ la décomposition

$$(B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F) = \coprod_{w_L \in W_L} (B^- \dot{\widetilde{w}}_P \dot{w}_L B)(F),$$

d'où la décomposition

$$G(F) = \coprod_{\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P} (B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F).$$

Soient $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$ et $w_L \in W_L$. On déduit de [**1**, Lemme 4.18] que si $\widetilde{w}'_P w'_L \geq \widetilde{w}_P w_L$ avec $\widetilde{w}'_P \in \widetilde{W}_P$ et $w'_L \in W_L$, alors $\widetilde{w}'_P \geq \widetilde{w}_P$. Si de plus $\widetilde{w}'_P = \widetilde{w}_P$, alors $w'_L \geq w_L$. Ainsi, l'adhérence de $(B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)$ dans $G(F)$ est

$$\coprod_{\widetilde{w}'_P \geq \widetilde{w}_P} (B^- \dot{\widetilde{w}}'_P P)(F)$$

et l'adhérence de $(B^- \dot{\widetilde{w}}_P \dot{w}_L B)(F)$ dans $(B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)$ est

$$\coprod_{w'_L \geq w_L} (B^- \dot{\widetilde{w}}_P \dot{w}'_L B)(F).$$

En utilisant ces décompositions, on définit des filtrations topologiques et on explicite leurs « gradués », c'est-à-dire les différences successives. On définit une filtration de $G(F)$

[4] L'ordre de Bruhat sur W est défini par $w \leq w'$ si et seulement si il existe une décomposition réduite $s_1 \dots s_{\ell(w')}$ de w' et des entiers $1 \leq k_1 < \dots < k_{\ell(w)} \leq \ell(w')$ tels que $w = s_{k_1} \dots s_{k_{\ell(w)}}$.

par des ouverts $(B^-(F), P(F))$-biinvariants en posant

$$\mathrm{Fil}^i_P G(F) \overset{\text{déf}}{=} \coprod_{\ell(\widetilde{w}_P) \leq i} (B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)$$

pour tout $i \in [\![-1, \dim N_P]\!]$ et si $i \geq 0$, alors on a une partition du gradué par des ouverts $(B^-(F), P(F))$-biinvariants

$$\mathrm{Gr}^i_P G(F) = \coprod_{\ell(\widetilde{w}_P) = i} (B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F).$$

Pour tout $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$, on définit une filtration de $(B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)$ par des ouverts $(B^-(F), B(F))$-biinvariants en posant

$$\mathrm{Fil}^j_B (B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F) \overset{\text{déf}}{=} \coprod_{\ell(w_L) \leq j} (B^- \dot{\widetilde{w}}_P \dot{w}_L B)(F)$$

pour tout $j \in [\![-1, \dim N_L]\!]$ et si $j \geq 0$, alors on a une partition du gradué par des ouverts $(B^-(F), B(F))$-biinvariants

$$\mathrm{Gr}^j_B (B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F) = \coprod_{\ell(w_L) = j} (B^- \dot{\widetilde{w}}_P \dot{w}_L B)(F).$$

Soit U une représentation lisse de $T(F)$ sur A. Les filtrations topologiques précédentes induisent naturellement des filtrations de représentations induites. On définit une filtration de $\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U$ par des sous-$P(F)$-représentations en posant

$$\mathrm{Fil}^i_P \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U \overset{\text{déf}}{=} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) \left(\mathrm{Fil}^i_P G(F)\right)$$

pour tout $i \in [\![-1, \dim N_P]\!]$ et si $i \geq 0$, alors en utilisant le lemme 2.1.4 et la proposition 2.1.2 avec $H = P(F)$, $X = \mathrm{Fil}^i_P G(F)$ et $Y = \mathrm{Gr}^i_P G(F)$, on voit que l'on a des isomorphismes $P(F)$-équivariants

$$\mathrm{Gr}^i_P \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U \cong \text{c-ind}_{B^-(F)}^{\mathrm{Gr}^i_P G(F)} U \cong \bigoplus_{\ell(\widetilde{w}_P) = i} \text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)} U. \tag{2.2.1}$$

Pour tout $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$, on définit une filtration de $\text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)} U$ par des sous-$B(F)$-représentations en posant

$$\mathrm{Fil}^j_B \,\text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)} U \overset{\text{déf}}{=} \text{c-ind}_{B^-(F)}^{\mathrm{Fil}^j_B (B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)} U$$

pour tout $j \in [\![-1, \dim N_L]\!]$ et si $j \geq 0$, alors en utilisant la proposition 2.1.2 avec $H = B(F)$, $X = \mathrm{Fil}^j_B (B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)$ et $Y = \mathrm{Gr}^j_B (B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)$, on voit que l'on a des isomorphismes $B(F)$-équivariants

$$\mathrm{Gr}^j_B \,\text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)} U \cong \text{c-ind}_{B^-(F)}^{\mathrm{Gr}^j_B (B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)} U \cong \bigoplus_{\ell(w_L) = j} \text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^- \dot{\widetilde{w}}_P \dot{w}_L B)(F)} U. \tag{2.2.2}$$

Calculs des gradués

Soit $w \in W$. On définit un sous-groupe fermé de N stable sous l'action par conjugaison de T en posant

$$N_w \stackrel{\text{déf}}{=} N \cap (\dot{w}^{-1} N \dot{w}).$$

C'est le sous-groupe engendré par les sous-groupes radiciels correspondant aux racines dans $\Phi^+ \cap w^{-1}(\Phi^+)$. D'après [**5**, § 3.2], le produit induit un homéomorphisme

$$B^-(F) \times \{\dot{w}\} \times N_w(F) \xrightarrow{\sim} (B^- \dot{w} B)(F).$$

On en déduit un isomorphisme A-linéaire

$$\text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^-\dot{w}B)(F)} U \cong \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(N_w(F), U) \tag{2.2.3}$$

à travers lequel $N_w(F)$ agit par translation à droite et l'action de $t \in T(F)$ sur $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(N_w(F), U)$ est donnée par

$$(tf)(n) = (\dot{w} t \dot{w}^{-1}) \cdot f(t^{-1} n t)$$

pour tout $n \in N_w(F)$.

On écrit $w = \widetilde{w}_P w_L$ avec $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$ et $w_L \in W_L$. On définit des sous-groupes fermés de N_P et N_L stables sous l'action par conjugaison de T en posant

$$N_{P,w} \stackrel{\text{déf}}{=} N_P \cap N_w$$

$$N_{L,w_L} \stackrel{\text{déf}}{=} N_L \cap (\dot{w}_L^{-1} N_L \dot{w}_L) = N_L \cap N_w, \tag{2.2.4}$$

la dernière égalité résultant de l'égalité $\Phi_L^+ \cap w_L^{-1}(\Phi_L^+) = \Phi_L^+ \cap w^{-1}(\Phi^+)$ qui caractérise la décomposition $w = \widetilde{w}_P w_L$ (voir [**5**, Proposition 3.9 (iii)]). Comme N_P est distingué dans P, on a un produit semi-direct

$$N_w = N_{L,w_L} \ltimes N_{P,w} \tag{2.2.5}$$

d'où un isomorphisme A-linéaire

$$\mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(N_w(F), U) \cong \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(N_{P,w}(F), \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(N_{L,w_L}(F), U))$$

défini par $f \mapsto (n_P \mapsto (n_L \mapsto f(n_L n_P)))$.

En procédant comme précédemment pour le triplet (L, B_L, T), on voit que le produit induit un homéomorphisme

$$B_L^-(F) \times \{\dot{w}_L\} \times N_{L,w_L}(F) \xrightarrow{\sim} (B_L^- \dot{w}_L B_L)(F)$$

et on en déduit un isomorphisme A-linéaire

$$\text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^-\dot{w}_L B_L)(F)} U \cong \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(N_{L,w_L}(F), U) \tag{2.2.6}$$

à travers lequel $N_{L,w_L}(F)$ agit par translation à droite et l'action de $t \in T(F)$ sur $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(N_{L,w_L}(F), U)$ est donnée par

$$(tf)(n) = (\dot{w}_L t \dot{w}_L^{-1}) \cdot f(t^{-1} n t)$$

pour tout $n \in N_{L,w_L}(F)$.

En notant $U^{\widetilde{w}_P}$ la représentation lisse de $T(F)$ sur A dont le A-module sous-jacent est U et sur lequel $t \in T(F)$ agit à travers $\dot{\widetilde{w}}_P t \dot{\widetilde{w}}_P^{-1}$, on déduit de ce qui précède un isomorphisme A-linéaire

$$\text{(2.2.7)} \qquad \operatorname{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^-\dot{w}B)(F)} U \cong \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty \left(N_{P,w}(F), \operatorname{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^-\dot{w}_L B_L)(F)} U^{\widetilde{w}_P}\right)$$

à travers lequel $N_{P,w}(F)$ agit par translation à droite et l'action de $b \in (TN_{L,w_L})(F)$ sur $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty(N_{P,w}(F), \operatorname{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^-\dot{w}_L B_L)(F)} U^{\widetilde{w}_P})$ est donnée par

$$(bf)(n) = b \cdot f(b^{-1}nb)$$

pour tout $n \in N_{P,w}(F)$.

2.3. Variante pour les représentations ordinaires

On adapte les définitions et résultats de la section 2.2 aux induites paraboliques d'un caractère, puis aux représentations ordinaires. Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique standard et $L \subset P$ le sous-groupe de Levi standard.

Filtration et gradué d'une induite parabolique

Pour tout $w \in W$, si $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$ est l'élément de longueur minimale dans $w^{-1}W_L$, alors $\widehat{w}_P = w_{L,0}\widetilde{w}_P^{-1}$ est l'élément de longueur maximale dans $W_L w$. On pose

$$\widehat{W}_P \overset{\text{déf}}{=} \{w \in W \mid w \text{ de longueur maximale dans } W_L w\}.$$

On déduit des propriétés de $\widetilde{W}_P$ que pour tout $w \in W$, il existe une décomposition unique $w = w_L \widehat{w}_P$ avec $w_L \in W_L, \widehat{w}_P \in \widehat{W}_P$ et on a $\ell(w) = \ell(\widehat{w}_P) - \ell(w_L)$.

Lemme 2.3.1. — *On a la décomposition*

$$G(F) = \coprod_{\widehat{w}_P \in \widehat{W}_P} (P^- \dot{\widehat{w}}_P B)(F)$$

et pour tout $\widehat{w}_P \in \widehat{W}_P$, l'adhérence de $(P^-\dot{\widehat{w}}_P B)(F)$ dans $G(F)$ est

$$\coprod_{\widehat{w}'_P \geq \widehat{w}_P} (P^- \dot{\widehat{w}}'_P B)(F).$$

Démonstration. — En utilisant l'identité $B = \dot{w}_0 B^- \dot{w}_0$ et en procédant comme dans la section 2.2, on obtient à partir de la décomposition de Bruhat relative à B^- une décomposition

$$G(F) = \coprod_{\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P} (B \dot{\widetilde{w}}_P P^-)(F)$$

et pour tout $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$, l'adhérence de $(B\dot{\widetilde{w}}_P P^-)(F)$ dans $G(F)$ est

$$\coprod_{\widetilde{w}'_P \geq \widetilde{w}_P} (B \dot{\widetilde{w}}'_P P^-)(F).$$

On en déduit le lemme en passant à l'inverse et en utilisant le fait que pour tout $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$, on a $(P^-\dot{\widetilde{w}}_P^{-1}B)(F) = (P^-\dot{\widehat{w}}_P B)(F)$ avec $\widehat{w}_P = w_{L,0}\widetilde{w}_P^{-1}$ (car $\dot{w}_{L,0} \in P^-(F)$) et que pour tout $\widetilde{w}'_P \in \widetilde{W}_P$, on a $\widetilde{w}'_P \geq \widetilde{w}_P$ si et seulement si $\widehat{w}'_P \geq \widehat{w}_P$ avec $\widehat{w}'_P = w_{L,0}\widetilde{w}'_P$. $\square$

Soit U une représentation lisse de $L(F)$ sur A. En utilisant le lemme 2.3.1, on définit une filtration de $G(F)$ par des ouverts $(P^-(F), B(F))$-biinvariants en posant

$$\mathrm{Fil}^r_{P^-} G(F) \overset{\text{déf}}{=} \coprod_{\ell(\widehat{w}_P)\leq r} (P^-\dot{\widehat{w}}_P B)(F)$$

pour tout $r \in [\![-1, \dim N]\!]$ et si $r \geq 0$, alors on a une partition du gradué par des ouverts $(P^-(F), B(F))$-biinvariants

$$\mathrm{Gr}^r_{P^-} G(F) = \coprod_{\ell(\widehat{w}_P)=r} (P^-\dot{\widehat{w}}_P B)(F).$$

On adapte les définitions et propriétés de la section 2.1 avec P^- au lieu de B^-. On définit la *filtration de Bruhat* de $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U$ par des sous-$B(F)$-représentations en posant

$$\mathrm{Fil}^r_{P^-} \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U \overset{\text{déf}}{=} \left(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U\right) (\mathrm{Fil}^r_{P^-} G(F))$$

pour tout $r \in [\![-1, \dim N]\!]$ et si $r \geq 0$, alors en utilisant le lemme 2.1.4 et la proposition 2.1.2 avec $H = B(F)$, $X = \mathrm{Fil}^r_{P^-} G(F)$, $Y = \mathrm{Gr}^r_{P^-} G(F)$ et P^- au lieu de B^-, on voit que l'on a un isomorphisme $B(F)$-équivariant

$$\mathrm{Gr}^r_{P^-} \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U \cong \bigoplus_{\ell(\widehat{w}_P)=r} \text{c-ind}_{P^-(F)}^{(P^-\dot{\widehat{w}}_P B)(F)} U. \tag{2.3.2}$$

Lemme 2.3.3. — *Soit $\widehat{w}_P \in \widehat{W}_P$. Si $N_L^-(F)$ agit trivialement sur U, alors la restriction à $(B^-\dot{\widehat{w}}_P B)(F)$ induit un isomorphisme $B(F)$-équivariant*

$$\varrho : \text{c-ind}_{P^-(F)}^{(P^-\dot{\widehat{w}}_P B)(F)} U \xrightarrow{\sim} \text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^-\dot{\widehat{w}}_P B)(F)} U.$$

Démonstration. — On vérifie tout d'abord que $\widehat{w}_P w_0$ est de longueur minimale dans $W_L\widehat{w}_P w_0$: pour tout $w_L \in W_L$, on a

$$\begin{aligned}\ell(w_L\widehat{w}_P w_0) &= \ell(w_0) - \ell(w_L\widehat{w}_P)\\ &= \ell(w_0) - \ell(\widehat{w}_P) + \ell(w_L)\\ &= \ell(w_L) + \ell(\widehat{w}_P w_0).\end{aligned}$$

En utilisant l'identité $B = \dot{w}_0 B^- \dot{w}_0$ et [**5**, Proposition 3.16 (ii)] avec B^- et P^- au lieu de B et P respectivement, on en déduit que la projection $B^-(F)\backslash G(F) \twoheadrightarrow P^-(F)\backslash G(F)$ induit un homéomorphisme

$$B^-(F)\backslash(B^-\dot{\widehat{w}}_P B)(F) \xrightarrow{\sim} P^-(F)\backslash(P^-\dot{\widehat{w}}_P B)(F). \tag{2.3.4}$$

Soit $f \in \text{c-ind}_{P^-(F)}^{(P^-\dot{\widehat{w}}_P B)(F)} U$. Alors $\varrho(f) : (B^-\dot{\widehat{w}}_P B)(F) \to U$ est localement constante (car f l'est) et l'homéomorphisme (2.3.4) montre qu'elle est à support compact modulo

$B^-(F)$ (car f est à support compact modulo $P^-(F)$). Il reste à montrer que $\varrho(f)$ vérifie la formule de l'induite. On a un diagramme commutatif de groupes algébriques

$$\begin{tikzcd} P^- \arrow[d, two heads] & B^- \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & T \arrow[d, equal] \\ L & B_L^- \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads] & T \end{tikzcd}$$

et le noyau du quotient $B_L^- \twoheadrightarrow T$ est N_L^-. Si $N_L^-(F)$ agit trivialement sur U, on en déduit que l'action de $B^-(F)$ sur U à travers la composée $B^-(F) \hookrightarrow P^-(F) \twoheadrightarrow L(F)$ coïncide avec celle obtenue par inflation à partir de l'action de $T(F)$ sur U, donc $\varrho(f)$ vérifie bien la formule de l'induite. Ainsi, l'application ϱ est bien définie. De plus, elle est visiblement $B(F)$-équivariante. Enfin, en utilisant encore l'homéomorphisme (2.3.4), on voit qu'elle est bijective. $\square$

Soient $\chi : L(F) \to A^\times$ un caractère lisse et $r \in [\![0, \dim N]\!]$. En utilisant le lemme 2.3.3 avec $U = \chi$ et l'isomorphisme (2.2.3) avec $U = \chi$ et $w = \widehat{w}_P$ pour tout $\widehat{w}_P \in \widehat{W}_P$ tel que $\ell(\widehat{w}_P) = r$, l'isomorphisme (2.3.2) avec $U = \chi$ devient

$$\mathrm{Gr}^r_{P^-} \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \chi \cong \bigoplus_{\ell(\widehat{w}_P)=r} \mathcal{C}_c^\infty(N_{\widehat{w}_P}(F), \chi). \tag{2.3.5}$$

Filtration et gradué d'une représentation ordinaire

Pour tout sous-groupe parabolique standard $Q \subset L$, on note $Q^- \subset L$ le sous-groupe parabolique standard opposé à Q par rapport à T. Pour tout $\alpha \in \Delta_L$, on note $Q_\alpha \subset L$ le sous-groupe parabolique standard correspondant.

Définition 2.3.6. — Pour tout sous-groupe parabolique standard $Q \subset L$, on définit la *représentation spéciale* relative à Q de $L(F)$ sur A

$$\mathrm{Sp}_Q \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \underline{1}}{\sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} \mathrm{Ind}_{Q'^-(F)}^{L(F)} \underline{1}}$$

avec Q' parmi les sous-groupes paraboliques de L et $\underline{1}$ la représentation triviale sur A. Lorsque $Q = B_L$, on l'appelle la *représentation de Steinberg* de $L(F)$ sur A et on la note St. Lorsque $Q = Q_\alpha$ avec $\alpha \in \Delta_L$, on la note Sp_α.

Remarque 2.3.7. — Les représentations spéciales sont des représentations lisses admissibles de $L(F)$ sur A deux à deux non isomorphes (car résiduellement deux à deux non isomorphes d'après [**24**, Corollaire 4.4 (a)]). Lorsque $A = k_E$, elles sont irréductibles (voir [**36**, Théorème 2] pour St, [**24**, Corollaire 4.3] lorsque le système de racines de L ne contient pas de facteur exceptionnel et [**26**, Théorème 7.2] dans le cas général déployé). Dans ce cas, elles forment les constituants irréductibles de $\mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} \underline{1}$, chacune apparaissant avec multiplicité un (voir [**24**, Corollaire 4.4 (b)] lorsque le système de racines de L ne contient pas de facteur exceptionnel et [**26**, Théorème 7.3] dans le cas général déployé).

Définition 2.3.8. — Une *représentation ordinaire*[5] de $G(F)$ sur A est une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi$ avec σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur A et $\chi : L(F) \to A^\times$ un caractère lisse.

Soit σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur A. On note $Q \subset L$ le sous-groupe parabolique standard correspondant à σ. Comme $BQ \subset P$ est un sous-groupe parabolique standard de G, on considère $\widehat{W}_{BQ}$. Pour tout sous-groupe parabolique standard $Q' \subset L$ tel que $Q \subset Q'$, on a $\widehat{W}_{BQ'} \subset \widehat{W}_{BQ}$. De plus, $1 \in \widehat{W}_{BQ}$ si et seulement si $Q = B_L$; $s_\alpha \in \widehat{W}_{BQ}$ avec $\alpha \in \Delta - \Delta_L$ si et seulement si $Q = B_L$; $s_\alpha \in \widehat{W}_{BQ}$ avec $\alpha \in \Delta_L$ si et seulement si $Q = Q_\alpha$. On pose

$$\widehat{W}_\sigma \overset{\text{déf}}{=} \widehat{W}_{BQ} - \bigcup_{Q \subsetneq Q' \subset L} \widehat{W}_{BQ'}$$

avec Q' parmi les sous-groupes paraboliques de L.

Soit $\chi : L(F) \to A^\times$ un caractère lisse. On rappelle que la restriction à $T(F)$ identifie les caractères de $L(F)$ avec les caractères de $T(F)$ triviaux sur $\operatorname{im} \alpha^\vee$ pour tout $\alpha \in \Delta_L$ (voir [**1**, Proposition 3.3]).

Proposition 2.3.9. — *Il existe une filtration de* $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi$ *par des sous-*$B(F)$*-représentations* $\mathrm{Fil}_\sigma^r \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi$ *pour tout* $r \in [\![-1, \dim N]\!]$ *et si* $r \geq 0$*, alors on a un isomorphisme* $B(F)$*-équivariant*

$$\mathrm{Gr}_\sigma^r \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi \cong \bigoplus_{\ell(\widehat{w}_\sigma) = r} \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty(N_{\widehat{w}_\sigma}(F), \chi).$$

Démonstration. — Pour tout sous-groupe parabolique standard $Q' \subset L$, on a défini la filtration de Bruhat $\mathrm{Fil}_{(BQ')^-}^\bullet \mathrm{Ind}_{(BQ')^-(F)}^{G(F)} \chi$ (que l'on notera de façon concise $I_\bullet^{BQ'}$ dans la suite de la démonstration) et pour tout $r \in [\![0, \dim N]\!]$, l'isomorphisme (2.3.5) montre que l'on a une suite exacte courte de représentations lisses de $B(F)$ sur A

$$0 \to I_{r-1}^{BQ'} \to I_r^{BQ'} \to \bigoplus_{\ell(\widehat{w}_{BQ'}) = r} \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty(N_{\widehat{w}_{BQ'}}(F), \chi) \to 0. \tag{2.3.10}$$

De plus pour tous sous-groupes paraboliques standards $Q'_1 \subset Q'_2 \subset L$, l'injection $G(F)$-équivariante

$$\mathrm{Ind}_{(BQ'_2)^-(F)}^{G(F)} \chi \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{(BQ'_1)^-(F)}^{G(F)} \chi \tag{2.3.11}$$

[5] Cette terminologie, empruntée à [**30**], est justifiée par le fait suivant : lorsque $A = k_E$, les représentations ordinaires irréductibles sont exactement les sous-quotients irréductibles de séries principales.

est stricte par rapport aux filtrations $I_\bullet^{BQ'_1}$ et $I_\bullet^{BQ'_2}$: pour tout $r \in [\![0, \dim N]\!]$, on a un diagramme commutatif de représentations lisses de $B(F)$ sur A

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I_{r-1}^{BQ'_1} \arrow[r] & I_r^{BQ'_1} \arrow[r] & \bigoplus\limits_{\ell(\widehat{w}_{BQ'_1})=r} \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty(N_{\widehat{w}_{BQ'_1}}(F), \chi) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I_{r-1}^{BQ'_2} \arrow[r] \arrow[u, hook] & I_r^{BQ'_2} \arrow[r] \arrow[u, hook] & \bigoplus\limits_{\ell(\widehat{w}_{BQ'_2})=r} \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty(N_{\widehat{w}_{BQ'_2}}(F), \chi) \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.3.12}$$

où les deux premières injections verticales sont induites par l'injection (2.3.11) et la dernière est l'injection naturelle correspondant à l'inclusion $\widehat{W}_{BQ'_2} \subset \widehat{W}_{BQ'_1}$. Enfin, on a un isomorphisme $G(F)$-équivariant

$$\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi \cong \frac{\operatorname{Ind}_{(BQ)^-(F)}^{G(F)} \chi}{\sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} \operatorname{Ind}_{(BQ')^-(F)}^{G(F)} \chi} \tag{2.3.13}$$

avec Q' parmi les sous-groupes paraboliques de L, qui résulte de l'exactitude de la torsion par χ et du foncteur $\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}$, ainsi que de l'isomorphisme $L(F)$-équivariant $(\operatorname{Ind}_{Q'^-(F)}^{L(F)} \underline{1}) \otimes \chi \cong \operatorname{Ind}_{Q'^-(F)}^{L(F)} \chi$. Soit $I_\bullet^\sigma$ l'image de la filtration $I_\bullet^{BQ}$ de $\operatorname{Ind}_{(BQ)^-(F)}^{G(F)} \chi$ dans le quotient $\operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi$. Comme les inclusions entre les différents objets apparaissant dans l'isomorphisme (2.3.13) sont strictes par rapport aux filtrations de ces derniers, on a encore en passant aux gradués des inclusions et un isomorphisme $B(F)$-équivariant

$$I_r^\sigma / I_{r-1}^\sigma \cong \frac{I_r^{BQ} / I_{r-1}^{BQ}}{\sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} I_r^{BQ'} / I_{r-1}^{BQ'}}$$

pour tout $r \in [\![0, \dim N]\!]$, d'où une suite exacte courte de représentations lisses de $B(F)$ sur A

$$0 \to I_{r-1}^\sigma \to I_r^\sigma \to \bigoplus_{\ell(\widehat{w}_\sigma)=r} \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty(N_{\widehat{w}_\sigma}(F), \chi) \to 0. \tag{2.3.14}$$

On en conclut que la filtration $I_\bullet^\sigma$ convient. □

Remarque 2.3.15. — La *filtration de Bruhat* $\operatorname{Fil}_{P^-}^\bullet \operatorname{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi$ est déjà définie et étudiée dans [**36**] pour les représentations spéciales de G (c'est-à-dire lorsque $P = L = G$).

CHAPITRE 3

COHOMOLOGIE ET ACTION DE HECKE

Nous définissons l'action de Hecke de certains monoïdes $\widetilde{L}^+$ sur les A-modules de cohomologie de certains groupes $\widetilde{N}_0$ munis d'une action de $\widetilde{L}^+$. Puis, nous étudions ces A-modules et cette action à travers certains dévissages de $\widetilde{N}_0$ respectant l'action de $\widetilde{L}^+$. Enfin, nous utilisons des dévissages successifs pour calculer les A-modules de cohomologie d'un sous-groupe ouvert compact $N_{P,0} \subset N_P(F)$ à valeurs dans les gradués des filtrations de Bruhat et l'action de Hecke de sous-monoïdes de $B_L(F)$.

3.1. Définitions et premières propriétés

On généralise la définition de l'action de Hecke et les calculs en degré maximal de [**19, 20**]. On démontre également un résultat clef qui permet, sous une condition de finitude, de calculer la cohomologie et l'action de Hecke en degré nul et en degré maximal.

Préliminaires

Soient H un groupe de Lie p-adique, $H^+ \subset H$ un sous-monoïde ouvert et $H_0 \subset H^+$ un sous-groupe ouvert de H (par exemple $H_0 = H^+ \cap (H^+)^{-1}$ le plus grand sous-groupe de H dans H^+). On dit qu'une représentation V de H^+ sur A est lisse si l'action de H_0 sur V est lisse (cela ne dépend pas du choix de H_0). On note $\mathrm{Mod}_{H^+}^{\infty}(A)$ la catégorie des représentations lisses de H^+ sur A et des applications A-linéaires H^+-équivariantes.

Lemme 3.1.1. — *La catégorie* $\mathrm{Mod}_{H^+}^{\infty}(A)$ *est abélienne. Elle possède suffisamment d'injectifs et ces derniers sont encore injectifs dans la catégorie* $\mathrm{Mod}_{H_0}^{\infty}(A)$.

Démonstration. — C'est une adaptation immédiate des preuves de [**19**, Lemme 2.2.6], [**20**, Proposition 2.1.1] et [**20**, Proposition 2.1.2]. $\square$

Soient $\widetilde{N}$ un groupe algébrique unipotent sur $\mathbb{Q}_p$ et $\widetilde{N}_0 \subset \widetilde{N}(\mathbb{Q}_p)$ un sous-groupe ouvert compact. On note $\mathrm{Lie}(\widetilde{N})$ l'algèbre de Lie de $\widetilde{N}$ sur $\mathbb{Q}_p$ (c'est le noyau de la surjection canonique $\widetilde{N}(\mathbb{Q}_p[\epsilon]) \twoheadrightarrow \widetilde{N}(\mathbb{Q}_p)$ avec $\epsilon^2 = 0$). C'est une $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Lie nilpotente et d'après [**17**, Chapitre IV, § 2, Proposition 4.1], l'exponentielle induit un homéomorphisme canonique

$$\exp : \mathrm{Lie}(\widetilde{N}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{N}(\mathbb{Q}_p).$$

On dit que $\widetilde{N}_0$ est *standard* si $\exp^{-1}(\widetilde{N}_0) \subset \mathrm{Lie}(\widetilde{N})$ est une sous-$\mathbb{Z}_p$-algèbre de Lie (voir [**20**, Définition 3.5.1]). D'après [**20**, Lemme 3.5.2], il existe une base de voisinages de $1 \in \widetilde{N}(\mathbb{Q}_p)$ constituée de sous-groupes ouverts compacts standards.

On fixe un groupe algébrique $\widetilde{L}$ sur $\mathbb{Q}_p$ et un sous-monoïde ouvert $\widetilde{L}^+ \subset \widetilde{L}(\mathbb{Q}_p)$. On note $\widetilde{L}_0 \subset \widetilde{L}^+$ le sous-groupe ouvert $\widetilde{L}^+ \cap (\widetilde{L}^+)^{-1}$ de $\widetilde{L}(\mathbb{Q}_p)$. On suppose que $\widetilde{N}$ est muni d'une action de $\widetilde{L}$ que l'on identifie à la conjugaison dans $\widetilde{L} \ltimes \widetilde{N}$ et que $\widetilde{N}_0$ est stable sous l'action par conjugaison de $\widetilde{L}^+$. En particulier, $\widetilde{L}_0$ normalise $\widetilde{N}_0$. On note $\widetilde{L}^+ \ltimes \widetilde{N}_0$ le sous-monoïde de $(\widetilde{L} \ltimes \widetilde{N})(\mathbb{Q}_p)$ engendré par $\widetilde{L}^+$ et $\widetilde{N}_0$. Il est ouvert car il contient le sous-groupe ouvert $\widetilde{L}_0 \ltimes \widetilde{N}_0$.

Action de Hecke

Soit V une représentation lisse de $\widetilde{L}^+ \ltimes \widetilde{N}_0$ sur A. On définit l'*action de Hecke* de $l \in \widetilde{L}^+$ sur les A-modules $\mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0, V)$ comme la composée

$$\mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0, V) \to \mathrm{H}^\bullet(l\widetilde{N}_0 l^{-1}, V) \to \mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0, V) \tag{3.1.2}$$

où le premier morphisme est induit par l'action de l sur V et le second est la corestriction de $l\widetilde{N}_0 l^{-1}$ à $\widetilde{N}_0$ (voir [**34**, Chapitre I, § 2.4] et [**35**, Chapitre VII, § 7]).

Lemme 3.1.3. — *Les A-modules $\mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0, V)$ munis de l'action de Hecke sont des représentations lisses de $\widetilde{L}^+$ sur A.*

Démonstration. — On montre d'abord le lemme en degré 0. L'action de Hecke de $\widetilde{L}^+$ sur $V^{\widetilde{N}_0}$ est une action de monoïde d'après [**19**, Lemme 3.1.4]. Comme le groupe $\widetilde{L}_0 \subset \widetilde{L}^+$ normalise $\widetilde{N}_0$, l'action de Hecke de $\widetilde{L}_0$ sur $V^{\widetilde{N}_0}$ coïncide avec l'action lisse de $\widetilde{L}_0$ sur $V^{\widetilde{N}_0} \subset V$. On en déduit que l'action de Hecke de $\widetilde{L}^+$ sur $V^{\widetilde{N}_0}$ est lisse. En degré supérieur, on calcule les A-modules $\mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0, V)$ à l'aide d'une résolution injective $V \hookrightarrow I^\bullet$ dans la catégorie $\mathrm{Mod}^\infty_{\widetilde{L}^+ \ltimes \widetilde{N}_0}(A)$ (voir le lemme 3.1.1 et [**20**, Proposition 2.1.11]) et on utilise le résultat en degré 0 avec $(I^\bullet)^{\widetilde{N}_0}$. □

Par naturalité des morphismes de (3.1.2), tout morphisme de représentations lisses de $\widetilde{L}^+ \ltimes \widetilde{N}_0$ sur A induit un morphisme $\widetilde{L}^+$-équivariant pour l'action de Hecke en cohomologie. Les foncteurs

$$\mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0, -) : \mathrm{Mod}^\infty_{\widetilde{L}^+ \ltimes \widetilde{N}_0}(A) \to \mathrm{Mod}^\infty_{\widetilde{L}^+}(A)$$

forment donc un δ-foncteur universel.

Calcul en degré maximal

On note $\dim_{\mathbb{Q}_p} \widetilde{N}_0$ la dimension de $\widetilde{N}_0$ en tant que variété analytique sur $\mathbb{Q}_p$. En particulier, $\dim_{\mathbb{Q}_p} \widetilde{N}_0 = \dim \widetilde{N}$. Le résultat suivant est originalement dû à [**27**, Chapitre V, Théorème 2.2.8].

Lemme 3.1.4. — *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n > \dim_{\mathbb{Q}_p} \widetilde{N}_0$, alors $\mathrm{H}^n(\widetilde{N}_0, V) = 0$.*

Démonstration. — Voir la preuve de [**20**, Lemme 3.5.4]. □

On suppose que $\widetilde{N}_0$ est standard et on note $\widetilde{\alpha}$ le caractère algébrique de la représentation adjointe de $\widetilde{L}$ sur $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Lie}(\widetilde{N})$.

Proposition 3.1.5. — *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = \dim_{\mathbb{Q}_p} \widetilde{N}_0$, alors on a un isomorphisme naturel $\widetilde{L}^+$-équivariant*

$$\mathrm{H}^n(\widetilde{N}_0, V) \cong V_{\widetilde{N}_0} \otimes \widetilde{\alpha}^{-1} |\widetilde{\alpha}|_p^{-1},$$

l'action de $l \in \widetilde{L}^+$ sur $V_{\widetilde{N}_0}$ étant la composée

$$V_{\widetilde{N}_0} \to V_{l\widetilde{N}_0 l^{-1}} \to V_{\widetilde{N}_0}$$

où le premier morphisme est induit par l'action de l sur V et le second est la projection naturelle.

Démonstration. — Si M est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang r, on note $M^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}_p)$ son dual et $\mathrm{dét}_{\mathbb{Z}_p} M = \Lambda^r_{\mathbb{Z}_p} M$ sa plus grande puissance extérieure non nulle. D'après [**20**, Proposition 3.5.6], on a un isomorphisme naturel A-linéaire

$$\mathrm{H}^n(\widetilde{N}_0, V) \xrightarrow{\sim} V_{\widetilde{N}_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{dét}_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Lie}(\widetilde{N}_0)^\vee. \tag{3.1.6}$$

Si $l \in \widetilde{L}^+$, alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^n(\widetilde{N}_0, V) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & V_{\widetilde{N}_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{dét}_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Lie}(\widetilde{N}_0)^\vee \arrow[d] \\
\mathrm{H}^n(l\widetilde{N}_0 l^{-1}, V) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & V_{l\widetilde{N}_0 l^{-1}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{dét}_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Lie}(l\widetilde{N}_0 l^{-1})^\vee \arrow[d] \\
\mathrm{H}^n(\widetilde{N}_0, V) \arrow[r, "\sim"] & V_{\widetilde{N}_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{dét}_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Lie}(\widetilde{N}_0)^\vee
\end{tikzcd} \tag{3.1.7}$$

où les morphismes horizontaux correspondent à l'isomorphisme (3.1.6), les morphismes verticaux de gauche sont ceux de la composée (3.1.2) et ceux de droite sont les suivants :

– le premier est le produit tensoriel du morphisme induit par l'action de l sur V avec la multiplication par $\widetilde{\alpha}(l)^{-1}$;

– le second est le produit tensoriel de la projection naturelle avec la multiplication par $|\widetilde{\alpha}(l)|_p^{-1}$.

La commutativité du carré supérieur du diagramme (3.1.7) est une conséquence de la naturalité de l'isomorphisme (3.1.6) tandis que celle du carré inférieur résulte de [**20**, Lemme 3.5.10]. Enfin, la composée des morphismes verticaux de droite coïncide avec l'action de l'énoncé sur $V_{\widetilde{N}_0}$ tordue par le caractère $\widetilde{\alpha}^{-1}|\widetilde{\alpha}|_p^{-1}$. □

Remarque 3.1.8. — Si $\widetilde{L} = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} {}^{\backprime}\widetilde{L}$ et $\widetilde{N} = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} {}^{\backprime}\widetilde{N}$ avec ${}^{\backprime}\widetilde{L}$ un groupe algébrique sur F et ${}^{\backprime}\widetilde{N}$ un groupe algébrique unipotent sur F muni d'une action de ${}^{\backprime}\widetilde{L}$, alors $\mathrm{Lie}({}^{\backprime}\widetilde{N})$ est une F-algèbre de Lie dont la $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Lie sous-jacente s'identifie naturellement à $\mathrm{Lie}(\widetilde{N})$. Ainsi, $\widetilde{\alpha} = \mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}_p} \circ {}^{\backprime}\widetilde{\alpha}$ avec ${}^{\backprime}\widetilde{\alpha}$ le caractère algébrique de la représentation adjointe de ${}^{\backprime}\widetilde{L}$ sur $\mathrm{dét}_F \mathrm{Lie}({}^{\backprime}\widetilde{N})$ et on en déduit que l'isomorphisme de la proposition 3.1.5 se réécrit

$$\mathrm{H}^n(\widetilde{N}_0, V) \cong V_{\widetilde{N}_0} \otimes (\omega^{-1} \circ {}^{\backprime}\widetilde{\alpha}).$$

avec $n = \dim_{\mathbb{Q}_p} \widetilde{N}_0 = [F : \mathbb{Q}_p] \cdot \dim {}^{\backprime}\widetilde{N}$.

Un résultat clef

Définition 3.1.9. — On dit qu'un élément $l \in \widetilde{L}^+$ *contracte strictement* $\widetilde{N}_0$ s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes.

(i) $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} l^k \widetilde{N}_0 l^{-k} = 1$

(ii) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} l^{-k} \widetilde{N}_0 l^k = \widetilde{N}(\mathbb{Q}_p)$

Lemme 3.1.10. — *Soient $l \in \widetilde{L}^+$ un élément contractant strictement $\widetilde{N}_0$ et V_0 une représentation lisse localement l-finie*[6] *de $\widetilde{L}(\mathbb{Q}_p)$ sur A. On suppose que l'on a une injection $\widetilde{L}^+$-équivariante $V_0 \hookrightarrow V$ et que l'action de l sur son conoyau est localement nilpotente.*

(i) *L'action de Hecke de l sur $V^{\widetilde{N}_0}$ est localement nilpotente.*

(ii) *On a une injection $\widetilde{L}^+$-équivariante $V_0 \hookrightarrow V_{\widetilde{N}_0}$ et l'action de l sur son conoyau est localement nilpotente.*

Démonstration. — On commence par montrer la propriété suivante : pour tout $v \in V$, il existe $\kappa = \kappa(v) \in \mathbb{N}$ tel que $l^k \cdot v \in V^{l^\kappa \widetilde{N}_0 l^{-\kappa}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $v \in V$. L'action de l sur V/V_0 étant localement nilpotente et V_0 étant localement l-finie, le sous-A-module $A[l] \cdot v \subset V$ est de type fini. Comme l'action de $\widetilde{N}_0$ sur V est lisse, on en déduit que le fixateur de $A[l] \cdot v$ dans $\widetilde{N}_0$ est ouvert, donc il contient $l^\kappa \widetilde{N}_0 l^{-\kappa}$ pour $\kappa \in \mathbb{N}$ suffisamment grand (car l contracte strictement $\widetilde{N}_0$).

Montrons le point (i). Soient $v \in V^{\widetilde{N}_0}$, $\kappa = \kappa(v)$ et $k \in \mathbb{N}$. En notant $\overset{\mathrm{H}}{\cdot}$ l'action de Hecke, on a

$$\begin{aligned} l^{\kappa+k} \overset{\mathrm{H}}{\cdot} v &= \sum_{n \in \widetilde{N}_0 / l^{\kappa+k} \widetilde{N}_0 l^{-(\kappa+k)}} n \cdot (l^{\kappa+k} \cdot v) \\ &= \left(l^\kappa \widetilde{N}_0 l^{-\kappa} : l^{\kappa+k} \widetilde{N}_0 l^{-(\kappa+k)} \right) \sum_{n \in \widetilde{N}_0 / l^\kappa \widetilde{N}_0 l^{-\kappa}} n \cdot (l^{\kappa+k} \cdot v) \\ &= \left(\widetilde{N}_0 : l^k \widetilde{N}_0 l^{-k} \right) \left(l^\kappa \overset{\mathrm{H}}{\cdot} (l^k \cdot v) \right). \end{aligned}$$

Or $\widetilde{N}_0$ est un groupe pro-p infini et l contracte strictement $\widetilde{N}_0$, donc l'indice $(\widetilde{N}_0 : l^k \widetilde{N}_0 l^{-k})$ est nul dans A pour k suffisamment grand.

Montrons le point (ii). L'action de $\widetilde{L}^+$ sur $V_{\widetilde{N}_0}$ étant induite par celle sur V, la composée $V_0 \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V_{\widetilde{N}_0}$ est $\widetilde{L}^+$-équivariante. De plus, l'action de l sur son conoyau est localement nilpotente (car c'est un quotient de V/V_0). Il suffit donc de montrer que cette composée est injective. Pour tous $v \in V$, $\kappa = \kappa(v)$ et $n \in \widetilde{N}_0$, on a

$$l^\kappa \cdot (n \cdot v - v) = (l^\kappa n l^{-\kappa}) \cdot (l^\kappa \cdot v) - (l^\kappa \cdot v) = 0,$$

donc l'action de l sur $\ker(V \twoheadrightarrow V_{\widetilde{N}_0})$ est localement nilpotente. Comme l'action de l est inversible sur V_0, on en conclut que $V_0 \cap \ker(V \twoheadrightarrow V_{\widetilde{N}_0}) = 0$. □

---

[6] C'est-à-dire que pour tout $v \in V_0$, le sous-A-module $A[l] \cdot v \subset V_0$ est de type fini.

3.2. Étude à travers un dévissage

On garde les notations précédentes : $\widetilde{L}$, $\widetilde{L}^+$, $\widetilde{L}_0$, $\widetilde{N}$, $\widetilde{N}_0$, V. Le but de cette section est de montrer comment la cohomologie de $\widetilde{N}_0$ à valeurs dans V et l'action de Hecke de $\widetilde{L}^+$ sur les A-modules $\mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0, V)$ se décomposent à travers un dévissage de $\widetilde{N}_0$.

Cohomologie

Soient $\widetilde{N}' \subset \widetilde{N}$ un sous-groupe fermé distingué et $\widetilde{N}''$ le groupe quotient $\widetilde{N}/\widetilde{N}'$. On note $\widetilde{N}_0'$ l'intersection de $\widetilde{N}'(\mathbb{Q}_p)$ avec $\widetilde{N}_0$ et $\widetilde{N}_0''$ l'image de $\widetilde{N}_0$ dans $\widetilde{N}''(\mathbb{Q}_p)$. Ce sont des sous-groupes ouverts compacts de $\widetilde{N}'(\mathbb{Q}_p)$ et $\widetilde{N}''(\mathbb{Q}_p)$ respectivement et si $\widetilde{N}_0$ est standard, alors $\widetilde{N}_0'$ et $\widetilde{N}_0''$ le sont aussi. On a une suite exacte courte de groupes topologiques

$$1 \to \widetilde{N}_0' \to \widetilde{N}_0 \to \widetilde{N}_0'' \to 1.$$

On veut exprimer la cohomologie de $\widetilde{N}_0$ à valeurs dans V à travers ce dévissage. En degré 0 on a l'égalité $V^{\widetilde{N}_0} = (V^{\widetilde{N}_0'})^{\widetilde{N}_0''}$ et en degré supérieur on a une suite spectrale de Hochschild-Serre (voir [**34**, Chapitre I, § 2.6]) de A-modules

$$\mathrm{H}^i(\widetilde{N}_0'', \mathrm{H}^j(\widetilde{N}_0', V)) \Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}(\widetilde{N}_0, V) \tag{3.2.1}$$

où pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'action de $n'' \in \widetilde{N}_0''$ sur $\mathrm{H}^j(\widetilde{N}_0', V)$ est induite au niveau des cochaînes par l'application $\phi \mapsto \widetilde{n}''\phi$ définie par

$$(\widetilde{n}''\phi)(n_1', \ldots, n_j') = \widetilde{n}'' \cdot \phi(\widetilde{n}''^{-1}n_1'\widetilde{n}'', \ldots, \widetilde{n}''^{-1}n_j'\widetilde{n}'')$$

pour tout $(n_1', \ldots, n_j') \in \widetilde{N}_0'^j$ avec $\widetilde{n}'' \in \widetilde{N}_0$ un relèvement de n''.

Si $\dim_{\mathbb{Q}_p} \widetilde{N}_0'' = 1$, alors la cohomologie de $\widetilde{N}_0''$ est nulle en degré strictement plus grand que 1 d'après le lemme 3.1.4. Dans ce cas, on déduit de la suite spectrale (3.2.1) des suites exactes courtes de A-modules

$$0 \to \mathrm{H}^1(\widetilde{N}_0'', \mathrm{H}^{n-1}(\widetilde{N}_0', V)) \to \mathrm{H}^n(\widetilde{N}_0, V) \to \mathrm{H}^n(\widetilde{N}_0', V)^{\widetilde{N}_0''} \to 0 \tag{3.2.2}$$

pour tout entier $n > 0$. Le second morphisme non trivial est la restriction et lorsque $n = 1$, le premier morphisme non trivial est l'inflation.

Action de Hecke

On suppose que $\widetilde{N}'$ est stable sous l'action par conjugaison de $\widetilde{L}$ et on identifie l'action de $\widetilde{L}$ induite sur $\widetilde{N}''$ à la conjugaison dans $\widetilde{L} \ltimes \widetilde{N}''$. Pour tout $l \in \widetilde{L}^+$, on a $l\widetilde{N}_0 l^{-1} \cap \widetilde{N}'(\mathbb{Q}_p) = l\widetilde{N}_0' l^{-1}$ (car $\widetilde{L}(\mathbb{Q}_p)$ normalise $\widetilde{N}'(\mathbb{Q}_p)$), d'où une suite exacte courte de groupes topologiques

$$1 \to l\widetilde{N}_0' l^{-1} \to l\widetilde{N}_0 l^{-1} \to l\widetilde{N}_0'' l^{-1} \to 1.$$

On veut exprimer l'action de Hecke de $\widetilde{L}^+$ sur $\mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0, V)$ à partir de celle (définie par (3.1.2) avec $\widetilde{N}_0'$ au lieu de $\widetilde{N}_0$) sur $\mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0', V)$.

Lemme 3.2.3. — *Les A-modules $\mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0', V)$ munis de l'action naturelle de $\widetilde{N}_0''$ et de l'action de Hecke de $\widetilde{L}^+$ sont des représentations lisses de $\widetilde{L}^+ \ltimes \widetilde{N}_0''$.*

Démonstration. — On montre d'abord le lemme en degré 0. Il suffit de vérifier que l'action naturelle de $\widetilde{N}_0''$ et l'action de Hecke (notée $\overset{\mathrm{H}}{\cdot}$) de $\widetilde{L}^+$ sur $V^{\widetilde{N}_0'}$ sont compatibles : pour tous $l \in \widetilde{L}^+, n'' \in \widetilde{N}_0''$ et $v \in V^{\widetilde{N}_0'}$, on a

$$\begin{aligned} l \overset{\mathrm{H}}{\cdot} (n'' \cdot v) &= \sum_{n' \in \widetilde{N}_0'/l\widetilde{N}_0' l^{-1}} n' l \widetilde{n}'' \cdot v \\ &= (l n'' l^{-1}) \cdot \sum_{n' \in \widetilde{N}_0'/l\widetilde{N}_0' l^{-1}} \big((l\widetilde{n}'' l^{-1})^{-1} n' (l\widetilde{n}'' l^{-1})\big) \cdot (l \cdot v) \\ &= (l n'' l^{-1}) \cdot (l \overset{\mathrm{H}}{\cdot} v) \end{aligned}$$

avec $\widetilde{n}'' \in \widetilde{N}_0$ un relèvement de n'', la dernière égalité résultant du fait que $l\widetilde{N}_0' l^{-1}$ est stable par conjugaison par $l\widetilde{n}'' l^{-1}$. En degré supérieur, on calcule les A-modules $\mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0', V)$ à l'aide d'une résolution injective $V \hookrightarrow I^\bullet$ dans la catégorie $\mathrm{Mod}^\infty_{\widetilde{L}^+ \ltimes \widetilde{N}_0}(A)$ (voir le lemme 3.1.1 et [**20**, Proposition 2.1.11]) et on utilise le résultat en degré 0 avec $(I^\bullet)^{\widetilde{N}_0'}$. □

Par naturalité de l'action de $\widetilde{N}_0''$ et de l'action de Hecke de $\widetilde{L}^+$, on obtient ainsi un δ-foncteur universel

$$\mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0', -) : \mathrm{Mod}^\infty_{\widetilde{L}^+ \ltimes \widetilde{N}_0}(A) \to \mathrm{Mod}^\infty_{\widetilde{L}^+ \ltimes \widetilde{N}_0''}(A).$$

On peut alors considérer l'action de Hecke de $l \in \widetilde{L}^+$ (définie par (3.1.2) avec $\widetilde{N}_0''$ et $\mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0', V)$ au lieu de $\widetilde{N}_0$ et V respectivement) sur les A-modules $\mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0'', \mathrm{H}^\bullet(\widetilde{N}_0', V))$: pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, c'est la composée

$$\begin{aligned} \text{(3.2.4)} \quad \mathrm{H}^i(\widetilde{N}_0'', \mathrm{H}^j(\widetilde{N}_0', V)) &\to \mathrm{H}^i(l\widetilde{N}_0'' l^{-1}, \mathrm{H}^j(l\widetilde{N}_0' l^{-1}, V)) \\ &\to \mathrm{H}^i(l\widetilde{N}_0'' l^{-1}, \mathrm{H}^j(\widetilde{N}_0', V)) \to \mathrm{H}^i(\widetilde{N}_0'', \mathrm{H}^j(\widetilde{N}_0', V)) \end{aligned}$$

où le premier morphisme est induit par l'action de l sur V, le second par la corestriction de $l\widetilde{N}_0' l^{-1}$ à $\widetilde{N}_0'$ et le dernier est la corestriction de $l\widetilde{N}_0'' l^{-1}$ à $\widetilde{N}_0''$. En degré 0, le lemme suivant montre que l'on retrouve l'action de Hecke original de $\widetilde{L}^+$.

Lemme 3.2.5. — *L'action de Hecke de $\widetilde{L}^+$ sur $V^{\widetilde{N}_0}$ définie par* (3.1.2) *coïncide avec celle sur $(V^{\widetilde{N}_0'})^{\widetilde{N}_0''}$ définie par* (3.2.4) *avec $i = j = 0$.*

Démonstration. — Soit $l \in \widetilde{L}^+$. Soient $(n_i')_{i \in [\![1,k']\!]}$ et $(n_j'')_{j \in [\![1,k'']\!]}$ des systèmes de représentants des classes à gauche $\widetilde{N}_0'/l\widetilde{N}_0' l^{-1}$ et $\widetilde{N}_0''/l\widetilde{N}_0'' l^{-1}$ respectivement. Pour tout $j \in [\![1, k'']\!]$, on fixe un relèvement $\widetilde{n}_j'' \in \widetilde{N}_0$ de n_j''. Montrons que l'on a une bijection

$$\widetilde{N}_0''/l\widetilde{N}_0'' l^{-1} \times \widetilde{N}_0'/l\widetilde{N}_0' l^{-1} \xrightarrow{\sim} \widetilde{N}_0/l\widetilde{N}_0 l^{-1}$$

définie par $(n_j'' l\widetilde{N}_0'' l^{-1}, n_i' l\widetilde{N}_0' l^{-1}) \mapsto \widetilde{n}_j'' n_i' l\widetilde{N}_0 l^{-1}$ pour tous $(i, j) \in [\![1, k']\!] \times [\![1, k'']\!]$.

Montrons l'injectivité. Soient $i_1, i_2 \in [\![1, k']\!]$ et $j_1, j_2 \in [\![1, k'']\!]$ tels que l'on ait $\widetilde{n}_{j_1}'' n_{i_1}' \in \widetilde{n}_{j_2}'' n_{i_2}' l\widetilde{N}_0 l^{-1}$. En prenant l'image dans $\widetilde{N}_0''/l\widetilde{N}_0'' l^{-1}$, il vient $n_{j_1}'' \in n_{j_2}'' l\widetilde{N}_0'' l^{-1}$, d'où $j_1 = j_2$. On en déduit que $n_{i_1}' \in n_{i_2}' l\widetilde{N}_0 l^{-1}$, puis $n_{i_1}' \in n_{i_2}' l\widetilde{N}_0' l^{-1}$ (car $\widetilde{N}_0' \cap l\widetilde{N}_0 l^{-1} = l\widetilde{N}_0' l^{-1}$), d'où $i_1 = i_2$.

Montrons la surjectivité. Soit $n \in \widetilde{N}_0$. Il existe $j \in [\![1, k'']\!]$ tel que l'image de n dans $\widetilde{N}''_0$ soit dans $\widetilde{n}''_j l \widetilde{N}''_0 l^{-1}$, d'où $\widetilde{n}''^{-1}_j n \in n' l \widetilde{N}_0 l^{-1}$ avec $n' \in \widetilde{N}'_0$. Il existe $i \in [\![1, k']\!]$ tel que $n' \in n'_i l \widetilde{N}'_0 l^{-1}$, d'où $n \in \widetilde{n}''_j n'_i l \widetilde{N}_0 l^{-1}$.

En utilisant ces systèmes de représentants, on voit que la corestriction de $l\widetilde{N}_0 l^{-1}$ à $\widetilde{N}_0$ est la composée de celle de $l\widetilde{N}'_0 l^{-1}$ à $\widetilde{N}'_0$ et de celle de $l\widetilde{N}''_0 l^{-1}$ à $\widetilde{N}''_0$: pour tout $v \in V^{\widetilde{N}_0}$, on a

$$\sum_{n \in \widetilde{N}_0 / l\widetilde{N}_0 l^{-1}} n \cdot (l \cdot v) = \sum_{n'' \in \widetilde{N}''_0 / l\widetilde{N}''_0 l^{-1}} n'' \cdot \sum_{n' \in \widetilde{N}'_0 / l\widetilde{N}'_0 l^{-1}} n' \cdot (l \cdot v).$$

L'action de Hecke de l sur $V^{\widetilde{N}_0}$ définie par (3.1.2) coïncide donc avec l'action de l sur $(V^{\widetilde{N}'_0})^{\widetilde{N}''_0}$ définie par (3.2.4) avec $i = j = 0$, c'est-à-dire avec la composée

$$\left(V^{\widetilde{N}'_0}\right)^{\widetilde{N}''_0} \to \left(V^{l\widetilde{N}'_0 l^{-1}}\right)^{l\widetilde{N}''_0 l^{-1}} \to \left(V^{\widetilde{N}'_0}\right)^{l\widetilde{N}''_0 l^{-1}} \to \left(V^{\widetilde{N}'_0}\right)^{\widetilde{N}''_0}$$

où le premier morphisme est induit par l'action de l sur V, le second par la corestriction de $l\widetilde{N}'_0 l^{-1}$ à $\widetilde{N}'_0$ et le dernier est la corestriction de $l\widetilde{N}''_0 l^{-1}$ à $\widetilde{N}''_0$. □

En degré supérieur, la proposition suivante montre que la suite spectrale (3.2.1) est compatible avec les actions de Hecke de $\widetilde{L}^+$ définies sur $\mathrm{H}^{i+j}(\widetilde{N}_0, V)$ par (3.1.2) et sur $\mathrm{H}^i(\widetilde{N}''_0, \mathrm{H}^j(\widetilde{N}'_0, V))$ par (3.2.4).

Proposition 3.2.6. — *La suite spectrale* (3.2.1) *est définie dans la catégorie* $\mathrm{Mod}^\infty_{\widetilde{L}^+}(A)$. *En particulier si* $\dim_{\mathbb{Q}_p} \widetilde{N}''_0 = 1$, *alors les morphismes des suites exactes* (3.2.2) *sont* $\widetilde{L}^+$-*équivariants pour tout entier* $n > 0$.

Démonstration. — On note $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{G}'$, $\mathcal{F}''$ et $\mathcal{G}''$) les foncteurs des $\widetilde{N}_0$-invariants (resp. $\widetilde{N}'_0$-invariants, $\widetilde{N}''_0$-invariants) et $\mathcal{O}$ les différents foncteurs d'oubli. On précise cela dans le diagramme de catégories et de foncteurs A-linéaires suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}^\infty_{\widetilde{L}^+ \ltimes \widetilde{N}_0}(A) \arrow[r, "\mathcal{O}"] \arrow[rrrr, bend left, "\mathcal{G}"] \arrow[ddrr, bend right, "\mathcal{G}'"'] & \mathrm{Mod}^\infty_{\widetilde{N}_0}(A) \arrow[rr, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, "\mathcal{F}'"] & & \mathrm{Mod}(A) & \mathrm{Mod}^\infty_{\widetilde{L}^+}(A) \arrow[l, "\mathcal{O}"] \\
& & \mathrm{Mod}^\infty_{\widetilde{N}''_0}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}''"] & & \\
& & \mathrm{Mod}^\infty_{\widetilde{L}^+ \ltimes \widetilde{N}''_0}(A) \arrow[u, "\mathcal{O}"] \arrow[uurr, bend right, "\mathcal{G}''"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme est commutatif : le lemme 3.2.5 montre que $\mathcal{G} = \mathcal{G}'' \circ \mathcal{G}'$ et les autres relations sont immédiates. Les foncteurs d'oubli sont exacts et préservent les injectifs (voir le lemme 3.1.1 et [**20**, Proposition 2.1.11]). Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a des isomorphismes de foncteurs

$$\mathrm{R}^n\mathcal{F} \circ \mathcal{O} \cong \mathrm{R}^n(\mathcal{F} \circ \mathcal{O}) \cong \mathrm{R}^n(\mathcal{O} \circ \mathcal{G}) \cong \mathcal{O} \circ \mathrm{R}^n\mathcal{G}$$

avec $\mathrm{R}^\bullet$ les foncteurs dérivés à droite. De même pour $\mathcal{F}', \mathcal{G}'$ et $\mathcal{F}'', \mathcal{G}''$. On en déduit pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, des isomorphismes de foncteurs

$$\mathrm{R}^i\mathcal{F}'' \circ \mathrm{R}^j\mathcal{F}' \circ \mathcal{O} \cong \mathcal{O} \circ \mathrm{R}^i\mathcal{G}'' \circ \mathrm{R}^j\mathcal{G}'.$$

Par ailleurs si I est un objet injectif de $\mathrm{Mod}^\infty_{\widetilde{L}^+ \ltimes \widetilde{N}_0}(A)$, alors pour tout entier $n > 0$ on a

$$\mathcal{O}(\mathrm{R}^n\mathcal{G}''(\mathcal{G}'(I))) = \mathrm{R}^n\mathcal{F}''(\mathcal{F}'(\mathcal{O}(I))) = 0$$

car $\mathcal{F}'$ préserve les injectifs (c'est l'adjoint à droite du foncteur exact d'inflation). Ainsi $\mathcal{G}'$ envoie les injectifs sur des $\mathcal{G}''$-acycliques. On en déduit l'existence d'une suite spectrale de Grothendieck (voir [**25**, Théorème 2.4.1]) de représentations lisses de $\widetilde{L}^+$ sur A

$$\mathrm{R}^i\mathcal{G}''(\mathrm{R}^j\mathcal{G}'(V)) \Rightarrow \mathrm{R}^{i+j}\mathcal{G}(V)$$

et les isomorphismes de foncteurs précédents montrent que l'image de cette suite spectrale par $\mathcal{O}$ est précisément la suite spectrale de Grothendieck de A-modules associée aux foncteurs $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$, c'est-à-dire la suite spectrale (3.2.1). □

3.3. Calculs sur le gradué

Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique standard et $L \subset P$ le sous-groupe de Levi standard. On fixe un sous-groupe ouvert compact standard $N_{P,0} \subset N_P(F)$. Pour tout sous-groupe fermé $\widetilde{L} \subset \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} L$ qui normalise $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} N_P$, on pose

$$\widetilde{L}^+ \overset{\text{déf}}{=} \left\{ l \in \widetilde{L}(\mathbb{Q}_p) \mid lN_{P,0}l^{-1} \subset N_{P,0} \right\}$$

$$\widetilde{L}_0 \overset{\text{déf}}{=} \left\{ l \in \widetilde{L}(\mathbb{Q}_p) \mid lN_{P,0}l^{-1} = N_{P,0} \right\} = \widetilde{L}^+ \cap \left(\widetilde{L}^+\right)^{-1}.$$

On reprend les notations de la section 2.2. Soient U une représentation lisse localement admissible de $T(F)$ sur A et $w \in W$. On écrit $w = \widetilde{w}_P w_L$ avec $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$ et $w_L \in W_L$. On calcule la cohomologie de $N_{P,0}$ à valeurs dans

$$V_w \overset{\text{déf}}{=} \text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^-\dot{w}B)(F)} U$$

ainsi que l'action de Hecke de $(TN_{L,w_L})^+$ sur les A-modules $\mathrm{H}^\bullet(N_{P,0}, V_w)$.

Dévissages successifs

On fixe une décomposition réduite $s_{\ell(\widetilde{w}_P)} \dots s_1$ de $\widetilde{w}_P$. Soit $k \in [\![0, \ell(\widetilde{w}_P)]\!]$. On a $s_k \dots s_1 \in \widetilde{W}_P$. Le sous-groupe $N_{P,s_k\dots s_1 w_L} = N_P \cap N_{s_k\dots s_1 w_L}$ est stable sous l'action par conjugaison de TN_{L,w_L} (voir le produit semi-direct (2.2.5) avec $s_k \dots s_1 w_L$ au lieu de w) et on note $N_{P,s_k\dots s_1 w_L,0}$ l'intersection de $N_{P,s_k\dots s_1 w_L}(F)$ avec $N_{P,0}$. Si $k < \ell(\widetilde{w}_P)$, alors $N_{P,s_{k+1}\dots s_1 w_L}$ est de codimension 1 dans $N_{P,s_k\dots s_1 w_L}$ (car $N_{s_{k+1}\dots s_1 w_L}$ est de codimension 1 dans $N_{s_k\dots s_1 w_L}$ et $N_L \cap N_{s_{k+1}\dots s_1 w_L} = N_L \cap N_{s_k\dots s_1 w_L} = N_{L,w_L}$, voir l'égalité (2.2.4) avec $s_{k+1} \dots s_1 w_L$ et $s_k \dots s_1 w_L$ au lieu de w) qui est nilpotent, donc il est distingué d'après [**17**, Chapitre IV, § 4, Corollaire 1.9]. Dans ce cas, on pose

$$N''_{P,s_k\dots s_1 w_L} \overset{\text{déf}}{=} N_{P,s_k\dots s_1 w_L} / N_{P,s_{k+1}\dots s_1 w_L}$$

et on note $N''_{P,s_k\dots s_1 w_L,0}$ l'image de $N_{P,s_k\dots s_1 w_L,0}$ dans $N''_{P,s_k\dots s_1 w_L}(F)$.

Calculs par récurrence

On utilise les résultats de la section 3.2 avec la suite de sous-groupes fermés stables sous l'action par conjugaison de TN_{L,w_L}

$$N_P = N_{P,w_L} \rhd N_{P,s_1w_L} \rhd N_{P,s_2s_1w_L} \rhd \cdots \rhd N_{P,s_{\ell(\widetilde{w}_P)}\dots s_1w_L} = N_{P,w}.$$

Pour tout $k \in [\![0, \ell(\widetilde{w}_P)-1]\!]$, la proposition 3.2.6 avec $\widetilde{L}^+ = (TN_{L,w_L})^+$, $\widetilde{N}_0 = N_{P,s_k\dots s_1w_L,0}$, $\widetilde{N}_0' = N_{P,s_{k+1}\dots s_1w_L,0}$, $\widetilde{N}_0'' = N''_{P,s_k\dots s_1w_L,0}$ et $V = V_w$ montre que l'on a une suite spectrale de représentations lisses de $(TN_{L,w_L})^+$ sur A

$$\mathrm{H}^i(N''_{P,s_k\dots s_1w_L,0}, \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\dots s_1w_L,0}, V_w)) \Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}(N_{P,s_k\dots s_1w_L,0}, V_w) \tag{3.3.1}$$

et si $i = [F : \mathbb{Q}_p]$ ($= \dim_{\mathbb{Q}_p} N''_{P,s_k\dots s_1w_L,0}$), alors en utilisant la proposition 3.1.5 avec $\widetilde{L}^+ = (TN_{L,w_L})^+$, $\widetilde{N}_0 = N''_{P,s_k\dots s_1w_L,0}$, $V = \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\dots s_1w_L,0}, V_w)$ et i au lieu de n, on obtient un isomorphisme $(TN_{L,w_L})^+$-équivariant

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^i(N''_{P,s_k\dots s_1w_L,0}, &\mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\dots s_1w_L,0}, V_w)) \\ &\cong \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\dots s_1w_L,0}, V_w)_{N''_{P,s_k\dots s_1w_L,0}} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha)\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

où α est le caractère algébrique (trivial sur N_{L,w_L}) de la représentation adjointe de TN_{L,w_L} sur $\mathrm{Lie}(N''_{P,s_k\dots s_1w_L})$ (voir la remarque 3.1.8).

Lemme 3.3.3. — *Soient $k \in [\![0, \ell(\widetilde{w}_P)]\!]$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $n > [F : \mathbb{Q}_p] \cdot (\ell(\widetilde{w}_P) - k)$, alors $\mathrm{H}^n(N_{P,s_k\dots s_1w_L,0}, V_w) = 0$.*

Démonstration. — On suppose $n > [F : \mathbb{Q}_p] \cdot (\ell(\widetilde{w}_P) - k)$ et on procède par récurrence décroissante sur k. On suppose $k = \ell(\widetilde{w}_P)$, donc $n > 0$. On déduit de l'isomorphisme (2.2.7) un isomorphisme $N_{P,w,0}$-équivariant

$$V_w \cong \bigoplus_{n \in N_{P,w}(F)/N_{P,w,0}} \mathcal{C}^\infty\left(nN_{P,w,0}, \text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^- \dot{w}_L B_L)(F)} U^{\widetilde{w}_P}\right)$$

où $N_{P,w,0}$ agit par translation à droite sur les termes de la somme directe. En utilisant le lemme 1.1.1, on en déduit que V_w est $N_{P,w,0}$-acyclique, donc $\mathrm{H}^n(N_{P,w,0}, V_w) = 0$.

On suppose $k < \ell(\widetilde{w}_P)$ et le lemme vrai pour $k+1$. Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i + j = n$. Si $i > [F : \mathbb{Q}_p]$, alors $\mathrm{H}^i(N''_{P,s_k\dots s_1w_L,0}, \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\dots s_1w_L,0}, V_w)) = 0$ d'après le lemme 3.1.4 avec $\widetilde{N}_0 = N''_{P,s_k\dots s_1w_L,0}$, $V = \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\dots s_1w_L,0}, V_w)$ et i au lieu de n. Sinon $j > [F : \mathbb{Q}_p] \cdot (\ell(\widetilde{w}_P) - (k+1))$, donc $\mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\dots s_1w_L,0}, V_w) = 0$ par hypothèse de récurrence. Dans les deux cas, on en conclut que

$$\mathrm{H}^i(N''_{P,s_k\dots s_1w_L,0}, \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\dots s_1w_L,0}, V_w)) = 0.$$

En utilisant la suite spectrale (3.3.1), on en déduit que $\mathrm{H}^n(N_{P,s_k\dots s_1w_L,0}, V_w) = 0$. Donc le lemme est vrai pour k. □

Pour tout $k \in [\![0, \ell(\widetilde{w}_P)]\!]$, on note α_k le caractère algébrique (trivial sur N_{L,w_L}) de la représentation adjointe de TN_{L,w_L} sur $\mathrm{dét}_F \mathrm{Lie}(N_{s_k\dots s_1} \cap N_{w_0\widetilde{w}_P})$. C'est la somme des racines qui apparaissent dans $\mathrm{Lie}(N_{s_k\dots s_1})$ mais pas dans $\mathrm{Lie}(N_{\widetilde{w}_P})$.

On rappelle que S est le plus grand sous-tore déployé de $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} T$ et on fixe un élément $\zeta \in S^+ \cap Z_L^+$ contractant strictement $N_{P,0}$ (par exemple $\zeta = \lambda(p)$ avec λ un cocaractère algébrique de T associé à P, c'est-à-dire tel que $\langle \alpha, \lambda \rangle \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$ avec égalité si et seulement si $\alpha \in \Phi_L^+$).

Comme U est localement admissible, $\mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)}(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_k))$ l'est aussi. En utilisant [**19**, Lemme 2.3.4] puis en passant au sous-quotient, on en déduit que

$$\text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^- \dot{w}_L B_L)(F)} \big(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_k)\big)$$

est localement $Z_L(F)$-finie, donc localement ζ-finie.

Lemme 3.3.4. — *Soient $k \in [\![0, \ell(\widetilde{w}_P)]\!]$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $n = [F : \mathbb{Q}_p] \cdot (\ell(\widetilde{w}_P) - k)$, alors on a une injection $(TN_{L,w_L})^+$-équivariante*

$$\text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^- \dot{w}_L B_L)(F)} \big(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_k)\big) \hookrightarrow \mathrm{H}^n(N_{P,s_k \dots s_1 w_L,0}, V_w)$$

et l'action de Hecke de ζ sur son conoyau est localement nilpotente.

Démonstration. — On suppose $n = [F : \mathbb{Q}_p] \cdot (\ell(\widetilde{w}_P) - k)$ et on procède par récurrence décroissante sur k. On suppose $k = \ell(\widetilde{w}_P)$, donc $n = 0$. Soit $V_{w,0} \subset V_w$ le sous-A-module constitué des fonctions à support dans $N_{P,w,0}$ à travers l'isomorphisme (2.2.7). Il est stable par $N_{P,w,0}$ et $(TN_{L,w_L})^+$ et on a un isomorphisme A-linéaire

$$V_{w,0} \cong \mathcal{C}^\infty \left(N_{P,w,0}, \text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^- \dot{w}_L B_L)(F)} U^{\widetilde{w}_P}\right) \tag{3.3.5}$$

à travers lequel $N_{P,w,0}$ agit par translation à droite. L'action de ζ sur $V_w/V_{w,0}$ est localement nilpotente : pour tout $f \in V_w$ vu à travers l'isomorphisme (2.2.7), il existe $\kappa \in \mathbb{N}$ tel que $\zeta^\kappa \operatorname{supp}(f) \zeta^{-\kappa} \subset N_{P,w,0}$ (car $\operatorname{supp}(f)$ est compact, $N_{P,w,0}$ est ouvert et ζ contracte strictement $N_{P,w,0}$), donc $\zeta^\kappa f \in V_{w,0}$. À travers l'isomorphisme (3.3.5), l'évaluation en $1 \in N_{P,w}(F)$ induit un isomorphisme A-linéaire

$$V_{w,0}^{N_{P,w,0}} \xrightarrow{\sim} \text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^- \dot{w}_L B_L)(F)} U^{\widetilde{w}_P}$$

qui est $(TN_{L,w_L})^+$-équivariant pour l'action de Hecke (notée $\overset{\mathrm{H}}{\cdot}$) : pour tous $b \in (TN_{L,w_L})^+$ et $f \in V_{w,0}^{N_{P,w,0}}$, on a

$$\begin{aligned}
(b \overset{\mathrm{H}}{\cdot} f)(1) &= \sum_{n \in N_{P,w,0}/bN_{P,w,0}b^{-1}} (nbf)(1) \\
&= \sum_{n \in N_{P,w,0}/bN_{P,w,0}b^{-1}} b \cdot f(b^{-1}nb) \\
&= b \cdot f(1),
\end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du fait que $b^{-1}nb \in N_{P,w,0}$ si et seulement si $n \in bN_{P,w,0}b^{-1}$. On a donc une injection $(TN_{L,w_L})^+$-équivariante

$$\text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^- \dot{w}_L B_L)(F)} U^{\widetilde{w}_P} \hookrightarrow V_w^{N_{P,w,0}}$$

qui est bien celle de l'énoncé (car $\alpha_{\ell(\widetilde{w}_P)} = 0$) et l'action de Hecke de ζ sur son conoyau est localement nilpotente (car l'action de ζ sur $V_w/V_{w,0}$ est localement nilpotente).

On suppose $k < \ell(\widetilde{w}_P)$ et le lemme vrai pour $k+1$. Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i+j=n$. Si $i > [F:\mathbb{Q}_p]$, alors $\mathrm{H}^i(N''_{P,s_k\ldots s_1 w_L,0}, \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\ldots s_1 w_L,0}, V_w)) = 0$ d'après le lemme 3.1.4 avec $\widetilde{N}_0 = N''_{P,s_k\ldots s_1 w_L,0}$, $V = \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\ldots s_1 w_L,0}, V_w)$ et i au lieu de n. Si $j > [F:\mathbb{Q}_p]\cdot(\ell(\widetilde{w}_P)-(k+1))$, alors $\mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\ldots s_1 w_L,0}, V_w) = 0$ d'après le lemme 3.3.3. En utilisant la suite spectrale (3.3.1), on en déduit un isomorphisme $(TN_{L,w_L})^+$-équivariant

$$\mathrm{H}^n(N_{P,s_k\ldots s_1 w_L,0}, V_w) \cong \mathrm{H}^i(N''_{P,s_k\ldots s_1 w_L,0}, \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\ldots s_1 w_L,0}, V_w))$$

avec $i = [F:\mathbb{Q}_p]$ et $j = [F:\mathbb{Q}_p]\cdot(\ell(\widetilde{w}_P)-(k+1))$ et en utilisant l'isomorphisme (3.3.2), on en déduit un isomorphisme $(TN_{L,w_L})^+$-équivariant

$$\mathrm{H}^n(N_{P,s_k\ldots s_1 w_L,0}, V_w) \cong \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\ldots s_1 w_L,0}, V_w)_{N''_{P,s_k\ldots s_1 w_L,0}} \otimes (\omega^{-1}\circ\alpha)$$

avec α le caractère algébrique de la représentation adjointe de TN_{L,w_L} sur $\mathrm{Lie}(N''_{P,s_k\ldots s_1 w_L})$. Par hypothèse de récurrence, on a une injection $(TN_{L,w_L})^+$-équivariante

$$\text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^-\dot{w}_L B_L)(F)}\left(U^{\widetilde{w}_P}\otimes(\omega^{-1}\circ\alpha_{k+1})\right) \hookrightarrow \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\ldots s_1 w_L,0}, V_w)$$

et l'action de Hecke de ζ sur son conoyau est localement nilpotente. En utilisant le point (ii) du lemme 3.1.10 avec $\widetilde{L}^+ = (TN_{L,w_L})^+$, $\widetilde{N}_0 = N''_{P,s_k\ldots s_1 w_L,0}$, $V = \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\ldots s_1 w_L,0}, V_w)$ et $V_0 = \text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^-\dot{w}_L B_L)(F)}(U^{\widetilde{w}_P}\otimes(\omega^{-1}\circ\alpha_{k+1}))$, on en déduit que l'on a une injection $(TN_{L,w_L})^+$-équivariante

$$\text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^-\dot{w}_L B_L)(F)}\left(U^{\widetilde{w}_P}\otimes(\omega^{-1}\circ\alpha_{k+1})\right)\otimes(\omega^{-1}\circ\alpha) \hookrightarrow \mathrm{H}^n(N_{P,s_k\ldots s_1 w_L,0}, V_w)$$

et que l'action de Hecke de ζ sur son conoyau est localement nilpotente. Or, on a un isomorphisme $(TN_{L,w_L})^+$-équivariant

$$\text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^-\dot{w}_L B_L)(F)}\left(U^{\widetilde{w}_P}\otimes(\omega^{-1}\circ\alpha_{k+1})\right)\otimes(\omega^{-1}\circ\alpha) \\ \cong \text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^-\dot{w}_L B_L)(F)}\left(U^{\widetilde{w}_P}\otimes(\omega^{-1}\circ(\alpha_{k+1}+w_L(\alpha)))\right)$$

(à travers l'isomorphisme (2.2.6), c'est le morphisme $(TN_{L,w_L})^+$-équivariant

$$\mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty\left(N_{L,w_L}(F), U^{\widetilde{w}_P}\otimes(\omega^{-1}\circ\alpha_{k+1})\right)\otimes(\omega^{-1}\circ\alpha) \\ \cong \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty\left(N_{L,w_L}(F), U^{\widetilde{w}_P}\otimes(\omega^{-1}\circ(\alpha_{k+1}+w_L(\alpha)))\right)$$

induit par l'identité sur les A-modules sous-jacents) et $w_L(\alpha)$ est le caractère algébrique de la représentation adjointe de TN_{L,w_L} sur $\mathrm{Lie}(N_{s_k\ldots s_1}/N_{s_{k+1}\ldots s_1})$, d'où $\alpha_{k+1}+w_L(\alpha) = \alpha_k$. Donc le lemme est vrai pour k. □

Lemme 3.3.6. — *Soient $k \in [\![0, \ell(\widetilde{w}_P)]\!]$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $n < [F:\mathbb{Q}_p]\cdot(\ell(\widetilde{w}_P)-k)$, alors l'action de Hecke de ζ sur $\mathrm{H}^n(N_{P,s_k\ldots s_1 w_L,0}, V_w)$ est localement nilpotente.*

Démonstration. — On suppose $n < [F:\mathbb{Q}_p]\cdot(\ell(\widetilde{w}_P)-k)$, donc $k < \ell(\widetilde{w}_P)$ et on procède par récurrence décroissante sur k. Si $k < \ell(\widetilde{w}_P)-1$, alors on suppose le lemme vrai pour $k+1$. Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i+j=n$. Si $j < [F:\mathbb{Q}_p]\cdot(\ell(\widetilde{w}_P)-(k+1))$, alors l'action de Hecke de ζ sur $\mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\ldots s_1 w_L,0}, V_{w,0})$ est localement nilpotente par hypothèse de récurrence. Si $j > [F:\mathbb{Q}_p]\cdot(\ell(\widetilde{w}_P)-(k+1))$, alors $\mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\ldots s_1 w_L,0}, V_{w,0}) = 0$ d'après le lemme 3.3.3. Si $j = [F : \mathbb{Q}_p] \cdot (\ell(\widetilde{w}_P) - (k+1))$, alors $i < [F : \mathbb{Q}_p]$ et d'après le lemme 3.3.4, on a une injection $(TN_{L,w_L})^+$-équivariante

$$\text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^- \dot{w}_L B_L)(F)} \big(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{k+1}) \big) \hookrightarrow \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\dots s_1 w_L,0}, V_w)$$

et l'action de Hecke de ζ sur son conoyau est localement nilpotente. Dans ce cas, l'action de Hecke de ζ sur $\mathrm{H}^i(N''_{P,s_k\dots s_1 w_L,0}, \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\dots s_1 w_L,0}, V_{w,0}))$ est encore localement nilpotente d'après le sous-lemme ci-dessous avec $V_0 = \text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^- \dot{w}_L B_L)(F)} (U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{k+1}))$ et $V = \mathrm{H}^j(N_{P,s_{k+1}\dots s_1 w_L,0}, V_w)$. En utilisant la suite spectrale (3.3.1), on en déduit que l'action de Hecke de ζ sur $\mathrm{H}^n(N_{P,s_k\dots s_1 w_L,0}, V_w)$ est localement nilpotente. Donc le lemme est vrai pour k. $\square$

Sous-lemme. — *Soient V_0 une représentation lisse localement ζ-finie de $S(\mathbb{Q}_p)$ sur A, V une représentation lisse de $S^+ \ltimes N''_{P,s_k\dots s_1 w_L,0}$ sur A et $i \in \mathbb{N}$. On suppose que l'on a une injection S^+-équivariante $V_0 \hookrightarrow V$ et que l'action de ζ sur son conoyau est localement nilpotente. Si $i < [F : \mathbb{Q}_p]$, alors l'action de ζ sur $\mathrm{H}^i(N''_{P,s_k\dots s_1 w_L,0}, V)$ est localement nilpotente.*

Démonstration. — Comme $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} N''_{P,s_k\dots s_1 w_L}$ est nilpotent et commutatif, l'exponentielle est un isomorphisme de groupes $\mathrm{Lie}(\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} N''_{P,s_k\dots s_1 w_L}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} N''_{P,s_k\dots s_1 w_L}$ d'après [**17**, Chapitre IV, § 2, Proposition 4.1]. En particulier, on a une suite de sous-groupes fermés

$$1 = \widetilde{N}_0 \subset \widetilde{N}_1 \subset \dots \subset \widetilde{N}_{[F:\mathbb{Q}_p]} = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} N''_{P,s_k\dots s_1 w_L}$$

dont les quotients successifs sont isomorphes au groupe additif sur $\mathbb{Q}_p$. L'action adjointe de S sur $\mathrm{Lie}(\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} N''_{P,s_k\dots s_1 w_L})$ étant donnée par un caractère $\widetilde{\alpha}$, ces sous-groupes sont stables sous l'action par conjugaison de S. Pour tout $l \in [\![0, [F : \mathbb{Q}_p]]\!]$, on note $\widetilde{N}_{l,0}$ l'intersection de $\widetilde{N}_l(\mathbb{Q}_p)$ avec $N''_{P,s_k\dots s_1 w_L,0}$ et si $l > 0$, alors on note $\widetilde{N}''_{l,0}$ l'image de $\widetilde{N}_{l,0}$ dans $(\widetilde{N}_l/\widetilde{N}_{l-1})(\mathbb{Q}_p)$. On montre par récurrence sur $l \in [\![0, [F : \mathbb{Q}_p]]\!]$ les points suivants.

(i) Si $i = l$, alors on a une injection S^+-équivariante

$$V_0 \otimes \widetilde{\alpha}^{-i} |\widetilde{\alpha}|_p^{-i} \hookrightarrow \mathrm{H}^i(\widetilde{N}_{l,0}, V)$$

et l'action de Hecke de ζ sur son conoyau est localement nilpotente.

(ii) Si $i < l$, alors l'action de Hecke de ζ sur $\mathrm{H}^i(\widetilde{N}_{l,0}, V)$ est localement nilpotente.

Le cas $l = 0$ est vrai par hypothèse. On suppose $l > 0$ et le résultat vrai pour $l-1$. Comme $\dim_{\mathbb{Q}_p} \widetilde{N}''_{l,0} = 1$, on a la suite exacte (3.2.2) avec $\widetilde{L}^+ = S^+$, $\widetilde{N}_0 = \widetilde{N}_{l,0}$, $\widetilde{N}'_0 = \widetilde{N}_{l-1,0}$ et $\widetilde{N}''_0 = \widetilde{N}''_{l,0}$ dont les morphismes sont S^+-équivariants d'après la proposition 3.2.6. En utilisant la proposition 3.1.5 avec $n = 1$ ($= \dim_{\mathbb{Q}_p} \widetilde{N}''_{l,0}$), $\widetilde{L}^+ = S^+$, $\widetilde{N}_0 = \widetilde{N}''_{l,0}$ et $\mathrm{H}^{i-1}(\widetilde{N}_{l-1,0}, V)$ au lieu de V, on en déduit une suite exacte courte de représentations lisses de S^+ sur A

$$0 \to \mathrm{H}^{i-1}(\widetilde{N}_{l-1,0}, V)_{\widetilde{N}''_{l,0}} \otimes \widetilde{\alpha}^{-1} |\widetilde{\alpha}|_p^{-1} \to \mathrm{H}^i(\widetilde{N}_{l,0}, V) \to \mathrm{H}^i(\widetilde{N}_{l-1,0}, V)^{\widetilde{N}''_{l,0}} \to 0. \tag{3.3.7}$$

On suppose $i = l$ et on prouve le point (i). D'un côté $i > l-1$, donc $\mathrm{H}^i(\widetilde{N}_{l-1,0}, V) = 0$ d'après le lemme 3.1.4 avec $\widetilde{N}_0 = \widetilde{N}_{l-1,0}$ et i au lieu de n, d'où un isomorphisme S^+-équivariant

$$\mathrm{H}^{i-1}(\widetilde{N}_{l-1,0}, V)_{\widetilde{N}''_{l,0}} \otimes \widetilde{\alpha}^{-1}|\widetilde{\alpha}|_p^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(\widetilde{N}_{l,0}, V).$$

De l'autre $i-1 = l-1$ et par l'hypothèse de récurrence, on a une injection S^+-équivariante

$$V_0 \otimes \widetilde{\alpha}^{-(i-1)}|\widetilde{\alpha}|_p^{-(i-1)} \hookrightarrow \mathrm{H}^{i-1}(\widetilde{N}_{l-1,0}, V)$$

et l'action de Hecke de ζ sur son conoyau est localement nilpotente, donc d'après le point (ii) du lemme 3.1.10 avec $\widetilde{L}^+ = S^+$, $\widetilde{N}_0 = \widetilde{N}''_{l,0}$, $\mathrm{H}^{i-1}(\widetilde{N}_{l-1,0}, V)$ au lieu de V et $V_0 \otimes \widetilde{\alpha}^{-(i-1)}|\widetilde{\alpha}|_p^{-(i-1)}$ au lieu de V_0, on a une injection S^+-équivariante

$$V_0 \otimes \widetilde{\alpha}^{-(i-1)}|\widetilde{\alpha}|_p^{-(i-1)} \hookrightarrow \mathrm{H}^{i-1}(\widetilde{N}_{l-1,0}, V)_{\widetilde{N}''_{l,0}}$$

et l'action de Hecke de ζ sur son conoyau est localement nilpotente. En utilisant l'isomorphisme précédent, on en déduit le point (i).

On suppose $i < l$ et on prouve le point (ii). D'un côté $i-1 < l-1$, donc l'action de Hecke de ζ sur $\mathrm{H}^{i-1}(\widetilde{N}_{l-1,0}, V)$ est localement nilpotente par hypothèse de récurrence. De l'autre ou bien $i < l-1$ et l'action de Hecke de ζ sur $\mathrm{H}^i(\widetilde{N}_{l-1,0}, V)$ est localement nilpotente par hypothèse de récurrence, donc l'action de Hecke de ζ sur $\mathrm{H}^i(\widetilde{N}_{l-1,0}, V)^{\widetilde{N}''_{l,0}}$ est localement nilpotente ; ou bien $i = l-1$ et par hypothèse de récurrence on a une injection S^+-équivariante

$$V_0 \otimes \widetilde{\alpha}^{-i}|\widetilde{\alpha}|_p^{-i} \hookrightarrow \mathrm{H}^i(\widetilde{N}_{l-1,0}, V)$$

et l'action de Hecke de ζ sur son conoyau est localement nilpotente, donc l'action de Hecke de ζ sur $\mathrm{H}^i(\widetilde{N}_{l-1,0}, V)^{\widetilde{N}''_{l,0}}$ est localement nilpotente d'après le point (i) du lemme 3.1.10 avec $\widetilde{L}^+ = S^+$, $\widetilde{N}_0 = \widetilde{N}''_{l,0}$, $\mathrm{H}^{i-1}(\widetilde{N}_{l-1,0}, V)$ au lieu de V et $V_0 \otimes \widetilde{\alpha}^{-i}|\widetilde{\alpha}|_p^{-i}$ au lieu de V_0. En utilisant la suite exacte (3.3.7), on en déduit le point (ii). □

CHAPITRE 4

CALCULS DE PARTIES ORDINAIRES DÉRIVÉES

Nous calculons partiellement les foncteurs $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{P(F)}$ sur une induite. Puis, nous étudions le cas relatif à un sous-groupe de Borel. Enfin, nous adaptons nos résultats aux représentations ordinaires.

4.1. Calculs sur une représentation induite

Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique standard et $L \subset P$ le sous-groupe de Levi standard. Soient U une représentation lisse localement admissible de $T(F)$ sur A et $n \in \mathbb{N}$.

Préliminaires

On étend naturellement la définition du foncteur $\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)}$ de la façon suivante. On fixe un sous-groupe ouvert compact $N_{P,0} \subset N_P(F)$ et on reprend les notations de la section 3.3 pour les sous-monoïdes. En procédant comme dans la preuve de [**18**, Proposition 3.3.6], on voit que le produit induit un isomorphisme de groupes $B_L^+ \times_{Z_L^+} Z_L(F) \xrightarrow{\sim} B_L(F)$ donc pour toute représentation lisse V de $B(F)$ sur A, le A-module

$$\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} V \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{A[Z_L^+]}\left(A[Z_L(F)], \mathrm{H}^n(N_{P,0}, V)\right)_{Z_L(F)\text{-fin}}$$

est naturellement une représentation lisse de $B_L(F)$ sur A.

Filtration et calcul du gradué

On commence par montrer que les filtrations définies dans la section 2.2 induisent des filtrations des parties ordinaires dérivées de $\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U$.

Proposition 4.1.1. — *La filtration naturelle $\mathrm{Fil}_P^\bullet \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U$ induit une filtration de $\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)}(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U)$ par des sous-$L(F)$-représentations*

$$\mathrm{Fil}_P^i \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)}\left(\mathrm{Fil}_P^i \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right)$$

pour tout $i \in [\![-1, \dim N_P]\!]$ et si $i \geq 0$, alors on a un isomorphisme naturel $L(F)$-équivariant

$$\mathrm{Gr}_P^i \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) \cong \bigoplus_{\ell(\widetilde{w}_P)=i} \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)}\left(\text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^-\dot{\widetilde{w}}_P P)(F)} U\right).$$

Démonstration. — En utilisant l'isomorphisme composé (2.2.1), on voit qu'il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![0, \dim N_P]\!]$, la suite exacte courte de représentations lisses de $P(F)$ sur A

$$0 \to \mathrm{Fil}_P^{i-1} \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U \to \mathrm{Fil}_P^{i} \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U \to \mathrm{Gr}_P^{i} \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U \to 0 \tag{4.1.2}$$

induit une suite exacte courte de représentations lisses de $L(F)$ sur A

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\mathrm{Fil}_P^{i-1} \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) &\to \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\mathrm{Fil}_P^{i} \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) \\ &\to \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\mathrm{Gr}_P^{i} \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) \to 0. \end{aligned}$$

Soit $i \in [\![0, \dim N_P]\!]$. En utilisant le lemme 2.1.4 avec $H = P(F)$, on obtient des isomorphismes $P(F)$-équivariants

$$\mathrm{Fil}_P^{i-1} \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U \cong \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X-Y} U$$
$$\mathrm{Fil}_P^{i} \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U \cong \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X} U$$

avec $X = \mathrm{Fil}_P^i G(F)$ et $Y = \mathrm{Gr}_P^i G(F)$. À travers ces isomorphismes, le premier morphisme non trivial de la suite exacte (4.1.2) est le prolongement par 0 sur Y, que l'on note $\iota : \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X-Y} U \hookrightarrow \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X} U$. On montre que ce dernier induit une injection L^+-équivariante

$$\mathrm{H}^n \left(N_{P,0}, \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X-Y} U\right) \hookrightarrow \mathrm{H}^n \left(N_{P,0}, \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X} U\right).$$

Soit $\phi : N_{P,0}^n \to \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X-Y} U$ une cochaîne localement constante telle que $\iota \circ \phi$ soit un cobord, c'est-à-dire qu'il existe une cochaîne localement constante $\psi : N_{P,0}^{n-1} \to \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X} U$ telle que $\iota \circ \phi = \mathrm{d}\psi$. Par compacité de $N_{P,0}$, le sous-A-module $V_\phi \subset \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X-Y} U$ engendré par $\mathrm{im}\,\phi$ est de type fini. D'après la proposition 2.1.3 avec $H_0 = N_{P,0}$ et $V = V_\phi$, il existe un morphisme $N_{P,0}$-équivariant $\varrho : \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X} U \to \text{c-ind}_{B^-(F)}^{X-Y} U$ tel que $\varrho \circ \iota$ induit l'identité sur V_ϕ. Ainsi $\mathrm{d}(\varrho \circ \psi) = \varrho \circ (\mathrm{d}\psi) = \varrho \circ \iota \circ \phi = \phi$, donc ϕ est un cobord.

Par la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte (4.1.2), on déduit de ce qui précède que pour tout $i \in [\![0, \dim N_P]\!]$, on a une suite exacte courte de représentations lisses de L^+ sur A

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{H}^n \left(N_{P,0}, \mathrm{Fil}_P^{i-1} \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) &\to \mathrm{H}^n \left(N_{P,0}, \mathrm{Fil}_P^{i} \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) \\ &\to \mathrm{H}^n \left(N_{P,0}, \mathrm{Gr}_P^{i} \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) \to 0. \end{aligned}$$

Comme U est localement admissible, $\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U$ l'est aussi et on déduit du théorème 1.2.2 que ces suites exactes sont dans la catégorie $\mathrm{Mod}_{Z_L^+}^{\mathrm{l.fin}}(A)$. En utilisant le lemme 1.2.1, on en conclut que l'on obtient encore des suites exactes en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{A[Z_L^+]}(A[Z_L(F)], -)_{Z_L(F)\text{-fin}}$. □

Soit $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$. En utilisant l'isomorphisme composé (2.2.2) et en procédant comme dans la preuve de la proposition 4.1.1, on obtient le résultat suivant.

Proposition 4.1.3. — *La filtration naturelle* $\mathrm{Fil}_B^\bullet \operatorname{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^-\dot{\tilde{w}}_P P)(F)} U$ *induit une filtration de* $\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)}(\operatorname{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^-\dot{\tilde{w}}_P P)(F)} U)$ *par des sous-*$B_L(F)$*-représentations*

$$\mathrm{Fil}_B^j \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\operatorname{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^-\dot{\tilde{w}}_P P)(F)} U\right) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\mathrm{Fil}_B^j \operatorname{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^-\dot{\tilde{w}}_P P)(F)} U\right)$$

pour tout $j \in [\![-1, \dim N_L]\!]$ *et si* $j \geq 0$*, alors on a un isomorphisme naturel* $B_L(F)$*-équivariant*

$$\mathrm{Gr}_B^j \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\operatorname{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^-\dot{\tilde{w}}_P P)(F)} U\right) \cong \bigoplus_{\ell(w_L)=j} \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\operatorname{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^-\dot{\tilde{w}}_P \dot{w}_L B)(F)} U\right).$$

À présent, on calcule partiellement les gradués de ces filtrations. Pour tout $\tilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$, on rappelle que $U^{\tilde{w}_P}$ désigne le A-module U sur lequel $t \in T(F)$ agit à travers $\dot{\tilde{w}}_P t \dot{\tilde{w}}_P^{-1}$ et on note $\alpha_{\tilde{w}_P}$ le caractère algébrique de la représentation adjointe de T sur $\mathrm{dét}_F \mathrm{Lie}(N_{w_0\tilde{w}_P})$. On a $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_{s_\alpha} = \alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta_L$.

Théorème 4.1.4. — *Soient* U *une représentation lisse localement admissible de* $T(F)$ *sur* A *et* $w \in W$*. On écrit* $w = \tilde{w}_P w_L$ *avec* $\tilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$ *et* $w_L \in W_L$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a un isomorphisme naturel* $(TN_{L,w_L})(F)$*-équivariant*

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\operatorname{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^-\dot{\tilde{w}}_P \dot{w}_L B)(F)} U\right)\\ &\qquad\qquad \cong \begin{cases} \operatorname{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^-\dot{w}_L B_L)(F)} \left(U^{\tilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\tilde{w}_P})\right) & \text{si } n = [F:\mathbb{Q}_p] \cdot \ell(\tilde{w}_P), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

Démonstration. — Soit $n \in \mathbb{N}$. On reprend les notations de la section 3.3. Les preuves des propositions 4.1.1 et 4.1.3 montrent que $\mathrm{H}^n(N_{P,0}, V_w)$ est dans la catégorie $\mathrm{Mod}_{Z_L^+}^{\mathrm{l.fin}}(A)$.

Si $n = [F:\mathbb{Q}_p] \cdot \ell(\tilde{w}_P)$, alors d'après le lemme 3.3.4 avec $k = 0$ on a une injection $(TN_{L,w_L})^+$-équivariante $\operatorname{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^-\dot{w}_L B_L)(F)}(U^{\tilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\tilde{w}_P})) \hookrightarrow \mathrm{H}^n(N_{P,0}, V_w)$ et l'action de Hecke de ζ sur son conoyau est localement nilpotente, d'où un isomorphisme $(TN_{L,w_L})(F)$-équivariant

$$A[Z_L(F)] \otimes_{A[Z_L^+]} \mathrm{H}^n(N_{P,0}, V_w) \cong \operatorname{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^-\dot{w}_L B_L)(F)} \left(U^{\tilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\tilde{w}_P})\right).$$

Si $n \neq [F:\mathbb{Q}_p] \cdot \ell(\tilde{w}_P)$, alors ou bien $n < [F:\mathbb{Q}_p] \cdot \ell(\tilde{w}_P)$ et l'action de Hecke de ζ sur $\mathrm{H}^n(N_{P,0}, V_w)$ est localement nilpotente d'après le lemme 3.3.6 avec $k = 0$, ou bien $n > [F:\mathbb{Q}_p] \cdot \ell(\tilde{w}_P)$ et $\mathrm{H}^n(N_{P,0}, V_w) = 0$ d'après le lemme 3.3.3 avec $k = 0$. Dans les deux cas, on en déduit que

$$A[Z_L(F)] \otimes_{A[Z_L^+]} \mathrm{H}^n(N_{P,0}, V_w) = 0.$$

En utilisant le lemme 1.2.1, on obtient l'isomorphisme de l'énoncé. Sa naturalité est une conséquence de la naturalité des filtrations de Bruhat, de l'inclusion $V_{w,0} \subset V_w$ qui induit l'injection du lemme 3.3.4, de la suite spectrale (3.3.1) et de l'isomorphisme (3.3.2). □

Remarque 4.1.5. — On s'attend à ce que l'isomorphisme du théorème soit en fait $B_L(F)$-équivariant. Les calculs sont limités par le fait que les dévissages de N_P utilisés dans la section 3.3 ne sont pas stables sous l'action par conjugaison de B_L.

Calculs sur une induite

Soit $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$. En procédant comme dans la section 2.2 pour le triplet (L, B_L, T), on voit que l'on a une filtration naturelle de $\mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)}(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P}))$ par des sous-$B_L(F)$-représentations

$$\mathrm{Fil}_{B_L}^j \mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} \left(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P})\right)$$

pour tout $j \in \llbracket -1, \dim N_L \rrbracket$ et que si $j \geq 0$, alors on a un isomorphisme $B_L(F)$-équivariant

$$\begin{aligned} \text{(4.1.6)} \quad & \mathrm{Gr}_{B_L}^j \mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} \left(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P})\right) \\ & \qquad \cong \bigoplus_{\ell(w_L)=j} \text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^- \dot{w}_L B_L)(F)} \left(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P})\right). \end{aligned}$$

Corollaire 4.1.7. — *Soient U une représentation lisse localement admissible de $T(F)$ sur A et $n \in \mathbb{N}$. On a un isomorphisme naturel $L(F)$-équivariant*

$$\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) \cong \bigoplus_{[F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(\widetilde{w}_P)=n} \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)} U\right).$$

Soient $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$ et $j \in \llbracket 0, \dim N_L \rrbracket$. Si $[F : \mathbb{Q}_p] \cdot \ell(\widetilde{w}_P) = n$, alors on a un isomorphisme $T(F)$-équivariant

$$\mathrm{Gr}_B^j \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)} U\right) \cong \mathrm{Gr}_{B_L}^j \mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} \left(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P})\right)$$

dont la restriction au facteur direct $\text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^- \dot{w}_L B_L)(F)}(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P}))$ *à travers l'isomorphisme* (4.1.6) *est $N_{L,w_L}(F)$-équivariante pour tout $w_L \in W_L$ tel que $\ell(w_L) = j$.*

Démonstration. — Pour tout $\widetilde{w}_P \in \widetilde{W}_P$, en utilisant la proposition 4.1.3 on déduit du théorème 4.1.4 le second isomorphisme de l'énoncé si $[F : \mathbb{Q}_p] \cdot \ell(\widetilde{w}_P) = n$ et sinon on obtient l'égalité

$$\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)} U\right) = 0.$$

En utilisant la proposition 4.1.1, on en déduit que le gradué $\mathrm{Gr}_P^\bullet \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)}(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U)$ est concentré en degré $n/[F : \mathbb{Q}_p]$ (en particulier il est nul si $[F : \mathbb{Q}_p] \nmid n$). Ainsi la filtration $\mathrm{Fil}_P^\bullet \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)}(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U)$ est triviale et on obtient le premier isomorphisme de l'énoncé. □

En particulier, on déduit du corollaire 4.1.7 une injection naturelle $B_L(F)$-équivariante

$$\text{(4.1.8)} \qquad \mathrm{Fil}_{B_L}^0 \mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} \left(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P})\right) \hookrightarrow \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)} U\right),$$

d'où un morphisme naturel $L(F)$-équivariant

$$\begin{aligned} & A[L(F)] \otimes_{A[B_L(F)]} \mathrm{Fil}_{B_L}^0 \mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} \left(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P})\right) \\ & \qquad \to \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^- \dot{\widetilde{w}}_P P)(F)} U\right). \end{aligned}$$

Or dans la preuve de [**19**, Théorème 4.4.6], il est montré qu'un tel morphisme se factorise (de façon unique) à travers l'application naturelle $L(F)$-équivariante

$$A[L(F)] \otimes_{A[B_L(F)]} \mathrm{Fil}^0_{B_L} \mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} \left(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P})\right) \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} \left(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P})\right),$$

donc l'injection (4.1.8) se prolonge naturellement en un morphisme $L(F)$-équivariant

$$\mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} \left(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P})\right) \to \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\text{c-ind}_{B^-(F)}^{(B^-\dot{\widetilde{w}}_P P)(F)} U\right). \tag{4.1.9}$$

Conjecture 4.1.10. — *Le morphisme naturel* (4.1.9) *est un isomorphisme.*

On prouve cette conjecture lorsque la source du morphisme est irréductible.

Proposition 4.1.11. — *Si la représentation* $\mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)}(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P}))$ *est irréductible, alors le morphisme naturel* (4.1.9) *est un isomorphisme.*

Démonstration. — On suppose la représentation $\mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)}(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P}))$ irréductible. Dans ce cas U est une représentation irréductible de $T(F)$ sur k_E. Comme le morphisme (4.1.9) est non nul, on en déduit qu'il est injectif. Il reste à montrer sa surjectivité. En utilisant [**20**, Lemme 4.1.9], on se ramène par extension finie des scalaires au cas où U est absolument irréductible, donc de dimension 1 sur k_E (car $T(F)$ est commutatif).

Dans ce cas, on montre que la source et le but du morphisme (4.1.9) sont de longueur finie égale à $\operatorname{card} W_L$ dans la catégorie $\mathrm{Mod}^\infty_{B_L(F)}(k_E)$. Pour tout $w_L \in W_L$, on a un isomorphisme $(TN_{L,w_L})(F)$-équivariant

$$\text{c-ind}_{B_L^-(F)}^{(B_L^- \dot{w}_L B_L)(F)} \left(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P})\right) \cong \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(N_{L,w_L}(F), k_E) \otimes_{k_E} \left(U^{\widetilde{w}_P} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widetilde{w}_P})\right)^{w_L}$$

et $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(N_{L,w_L}(F), k_E)$ est irréductible dans la catégorie $\mathrm{Mod}^\infty_{(TN_{L,w_L})(F)}(k_E)$ d'après [**36**, Théorème 5]. En utilisant le corollaire 4.1.7 on en déduit le résultat. □

On explicite ces calculs en degrés 0 et 1. Lorsque $n = 0$, on déduit de la proposition 1.2.6 et de l'isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \cong \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)}$ que la conjecture 4.1.10 est *vraie* : on a un isomorphisme naturel $L(F)$-équivariant

$$\mathrm{Ord}_{P(F)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) \cong \mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} U. \tag{4.1.12}$$

On étudie le cas $n = 1$. Les éléments de $\widetilde{W}_P$ de longueur 1 sont exactement les réflexions simples s_α avec $\alpha \in \Delta - \Delta_L$ et on note U^α les représentations U^{s_α} correspondantes. Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, on en déduit que le premier isomorphisme du corollaire 4.1.7 avec $n = 1$ et les morphismes (4.1.9) avec $n = 1$ et $\widetilde{w}_P = s_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta_L$ donnent un morphisme naturel $L(\mathbb{Q}_p)$-équivariant

$$\bigoplus_{\alpha \in \Delta - \Delta_L} \mathrm{Ind}_{B_L^-(\mathbb{Q}_p)}^{L(\mathbb{Q}_p)} \left(U^\alpha \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha)\right) \to \mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{P(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U\right) \tag{4.1.13}$$

qui est injectif en restriction à $\bigoplus_{\alpha \in \Delta - \Delta_L} \mathrm{Fil}^0_{B_L} \mathrm{Ind}_{B_L^-(\mathbb{Q}_p)}^{L(\mathbb{Q}_p)}(U^\alpha \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha))$. Si la conjecture 4.1.10 est vraie, alors c'est un isomorphisme. De même si les facteurs directs de sa source sont irréductibles d'après la proposition 4.1.11. Lorsque $F \neq \mathbb{Q}_p$, la somme directe du premier isomorphisme du corollaire 4.1.7 avec $n = 1$ est nulle, d'où le résultat suivant.

Corollaire 4.1.14. — *Soit U une représentation lisse localement admissible de $T(F)$ sur A. Si $F \neq \mathbb{Q}_p$, alors* $\mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{P(F)}(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U) = 0$.

4.2. Le cas relatif à un sous-groupe de Borel

On redémontre les résultats précédents dans le cas $P = B$ et $L = T$. Cela nous permet de rappeler les différentes filtrations et de détailler les calculs de la section 3.3 dans ce cas. Soient U une représentation lisse localement admissible de $T(F)$ sur A et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $w \in W$, on note U^w le A-module U sur lequel $t \in T(F)$ agit à travers $\dot{w}t\dot{w}^{-1}$ et α_w le caractère algébrique de la représentation adjointe de T sur $\mathrm{d\acute{e}t}_F \operatorname{Lie}(N_{w_0 w})$.

Filtration de Bruhat

Comme $\widetilde{W}_B = W$ et $W_T = 1$, il n'existe qu'une seule famille de filtrations $\mathrm{Fil}_B^\bullet$ (l'autre étant triviale). On rappelle ces dernières. Pour tout $r \in [\![-1, \dim N]\!]$, on a

$$\mathrm{Fil}_B^r G(F) \overset{\text{déf}}{=} \coprod_{\ell(w) \leq r} (B^- \dot{w} B)(F).$$

Par exemple, $\mathrm{Fil}_B^0 G(F) = (B^- B)(F)$ est la *grosse cellule* : c'est le plus petit sous-ensemble ouvert $(B^-(F), B(F))$-biinvariant de $G(F)$ et il est dense dans $G(F)$. Les sous-$B(F)$-représentations

$$\mathrm{Fil}_B^r \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U \overset{\text{déf}}{=} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) (\mathrm{Fil}_B^r G(F))$$

pour tout $r \in [\![-1, \dim N]\!]$ forment la *filtration de Bruhat* de $\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U$ et si $r \geq 0$, alors en utilisant la proposition 2.1.2 avec $H = B(F)$, $X = \mathrm{Fil}_B^r G(F)$ et $Y = \mathrm{Gr}_B^r G(F)$ et les isomorphismes (2.2.3) pour tout $w \in W$ tel que $\ell(w) = r$, on voit que l'on a un isomorphisme naturel $B(F)$-équivariant

$$\mathrm{Gr}_B^r \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U \cong \bigoplus_{\ell(w) = r} \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(N_w(F), U). \tag{4.2.1}$$

En procédant comme dans la preuve de la proposition 4.1.1 avec l'isomorphisme (4.2.1), on voit que la filtration naturelle $\mathrm{Fil}_B^\bullet \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U$ induit une filtration de $\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)}(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U)$ par des sous-$T(F)$-représentations

$$\mathrm{Fil}_B^r \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)} \left(\mathrm{Fil}_B^r \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right)$$

pour tout $r \in [\![-1, \dim N]\!]$ et si $r \geq 0$, alors on a un isomorphisme naturel $T(F)$-équivariant

$$\mathrm{Gr}_B^r \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) \cong \bigoplus_{\ell(w) = r} \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)} \left(\mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(N_w(F), U)\right). \tag{4.2.2}$$

Calculs sur le gradué

Soient $N_0 \subset N(F)$ un sous-groupe ouvert compact standard et $w \in W$. On note $N_{w,0}$ l'intersection de $N_w(F)$ avec N_0 et $V_{w,0} \subset V_w \cong \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(N_w(F), U)$ le sous-A-module stable par $N_{w,0}$ et T^+ constitué des fonctions à support dans $N_{w,0}$.

On suppose que N_0 est *totalement décomposé* comme dans [**33**], c'est-à-dire que le produit induit une bijection $\prod_{\alpha\in\Phi^+}(N''_\alpha(F) \cap N_0) \xrightarrow{\sim} N_0$ où pour tout $\alpha \in \Phi^+$, $N''_\alpha \subset N$ est le sous-groupe radiciel correspondant. Dans ce cas, on a

$$N_0 = (N_{w_0w}(F) \cap N_0)N_{w,0} \tag{4.2.3}$$

et on en déduit que $V_{w,0}$ est stable par N_0 tout entier (ceci est une particularité du cas relatif à un sous-groupe de Borel). On a donc une suite exacte courte de représentations lisses de $T^+ \ltimes N_0$ sur A

$$0 \to V_{w,0} \to V_w \to V_w/V_{w,0} \to 0 \tag{4.2.4}$$

et l'action d'un élément de T^+ contractant strictement N_0 est localement nilpotente sur $V_w/V_{w,0}$ (car elle contracte strictement le support d'une fonction). La suite exacte (4.2.4) est scindée dans la catégorie $\mathrm{Mod}^\infty_{N_0}(A)$ (la multiplication par la fonction caractéristique de $N_{w,0}$ sur $N_w(F)$ induit une rétraction A-linéaire $V_w \to V_{w,0}$ et l'égalité (4.2.3) montre qu'elle est N_0-équivariante). On a donc une suite exacte courte de représentations lisses de T^+ sur A

$$0 \to \mathrm{H}^n(N_0, V_{w,0}) \to \mathrm{H}^n(N_0, V_w) \to \mathrm{H}^n(N_0, V_w/V_{w,0}) \to 0 \tag{4.2.5}$$

et l'action de Hecke d'un élément de T^+ contractant strictement N_0 est localement nilpotente sur $\mathrm{H}^n(N_0, V_w/V_{w,0})$.

Soit $s_{\ell(w)} \dots s_1$ une décomposition réduite de w. Comme dans la section 3.3, on obtient une suite de sous-groupes fermés stables sous l'action par conjugaison de T

$$N \rhd N_{s_1} \rhd N_{s_2s_1} \rhd \dots \rhd N_w$$

et pour tout $k \in [\![0, \ell(w)]\!]$, on note $N_{s_k\dots s_1,0}$ l'intersection de $N_{s_k\dots s_1}(F)$ avec N_0 et α_k le caractère algébrique de la représentation adjointe de T sur $\mathrm{dét}_F \operatorname{Lie}(N_{s_k\dots s_1} \cap N_{w_0w})$. Si $n = [F : \mathbb{Q}_p] \cdot (\ell(w) - k)$, alors la représentation $\mathrm{H}^n(N_{s_k\dots s_1,0}, V_{w,0})$ est la source de l'injection du lemme 3.3.4 : en procédant comme dans la preuve de ce dernier, on voit que l'on a des morphismes T^+-équivariants

$$U^w \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_k) \cong \mathrm{H}^n(N_{s_k\dots s_1,0}, V_{w,0}) \hookrightarrow \mathrm{H}^n(N_{s_k\dots s_1,0}, V_w). \tag{4.2.6}$$

En procédant comme dans les preuves des lemmes 3.3.3 et 3.3.6, on montre que si $n > [F : \mathbb{Q}_p] \cdot (\ell(w) - k)$, alors $\mathrm{H}^n(N_{s_k\dots s_1,0}, V_{w,0}) = 0$ et si $n < [F : \mathbb{Q}_p] \cdot (\ell(w) - k)$, alors l'action de Hecke d'un élément de T^+ contractant strictement N_0 est nilpotente sur $\mathrm{H}^n(N_{s_k\dots s_1,0}, V_{w,0})$.

En utilisant le lemme 1.2.1, les calculs précédents avec $k = 0$ et la suite exacte (4.2.5) permettent de retrouver le théorème 4.1.4 : on a un isomorphisme naturel $T(F)$-équivariant

$$\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)}\left(\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(N_w(F), U)\right) \cong \begin{cases} U^w \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_w) & \text{si } n = [F : \mathbb{Q}_p] \cdot \ell(w), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.2.7}$$

Calculs sur une induite

En utilisant les isomorphismes (4.2.2) pour tout $r \in [\![0, \ell(w)]\!]$ et les isomorphismes (4.2.7) pour tout $w \in W$, on voit que le gradué $\mathrm{Gr}_B^\bullet \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)}(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U)$ est concentré en degré $n/[F:\mathbb{Q}_p]$ (en particulier il est nul si $[F:\mathbb{Q}_p] \nmid n$). Ainsi la filtration $\mathrm{Fil}_B^\bullet \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)}(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U)$ est triviale et on retrouve le corollaire 4.1.7 : on a un isomorphisme naturel $T(F)$-équivariant

$$\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} U\right) \cong \bigoplus_{[F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(w)=n} U^w \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_w). \tag{4.2.8}$$

En particulier, la conjecture 4.1.10 est *vraie* dans le cas relatif à un sous-groupe de Borel.

On suppose $F = \mathbb{Q}_p$ et on explicite l'isomorphisme (4.2.8) en degré 1. Pour tout $\alpha \in \Delta$, on note U^α la représentation U^{s_α}.

Corollaire 4.2.9. — *Soit U une représentation lisse localement admissible de $T(\mathbb{Q}_p)$ sur A. On a un isomorphisme naturel $T(\mathbb{Q}_p)$-équivariant*

$$\mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{B(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U\right) \cong \bigoplus_{\alpha\in\Delta} U^\alpha \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha).$$

Démonstration. — Les éléments de W de longueur 1 sont exactement les réflexions simples s_α avec $\alpha \in \Delta$, donc l'isomorphisme de l'énoncé est l'isomorphisme (4.2.8) avec $n = 1$. □

Définition 4.2.10. — Un « *twisting element* »[(7)] de G est un caractère algébrique θ de T tel que $\langle \theta, \alpha^\vee \rangle = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta$.

Remarque 4.2.11. — Si le groupe dérivé de G est simplement connexe, alors la somme des poids fondamentaux relatifs à Δ est un « twisting element » bien défini à un caractère algébrique de G près. En général, G n'admet pas toujours de « twisting element » (par exemple $G = \mathrm{PGL}_2$) et G peut admettre un « twisting element » sans posséder de poids fondamentaux (par exemple $G = (\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2)/\mathrm{GL}_1$ où GL_1 s'injecte diagonalement dans $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$).

On calcule à présent le δ-foncteur $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{B(F)}$ sur une série principale lorsque G admet un « twisting element » noté θ. Lorsque U est un caractère χ, on note $w(\chi)$ la représentation $U^{w^{-1}}$ pour tout $w \in W$.

Corollaire 4.2.12. — *Soit $\chi : T(F) \to A^\times$ un caractère lisse. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme $T(F)$-équivariant*

$$\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right) \cong \bigoplus_{[F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(w)=n} w(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \theta).$$

---

(7) Terminologie d'après [**14**].

Démonstration. — Soit $n \in \mathbb{N}$. L'isomorphisme (4.2.8) avec $U = \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)$ devient

$$\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right) \cong \bigoplus_{[F:\mathbb{Q}_p]\cdot \ell(w)=n} \left(\chi \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right)^w \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_w)$$

et pour tout $w \in W$, on a par définition

$$\left(\chi \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right)^w \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha_w) = w^{-1}(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ (w^{-1}(\theta) + \alpha_w)).$$

En faisant le changement de variable $w \mapsto w^{-1}$ dans la somme directe (possible car $\ell(w) = \ell(w^{-1})$), on voit qu'il suffit de montrer que $w^{-1}(\theta) + \alpha_w = \theta$ pour tout $w \in W$.

Soit $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ la demi-somme des racines positives dans $\mathrm{X}^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ avec $\mathrm{X}^*(T)$ le groupe des caractères algébriques de T (ρ n'est pas un caractère algébrique de T en général). Pour tout $w \in W$, on a

$$w^{-1}(\rho) + \alpha_w = \left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha \in \Phi^+ \\ w(\alpha) \in \Phi^+}} \alpha - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha \in \Phi^+ \\ w(\alpha) \notin \Phi^+}} \alpha \right) + \sum_{\substack{\alpha \in \Phi^+ \\ w(\alpha) \notin \Phi^+}} \alpha = \rho.$$

Pour tout $\alpha \in \Delta$, on a $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$ d'après [**7**, Chapitre VI, § 1, Proposition 29], donc $\langle \theta - \rho, \alpha^\vee \rangle = 0$. On en déduit que $\theta - \rho$ est invariant sous l'action de W, d'où

$$w^{-1}(\theta) + \alpha_w = w^{-1}(\theta - \rho) + (w^{-1}(\rho) + \alpha_w) = (\theta - \rho) + \rho = \theta$$

pour tout $w \in W$. □

4.3. Variante pour les représentations ordinaires

Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique standard et $L \subset P$ le sous-groupe de Levi standard. Soient σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur A et $\chi : L(F) \to A^\times$ un caractère lisse.

Filtration et calcul du gradué

On commence par montrer que la filtration de Bruhat de $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi$ définie dans la section 2.3 induit une filtration des parties ordinaires dérivées de $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi$ et on calcule son gradué.

Proposition 4.3.1. — *La filtration de Bruhat* $\mathrm{Fil}_\sigma^\bullet \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi$ *induit des filtrations des* $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{B(F)} \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi$ *par des sous-$T(F)$-représentations*

$$\mathrm{Fil}_\sigma^r \mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{B(F)} \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{B(F)} \left(\mathrm{Fil}_\sigma^r \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi\right)$$

pour tout $r \in \llbracket -1, \dim N \rrbracket$ *et si* $r \geq 0$, *alors on a des isomorphismes $T(F)$-équivariants*

$$\mathrm{Gr}_\sigma^r \mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{B(F)} \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi \cong \bigoplus_{\ell(\widehat{w}_\sigma)=r} \mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{B(F)} \left(\mathcal{C}_c^\infty(N_{\widehat{w}_\sigma}(F), \chi)\right).$$

Démonstration. — On reprend les notations de la preuve de la proposition 2.3.9. Il faut montrer que pour tout $r \in \llbracket 0, \dim N \rrbracket$, la suite exacte (2.3.14) induit des suites exactes courtes de représentations lisses de $T(F)$ sur A

$$0 \to \mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{B(F)}(I^\sigma_{r-1}) \to \mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{B(F)}(I^\sigma_r) \to \bigoplus_{\ell(\widehat{w}_\sigma)=r} \mathrm{H}^\bullet\mathrm{Ord}_{B(F)}(\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(N_{\widehat{w}_\sigma}(F), \chi)) \to 0.$$

Soit $r \in \llbracket 0, \dim N \rrbracket$. On fixe un sous-groupe ouvert compact standard $N_{P,0} \subset N_P(F)$. On procède comme dans la preuve de la proposition 4.1.1. En utilisant le lemme 2.1.4 et la proposition 2.1.3 avec $H = B(F)$ et P^- au lieu de B^-, on voit que pour tout sous-groupe parabolique standard $Q' \subset L$, la suite exacte (2.3.10) induit des suites exactes courtes de représentations lisses de T^+ sur A

$$0 \to \mathrm{H}^\bullet(N_0, I^{BQ'}_{r-1}) \to \mathrm{H}^\bullet(N_0, I^{BQ'}_r) \to \bigoplus_{\ell(\widehat{w}_{BQ'})=r} \mathrm{H}^\bullet(N_0, \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(N_{\widehat{w}_{BQ'}}(F), \chi)) \to 0.$$

De plus pour tous sous-groupes paraboliques standards $Q'_1 \subset Q'_2 \subset L$, le diagramme commutatif (2.3.12) induit des diagrammes commutatifs de représentations lisses de T^+ sur A

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^\bullet(N_0, I^{BQ'_1}_{r-1}) \arrow[r] & \mathrm{H}^\bullet(N_0, I^{BQ'_1}_r) \arrow[r] & \bigoplus_{\ell(\widehat{w}_{BQ'_1})=r} \mathrm{H}^\bullet(N_0, \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(N_{\widehat{w}_{BQ'_1}}(F), \chi)) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^\bullet(N_0, I^{BQ'_2}_{r-1}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathrm{H}^\bullet(N_0, I^{BQ'_2}_r) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \bigoplus_{\ell(\widehat{w}_{BQ'_2})=r} \mathrm{H}^\bullet(N_0, \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(N_{\widehat{w}_{BQ'_2}}(F), \chi)) \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

(l'injectivité du morphisme vertical de droite est immédiate, donc par une chasse au diagramme on voit que si celui de gauche est injectif, alors celui du milieu l'est aussi et on conclut en procédant par récurrence sur $r \in \llbracket -1, \dim N \rrbracket$, le cas $r = -1$ étant trivial) ; par la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte

$$0 \to I^{BQ'_2}_r \to I^{BQ'_1}_r \to I^{BQ'_1}_r / I^{BQ'_2}_r \to 0,$$

on en déduit que l'on a des suites exactes courtes de représentations lisses de T^+ sur A

$$0 \to \mathrm{H}^\bullet(N_0, I^{BQ'_2}_r) \to \mathrm{H}^\bullet(N_0, I^{BQ'_1}_r) \to \mathrm{H}^\bullet(N_0, I^{BQ'_1}_r / I^{BQ'_2}_r) \to 0.$$

En particulier, l'isomorphisme (2.3.13) induit des isomorphismes T^+-équivariants

$$\mathrm{H}^\bullet(N_0, \mathrm{Ind}^{G(F)}_{P^-(F)} \sigma \otimes \chi) \cong \frac{\mathrm{H}^\bullet(N_0, \mathrm{Ind}^{G(F)}_{(BQ)^-(F)} \chi)}{\sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} \mathrm{H}^\bullet(N_0, \mathrm{Ind}^{G(F)}_{(BQ')^-(F)} \chi)}.$$

On en déduit que l'on a des suites exactes courtes de représentations lisses de T^+ sur A

$$0 \to \mathrm{H}^\bullet(N_0, I^\sigma_{r-1}) \to \mathrm{H}^\bullet(N_0, I^\sigma_r) \to \bigoplus_{\ell(\widehat{w}_\sigma)=r} \mathrm{H}^\bullet(N_0, \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(N_{\widehat{w}_\sigma}(F), \chi)) \to 0.$$

Comme $\mathrm{Ind}^{G(F)}_{(BQ)^-(F)} \chi$ est admissible, on déduit du théorème 1.2.2 que ces suites exactes sont dans la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.fin}}_{Z_L^+}(A)$. En utilisant le lemme 1.2.1, on en conclut que l'on obtient bien des suites exactes en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{A[T^+]}(A[T(F)], -)_{T(F)\text{-fin}}$. $\square$

Calculs sur une représentation ordinaire

On calcule maintenant les parties ordinaires dérivées d'une représentation ordinaire de $G(F)$ sur A et on explicite ce calcul en degrés 0 et 1. Pour tout $\widehat{w}_\sigma \in \widehat{W}_\sigma$, on rappelle que $\alpha_{\widehat{w}_\sigma}$ est le caractère algébrique de la représentation adjointe de T sur $\det_F \operatorname{Lie}(N_{w_0 \widehat{w}_\sigma})$.

Théorème 4.3.2. — *Soient $\chi : L(F) \to A^\times$ un caractère lisse et σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme $T(F)$-équivariant*

$$\mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)}\left(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi\right) \cong \bigoplus_{[F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(\widehat{w}_\sigma)=n} \widehat{w}_\sigma^{-1}(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha_{\widehat{w}_\sigma}).$$

Démonstration. — Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la proposition 4.3.1 et l'isomorphisme (4.2.7) avec $U = \chi$ et $w = \widehat{w}_\sigma$ pour tout $\widehat{w}_\sigma \in \widehat{W}_\sigma$ (on a $U^w = \widehat{w}_\sigma^{-1}(\chi)$ par définition), on voit que le gradué $\mathrm{Gr}_\sigma^\bullet \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)}(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi)$ est concentré en degré $n/[F:\mathbb{Q}_p]$ (en particulier il est nul si $[F:\mathbb{Q}_p] \nmid n$). Ainsi la filtration $\mathrm{Fil}_\sigma^\bullet \mathrm{H}^n\mathrm{Ord}_{B(F)}(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi)$ est triviale et on obtient l'isomorphisme de l'énoncé. $\square$

Corollaire 4.3.3. — *Soient $\chi : L(F) \to A^\times$ un caractère lisse et σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur A. On a un isomorphisme $T(F)$-équivariant*

$$\mathrm{Ord}_{B(F)}\left(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi\right) \cong \begin{cases} \chi & \text{si } \sigma = \mathrm{St}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — Soit $Q \subset L$ le sous-groupe parabolique correspondant à σ. On utilise le théorème 4.3.2 avec $n = 0$. La somme directe de l'isomorphisme est nulle sauf si $1 \in \widehat{W}_\sigma$, auquel cas $1 \in \widehat{W}_{BQ}$ (car $\widehat{W}_\sigma \subset \widehat{W}_{BQ}$) donc $Q = B_L$ d'où $\sigma = \mathrm{St}$ et on obtient l'isomorphisme de l'énoncé car 1 est l'unique élément de longueur 0 de $\widehat{W}_{\mathrm{St}}$. $\square$

Corollaire 4.3.4. — *Soient $\chi : L(F) \to A^\times$ un caractère lisse et σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur A.*

(i) *Si $F = \mathbb{Q}_p$, alors on a un isomorphisme $T(\mathbb{Q}_p)$-équivariant*

$$\mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{B(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \sigma \otimes \chi\right) \cong \begin{cases} \bigoplus_{\alpha \in \Delta - \Delta_L} s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha) & \text{si } \sigma = \mathrm{St}, \\ \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha) & \text{si } \sigma = \mathrm{Sp}_\alpha \text{ avec } \alpha \in \Delta_L, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) *Si $F \neq \mathbb{Q}_p$, alors $\mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{B(F)}(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi) = 0$.*

Démonstration. — Soit $Q \subset L$ le sous-groupe parabolique correspondant à σ. On utilise le théorème 4.3.2 avec $n = 1$. La somme directe de l'isomorphisme est nulle sauf si $F = \mathbb{Q}_p$ et s'il existe $\alpha \in \Delta$ tel que $s_\alpha \in \widehat{W}_\sigma$. Dans ce cas $s_\alpha \in \widehat{W}_{BQ}$ (car $\widehat{W}_\sigma \subset \widehat{W}_{BQ}$) et ou bien $\alpha \in \Delta - \Delta_L$ donc $Q = B_L$ d'où $\sigma = \mathrm{St}$, ou bien $\alpha \in \Delta_L$ donc $Q = Q_\alpha$ d'où $\sigma = \mathrm{Sp}_\alpha$. On obtient les isomorphismes de l'énoncé car d'une part les éléments de longueur 1 de $\widehat{W}_{\mathrm{St}}$ sont exactement les s_α avec $\alpha \in \Delta - \Delta_L$ et d'autre part si $\alpha \in \Delta_L$, alors s_α est l'unique élément de longueur 1 de $\widehat{W}_{\mathrm{Sp}_\alpha}$ et $s_\alpha(\chi) = \chi$. $\square$

CHAPITRE 5

QUELQUES RÉSULTATS INTERMÉDIAIRES

Nous donnons quelques résultats sur les caractères de $T(F)$. Puis, nous montrons l'existence d'extensions non scindées entre certaines séries principales de $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ avec $\alpha \in \Delta$. Enfin, nous prouvons un résultat de compatibilité entre les calculs de parties ordinaires dérivées de la section 4.2 en degrés 0 et 1 et le foncteur $\mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ avec $\alpha \in \Delta$.

5.1. Sur les caractères de $T(F)$

On définit et on étudie des notions de généricité pour les caractères de $T(F)$, puis on calcule les extensions entre ces derniers.

Généricité

Soit χ un caractère de $T(F)$ à valeurs dans le groupe des unités d'un anneau quelconque. Si $w \in W$, alors on définit un caractère $w(\chi)$ de $T(F)$ par $w(\chi)(t) = \chi(\dot{w}^{-1} t \dot{w})$ pour tout $t \in T(F)$.

Définition 5.1.1. — On dit que χ est :

- *faiblement générique* si $s_\alpha(\chi) \neq \chi$ pour tout $\alpha \in \Delta$;
- *fortement générique* si $w(\chi) \neq \chi$ pour tout $w \in W - \{1\}$.

Lemme 5.1.2. — *On suppose le centre de G connexe. Soient $\alpha \in \Delta$ et $s_1, \dots, s_n \in W$ des réflexions simples avec $n \in \mathbb{N}$. Si $\chi \circ \alpha^\vee \neq 1$ et $s_k \neq s_\alpha$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, alors $s_\alpha(\chi) \neq s_1 \dots s_n(\chi)$.*

Démonstration. — Soit $w \in W$ l'élément $s_n \dots s_1 s_\alpha$ (l'écriture $w = s_n \dots s_1 s_\alpha$ n'est pas nécessairement une décomposition réduite). Pour tout cocaractère algébrique λ de T, on a

$$(\chi \cdot w(\chi)^{-1}) \circ \lambda = \chi \circ (\lambda - w^{-1}(\lambda)) = \chi \circ \left((\lambda - s_\alpha(\lambda)) + \sum_{k=1}^{n} s_\alpha s_1 \dots s_{k-1}(\lambda - s_k(\lambda)) \right).$$

Avec $\lambda = \lambda_\alpha$ un copoids fondamental correspondant à α, on a $\lambda_\alpha - s_\alpha(\lambda_\alpha) = \alpha^\vee$ et $\lambda_\alpha - s_\beta(\lambda_\alpha) = 0$ pour tout $\beta \in \Delta - \{\alpha\}$. Si $s_k \neq s_\alpha$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, alors on en déduit que

$$(\chi \cdot w(\chi)^{-1}) \circ \lambda_\alpha = \chi \circ \alpha^\vee.$$

Si de plus $\chi \circ \alpha^\vee \neq 1$, alors on en conclut que $w(\chi) \neq \chi$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 5.1.3. — On étudie ces notions de généricité dans les points ci-dessous. En particulier, on les compare à [**12**, Définition 3.3.1].

(i) Soit $\alpha \in \Phi^+$. Si $s_\alpha(\chi) \neq \chi$, alors $\chi \circ \alpha^\vee \neq 1$ (la contraposée résulte de [**1**, Proposition 3.3]). La réciproque est vraie lorsque le centre de G est connexe (auquel cas elle se déduit du lemme 5.1.2 avec $n = 0$), mais fausse en général (voir l'exemple 5.1.4 ci-dessous).

(ii) On déduit du point (i) que si χ est fortement générique, alors $\chi \circ \alpha^\vee \neq 1$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$. La réciproque est vraie lorsque $G = \mathrm{GL}_n$ ou $G = \mathrm{GSp}_{2n}$ mais fausse en général, même lorsque le centre de G est connexe (voir l'exemple 5.1.5 ci-dessous).

(iii) Soit χ' un caractère de $T(F)$ distinct de χ. Si le centre de G est connexe, alors le lemme 5.1.2 montre que l'on a

$$\mathrm{card}\,\{\alpha \in \Delta \mid \chi' = s_\alpha(\chi)\} \leq 1.$$

En général, ce cardinal peut être arbitrairement grand (voir l'exemple 5.1.6 ci-dessous).

Exemple 5.1.4. — Soient $G = \mathrm{SL}_2$, $B \subset G$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, $T \subset B$ le sous-groupe des matrices diagonales et $\chi : T(F) \to \{\pm 1\}$ le caractère continu défini par

$$\chi\left(\left(\begin{smallmatrix} x & \\ & x^{-1} \end{smallmatrix}\right)\right) = (-1)^{\mathrm{val}_p(x)}.$$

Soit α l'unique racine simple de (G, B, T). Pour tout $x \in F^\times$, on a $(\chi \circ \alpha^\vee)(x) = (-1)^{\mathrm{val}_p(x)}$ et $s_\alpha(\chi)\left(\left(\begin{smallmatrix} x & \\ & x^{-1} \end{smallmatrix}\right)\right) = \chi\left(\left(\begin{smallmatrix} x^{-1} & \\ & x \end{smallmatrix}\right)\right) = \chi\left(\left(\begin{smallmatrix} x & \\ & x^{-1} \end{smallmatrix}\right)\right)$ (car $\mathrm{val}_p(x) = \mathrm{val}_p(x^{-1})$). Ainsi $\chi \circ \alpha^\vee \neq 1$ mais $s_\alpha(\chi) = \chi$.

Exemple 5.1.5. — Soient $G = \mathrm{G}_2$ et $\chi : T(F) \cong (F^\times)^2 \to \{\pm 1\}$ le caractère continu défini par

$$\chi(x, y) = (-1)^{\mathrm{val}_p(x)} (-1)^{\left(\frac{\omega(y)}{p}\right)}$$

avec $\left(\frac{-}{p}\right)$ le symbole de Legendre (c'est-à-dire le résidu quadratique modulo p). Si $p \neq 2$, alors $\chi \circ \alpha^\vee \neq 1$ pour tout $\alpha \in \Delta$ (car G_2 est simplement connexe), mais $w_0(t) = t^{-1}$ pour tout $t \in T(F)$, donc $w_0(\chi) = \chi$ (car $\mathrm{val}_p(x) = \mathrm{val}_p(x^{-1})$ et $\left(\frac{\omega(y)}{p}\right) = \left(\frac{\omega(y^{-1})}{p}\right)$ pour tous $x, y \in F^\times$).

Exemple 5.1.6. — Soient $n \in \mathbb{N}$, $G = \mathrm{GL}_2^n \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} (\mathrm{GL}_2^{k-1} \times \mathrm{SL}_4 \times \mathrm{GL}_2^{n-(k+1)}) \subset \mathrm{GL}_{2n}$, $B \subset G$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, $T \subset B$ le sous-groupe des matrices diagonales et $\chi : T(F) \to \{\pm 1\}$ le caractère continu défini par

$$\chi(\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_{2n})) = (-1)^{\mathrm{val}_p(t_1 t_3 \dots t_{2n-1})}.$$

Soit $\alpha \in \Delta$. On a $s_\alpha(\chi) \neq \chi$ et $s_\alpha(\chi) = s_\beta(\chi)$ pour tout $\beta \in \Delta$, d'où

$$\mathrm{card}\,\{\beta \in \Delta \mid s_\alpha(\chi) = s_\beta(\chi)\} = n.$$

Extensions

On calcule tout d'abord les extensions entre caractères lisses de $T(F)$.

Proposition 5.1.7. — *Soit $\chi : T(F) \to k_E^\times$ un caractère lisse.*

(i) *Si $\chi' : T(F) \to k_E^\times$ est un caractère lisse distinct de χ, alors*

$$\mathrm{Ext}^\bullet_{T(F)}(\chi', \chi) = 0.$$

(ii) *Si F ne contient pas de racine primitive p-ième de l'unité, alors*

$$\dim_{k_E} \mathrm{Ext}^1_{T(F)}(\chi, \chi) = ([F : \mathbb{Q}_p] + 1) \cdot \mathrm{rg}\, G.$$

(iii) *Si F contient une racine primitive p-ième de l'unité, alors*

$$\dim_{k_E} \mathrm{Ext}^1_{T(F)}(\chi, \chi) = ([F : \mathbb{Q}_p] + 2) \cdot \mathrm{rg}\, G.$$

Démonstration. — Le point (i) est une généralisation immédiate de [**20**, Lemme 4.3.10]. Pour les points (ii) et (iii), on utilise les isomorphismes k_E-linéaires suivants

$$\mathrm{Ext}^1_{T(F)}(\chi, \chi) \cong \mathrm{Ext}^1_{T(F)}(\underline{1}, \underline{1}) \cong \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathrm{Grp}}(T(F), k_E)$$

avec $\underline{1}$ la représentation triviale de $T(F)$ sur k_E et $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathrm{Grp}}$ les morphismes de groupes continus. On a des isomorphismes de groupes topologiques

$$T(F) \cong \left(F^\times\right)^{\mathrm{rg}\, G} \quad \text{et} \quad F^\times \cong \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_p^{[F:\mathbb{Q}_p]}$$

avec q le cardinal du corps résiduel de F et r le plus grand entier naturel tel que F contienne une racine primitive p^r-ième de l'unité. Les k_E-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}, k_E)$ et $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}_p, k_E)$ sont de dimension 1. La dimension du k_E-espace vectoriel $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, k_E)$ est 1 si $r > 0$ et 0 sinon. Enfin $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ est d'ordre premier à p, donc $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathrm{Grp}}((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, k_E) = 0$. On obtient ainsi les points (ii) et (iii). □

Remarque 5.1.8. — Pour tout entier $n > 1$, on ne sait pas si l'application canonique

$$\mathrm{Ext}^n_{T(F)}(\underline{1}, \underline{1}) \to \mathrm{H}^n(T(F), \underline{1})$$

est un isomorphisme car $T(F)$ n'est pas compact (voir [**20**, § 2.2]).

On calcule maintenant les extensions entre caractères continus unitaires de $T(F)$.

Proposition 5.1.9. — *Soit $\chi : T(F) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire.*

(i) *Si $\chi' : T(F) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un caractère continu unitaire distinct de χ, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{T(F)}(\chi', \chi) = 0.$$

(ii) *On a*

$$\dim_E \mathrm{Ext}^1_{T(F)}(\chi, \chi) = ([F : \mathbb{Q}_p] + 1) \cdot \mathrm{rg}\, G.$$

Démonstration. — Si $\chi' \neq \chi$, alors il existe $t \in T(F)$ tel que $\chi'(t) \neq \chi(t)$, donc pour toute extension $\mathcal{E}$ de χ' par χ, l'endomorphisme t de $\mathcal{E}$ est diagonalisable (car son polynôme minimal est scindé à racines simples) et comme il commute avec $T(F)$, on obtient ainsi une section de l'extension $\mathcal{E}$, d'où le point (i). Le point (ii) se démontre comme les points (ii) et (iii) de la proposition 5.1.7, sauf que cette fois $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, E) = 0$ quel que soit l'entier naturel r puisque E est sans torsion. □

5.2. Extensions entre séries principales de $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$

On suppose $F = \mathbb{Q}_p$ et on fixe une racine simple $\alpha \in \Delta$. On note $G_\alpha \subset G$ le centralisateur de $\ker \alpha$ (c'est le sous-groupe engendré par T et les sous-groupes radiciels correspondant aux racines $\pm\alpha$). On note $P_\alpha \subset G$ le sous-groupe parabolique BG_α et $N_\alpha \subset P_\alpha$ son radical unipotent. On a un produit semi-direct $P_\alpha = G_\alpha \ltimes N_\alpha$ et $P_\alpha^- = B^- G_\alpha$. On note $B_\alpha \subset G_\alpha$ (resp. $B_\alpha^- \subset G_\alpha$) le sous-groupe de Borel $B \cap G_\alpha$ (resp. $B^- \cap G_\alpha$) et $N_\alpha'' \subset B_\alpha$ son radical unipotent (c'est le sous-groupe radiciel correspondant à α). On a un produit semi-direct $N = N_\alpha'' \ltimes N_\alpha$.

On commence par donner une description explicite de G_α.

Lemme 5.2.1. — *On a un isomorphisme $G_\alpha \cong T' \times H$ avec $T' \subset T$ un sous-tore et $H \in \{\mathrm{SL}_2, \mathrm{GL}_2, \mathrm{PGL}_2\}$.*

Démonstration. — Soient Z_α le centre connexe de G_α (c'est un sous-tore de T) et G_α^{der} le groupe dérivé de G_α. On a la suite exacte courte naturelle (voir [**4**, Proposition 2.2])

$$1 \to Z_\alpha \cap G_\alpha^{\mathrm{der}} \to Z_\alpha \times G_\alpha^{\mathrm{der}} \to G_\alpha \to 1.$$

Comme G_α^{der} est semi-simple de rang 1, il est isomorphe à PGL_2 ou SL_2. Si $G_\alpha^{\mathrm{der}} = \mathrm{PGL}_2$, alors $Z_\alpha \cap G_\alpha^{\mathrm{der}} = 1$, d'où $G_\alpha \cong Z_\alpha \times \mathrm{PGL}_2$. On suppose $G_\alpha^{\mathrm{der}} = \mathrm{SL}_2$, donc $Z_\alpha \cap G_\alpha^{\mathrm{der}}$ est isomorphe à 1 ou μ_2. Si $Z_\alpha \cap G_\alpha^{\mathrm{der}} = 1$, alors $G_\alpha \cong Z_\alpha \times \mathrm{SL}_2$. Sinon $Z_\alpha \cap G_\alpha^{\mathrm{der}} = \mu_2$ et comme Z_α est un tore, il existe un sous-tore $T' \subset Z_\alpha$ et un isomorphisme $Z_\alpha \cong T' \times \mathrm{GL}_1$ tels que l'inclusion $Z_\alpha \cap G_\alpha^{\mathrm{der}} \subset Z_\alpha$ s'identifie à la composée $\mu_2 \hookrightarrow \mathrm{GL}_1 \hookrightarrow T' \times \mathrm{GL}_1$. Dans ce cas, on obtient un isomorphisme $G_\alpha \cong T' \times (\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{SL}_2)/\mu_2 \cong T' \times \mathrm{GL}_2$. □

À présent, on prouve l'existence d'extensions non scindées entre certaines séries principales continues unitaires distinctes de $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur E. Le résultat analogue modulo p se démontre de façon analogue.

Proposition 5.2.2. — *Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire. Si $\chi \neq s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha), \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \neq 0.$$

Démonstration. — On utilise le lemme 5.2.1 : on a $\chi = \chi' \otimes_E \chi_\alpha$ avec χ' et χ_α les restrictions de χ à $T'(\mathbb{Q}_p)$ et $(T \cap H)(\mathbb{Q}_p)$ respectivement. En identifiant α à l'unique racine positive de $(H, B_\alpha \cap H, T \cap H)$, on a $s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) = \chi' \otimes_E (s_\alpha(\chi_\alpha) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha))$. On en déduit des isomorphismes $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$-équivariants

$$\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi \cong \chi' \otimes_E \left(\mathrm{Ind}_{(B_\alpha^- \cap H)(\mathbb{Q}_p)}^{H(\mathbb{Q}_p)} \chi_\alpha\right)$$
$$\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \cong \chi' \otimes_E \left(\mathrm{Ind}_{(B_\alpha^- \cap H)(\mathbb{Q}_p)}^{H(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi_\alpha) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)\right).$$

Ainsi, le produit tensoriel avec χ' sur E induit une injection E-linéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{H(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{(B_\alpha^- \cap H)(\mathbb{Q}_p)}^{H(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi_\alpha) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha), \mathrm{Ind}_{(B_\alpha^- \cap H)(\mathbb{Q}_p)}^{H(\mathbb{Q}_p)} \chi_\alpha\right)$$
$$\hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha), \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi\right)$$

et il suffit de montrer l'existence d'extensions non scindées lorsque $G_\alpha = H$.

On suppose $G_\alpha = \mathrm{GL}_2$ et on note T_2 le sous-groupe des matrices diagonales de GL_2 et B_2^- le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures de GL_2. Dans ce cas [**20**, Conjecture 3.7.2] est vraie (voir [**23**]), ce qui permet (en procédant comme dans la preuve de [**12**, Proposition B.2]) de montrer l'existence d'une extension non scindée

$$0 \to \mathrm{Ind}_{B_2^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi \to \mathcal{E}_2 \to \mathrm{Ind}_{B_2^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \to 0.$$

On suppose $G_\alpha = \mathrm{SL}_2$. Alors χ se prolonge (arbitrairement) en un caractère lisse de $T_2(\mathbb{Q}_p)$ et comme $B_2^-(\mathbb{Q}_p)\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, la restriction des fonctions de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ induit des isomorphismes $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariants

$$\mathrm{Ind}_{B_2^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{(\mathrm{SL}_2\cap B_2^-)(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi$$
$$\mathrm{Ind}_{B_2^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{(\mathrm{SL}_2\cap B_2^-)(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha).$$

Ainsi, il suffit de montrer que la restriction de $\mathcal{E}_2$ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ n'est pas scindée. Par l'absurde, supposons qu'il existe une section $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante

$$\varsigma : \mathrm{Ind}_{B_2^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \to \mathcal{E}_2.$$

Alors pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, la section $g \cdot \varsigma : f \mapsto g\varsigma(g^{-1}f)$ est encore $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante (car $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est distingué dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$). Or, deux telles sections diffèrent par un élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{(\mathrm{SL}_2\cap B_2^-)(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha), \mathrm{Ind}_{(\mathrm{SL}_2\cap B_2^-)(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi\right)$$

qui est nul d'après la proposition 1.2.12 pour le triplet $(\mathrm{SL}_2, \mathrm{SL}_2 \cap B_2, \mathrm{SL}_2 \cap T_2)$ avec B_2 le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de GL_2 (car $\chi \neq s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$ par hypothèse). On en déduit que $g \cdot \varsigma = \varsigma$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, c'est-à-dire que ς est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante, d'où la contradiction.

On suppose $G_\alpha = \mathrm{PGL}_2$ et on note Z_2 le centre de GL_2. Par inflation, on identifie χ à un caractère de $T_2(\mathbb{Q}_p)$ trivial sur $Z_2(\mathbb{Q}_p)$. Alors la composition des fonctions avec la projection $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ induit des isomorphismes $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariants

$$\mathrm{Ind}_{(B_2^-/Z_2)(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{B_2^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi$$
$$\mathrm{Ind}_{(B_2^-/Z_2)(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{B_2^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha).$$

Ainsi, il suffit de montrer que $\mathcal{E}_2$ a un caractère central trivial. Or pour tout $z \in Z_2(\mathbb{Q}_p)$, l'application $\zeta : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ définie par $\zeta(v) = z \cdot v - v$ pour tout $v \in \mathcal{E}_2$ est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante (car z est central) et comme $\mathrm{Ind}_{B_2^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi$ a un caractère central trivial ζ se factorise à travers un élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_2^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha), \mathcal{E}_2\right)$$

qui est nul car $\mathcal{E}_2$ n'est pas scindée et $\chi \neq s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$ par hypothèse, donc z agit trivialement sur $\mathcal{E}_2$. □

Enfin, on montre l'existence d'extensions supplémentaires entre certaines séries principales lisses de $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E dans un cas « dégénéré ».

Proposition 5.2.3. — *Soit* $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to k_E^\times$ *un caractère lisse. Si* $\chi \circ \alpha^\vee = 1$ *et* $\omega \circ \alpha = 1$, *alors le foncteur* $\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ *induit une injection* k_E*-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi,\chi) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi, \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi\right)$$

dont le conoyau est de dimension 1.

Remarque 5.2.4. — On a $\omega \circ \alpha = 1$ si et seulement si ou bien $p = 2$, ou bien $p = 3$ et G_α est isomorphe au produit direct d'un tore et de SL_2. Dans ces cas-là, lorsque de plus $\chi \circ \alpha^\vee = 1$ (auquel cas on identifie χ à un caractère de $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$, voir [**1**, Proposition 3.3]), la preuve montre que le conoyau de l'injection de l'énoncé est engendré par la classe d'une extension provenant de l'unique extension non scindée de $\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi$ par χ (voir l'isomorphisme (5.2.8) ci-dessous).

Démonstration. — On suppose seulement $\chi \circ \alpha^\vee = 1$. Dans ce cas, on a une suite exacte courte de représentations lisses de $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E

$$0 \to \chi \to \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi \to \mathrm{St}\otimes\chi \to 0$$

qui n'est pas scindée, d'où une suite exacte de k_E-espaces vectoriels

$$\begin{aligned}(5.2.5)\quad 0 \to \mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi, \chi\right) &\to \mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi, \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi\right)\\ &\to \mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi, \mathrm{St}\otimes\chi\right).\end{aligned}$$

En utilisant les corollaires 4.3.3 et 4.3.4 avec $G = P = L = G_\alpha$ et $\sigma = \mathrm{St}$, la suite exacte (1.2.10) pour le triplet (G_α, B_α, T) avec $A = k_E$, $U = \chi$ et $V = \mathrm{St}\otimes\chi$ donne un isomorphisme k_E-linéaire

$$(5.2.6)\qquad \mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi,\chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi, \mathrm{St}\otimes\chi\right)$$

qui est induit par le foncteur $\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ et la projection $\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi \twoheadrightarrow \mathrm{St}\otimes\chi$.

En utilisant les corollaires 4.3.3 et 4.3.4 avec $G = P = L = G_\alpha$ et $\sigma = \mathrm{Sp}_\alpha = \underline{1}$ (la représentation triviale de $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E), la suite exacte (1.2.10) pour le triplet (G_α, B_α, T) avec $A = k_E$, $U = \chi\cdot(\omega^{-1}\circ\alpha)$ et $V = \chi$ donne une injection k_E-linéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi\cdot(\omega^{-1}\circ\alpha), \chi\right) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}\left(\chi\cdot(\omega^{-1}\circ\alpha), \chi\cdot(\omega^{-1}\circ\alpha)\right).$$

On en déduit que la dimension de la source est au plus 1. On procède comme dans la preuve de la proposition 5.2.2 pour montrer qu'elle n'est pas nulle. On se ramène à $G_\alpha \in \{\mathrm{SL}_2, \mathrm{GL}_2, \mathrm{PGL}_2\}$, puis on procède cas par cas : si $G_\alpha = \mathrm{GL}_2$, alors d'après [**20**, Proposition 4.3.13] il existe une telle extension $\mathcal{E}_2$ non scindée ; si $G_\alpha = \mathrm{SL}_2$, alors on montre de la même façon que la restriction de $\mathcal{E}_2$ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ n'est pas scindée ; si $G_\alpha = \mathrm{PGL}_2$, alors on montre de la même façon que $\mathcal{E}_2$ a un caractère central trivial. On obtient ainsi

$$(5.2.7)\qquad \dim_{k_E}\mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi\cdot(\omega^{-1}\circ\alpha), \chi\right) = 1.$$

À présent, on suppose $\omega \circ \alpha = 1$ et on démontre la proposition. L'isomorphisme (5.2.6) montre que le second morphisme non trivial de la suite exacte (5.2.5) admet une section (l'inverse de l'isomorphisme (5.2.6) suivi du morphisme induit par le foncteur $\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$). On en déduit un isomorphisme k_E-linéaire

$$\begin{multline}\tag{5.2.8} \mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi,\chi) \oplus \mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi,\chi\right) \\ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi, \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi\right)\end{multline}$$

et on conclut grâce à l'égalité (5.2.7) avec $\omega^{-1} \circ \alpha = 1$. $\square$

5.3. Compatibilité avec le foncteur $\mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$

On suppose toujours $F = \mathbb{Q}_p$ et on garde les notations précédentes : α, G_α, P_α, P_α^-, B_α, B_α^-, N_α, N''_α. Soient U et V des représentations lisses localement admissibles de $T(\mathbb{Q}_p)$ sur A. D'après la proposition 1.2.6 pour les triplets (G,B,T) et (G_α,B_α,T), on a des isomorphismes naturels $T(\mathbb{Q}_p)$-équivariants

$$\mathrm{Ord}_{B(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U\right) \cong U \tag{5.3.1}$$

$$\mathrm{Ord}_{B_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U\right) \cong U. \tag{5.3.2}$$

et d'après le corollaire 4.2.9 pour les triplets (G,B,T) et (G_α,B_α,T), on a des isomorphismes naturels $T(\mathbb{Q}_p)$-équivariants

$$\mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{B(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right) \cong \bigoplus_{\beta\in\Delta} V^\beta \otimes (\omega^{-1}\circ\beta) \tag{5.3.3}$$

$$\mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{B_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V\right) \cong V^\alpha \otimes (\omega^{-1}\circ\alpha). \tag{5.3.4}$$

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant.

Proposition 5.3.5. — *On a un diagramme commutatif de A-modules*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right) & \longrightarrow & \bigoplus_{\beta\in\Delta} \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}\left(U, V^\beta\otimes(\omega^{-1}\circ\beta)\right) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U, \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}\left(U, V^\alpha\otimes(\omega^{-1}\circ\alpha)\right) \end{array}$$

où les morphismes horizontaux sont donnés par le second morphisme non trivial de la suite exacte (1.2.10) *pour les triplets* (G,B,T) *et* (G_α,B_α,T) *en utilisant les isomorphismes* (5.3.3) *et* (5.3.4)*, l'injection verticale de gauche est induite par le foncteur* $\mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ *et le morphisme vertical de droite est l'injection naturelle.*

On fixe un sous-groupe ouvert compact standard $N_0 \subset N(\mathbb{Q}_p)$. On note $N_{\alpha,0}$ l'intersection de $N_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ avec N_0 et $N''_{\alpha,0}$ l'image de N_0 dans $N''_\alpha(\mathbb{Q}_p)$. On a une suite exacte courte de groupes topologiques

$$1 \to N_{\alpha,0} \to N_0 \to N''_{\alpha,0} \to 1.$$

On utilise les résultats de la section 3.2 pour calculer la cohomologie de N_0 et l'action de Hecke de T^+ à travers ce dévissage de N_0.

Dans les lemmes ci-dessous, on utilise implicitement le lemme 1.2.1 et le théorème 1.2.2 pour les triplets (G, B, T) et (G_α, B_α, T). Étant donné un morphisme de représentations lisses de T^+ sur A, on appelle « localisé en T^+ » son image par le foncteur $A[T(\mathbb{Q}_p)] \otimes_{A[T^+]} (-)$.

Lemme 5.3.6. — *On a une injection naturelle T^+-équivariante*

$$\mathrm{H}^0\left(N''_{\alpha,0}, \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U\right) \hookrightarrow \mathrm{H}^0\left(N_0, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U\right)$$

dont le localisé en T^+, à travers les isomorphismes (5.3.1) *et* (5.3.2), *est l'identité sur U.*

Démonstration. — En utilisant l'injection (1.2.7) pour le triplet (G, P_α, G_α) et l'isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \cong \mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$, on voit que l'on a une injection naturelle $T^+ \ltimes N''_{\alpha,0}$-équivariante

$$\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U \hookrightarrow \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U\right)^{N_{\alpha,0}} \tag{5.3.7}$$

et en prenant les $N''_{\alpha,0}$-invariants, on obtient l'injection naturelle T^+-équivariante de l'énoncé. Elle s'insère dans un diagramme commutatif de représentations lisses de T^+ sur A

$$\begin{tikzcd}
\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U\right)^{N''_{\alpha,0}} \arrow[r, hook] & \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U\right)^{N_0} \\
U \arrow[u, hook] \arrow[r, equal] & U \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

où les injections verticales correspondent à l'injection (1.2.7) de la proposition 1.2.6 pour les triplets (G, B, T) et (G_α, B_α, T). En utilisant cette proposition, on en déduit que l'injection construite vérifie bien la propriété de l'énoncé. □

Lemme 5.3.8. — *On a un morphisme naturel T^+-équivariant*

$$\mathrm{H}^1\left(N''_{\alpha,0}, \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V\right) \to \mathrm{H}^1\left(N_0, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right)$$

dont le localisé en T^+, à travers les isomorphismes (5.3.3) *et* (5.3.4), *est l'injection naturelle*

$$V^\alpha \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha) \hookrightarrow \bigoplus_{\beta \in \Delta} V^\beta \otimes (\omega^{-1} \circ \beta).$$

Remarque 5.3.9. — On peut montrer que le morphisme de l'énoncé est injectif (mais ce ne sera pas nécessaire pour la suite).

Démonstration. — Soit $I_\alpha \subset \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V$ la sous-$P_\alpha(\mathbb{Q}_p)$-représentation constituée des fonctions à support dans l'ouvert

$$P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)P_\alpha(\mathbb{Q}_p) = B^-(\mathbb{Q}_p)B(\mathbb{Q}_p) \amalg B^-(\mathbb{Q}_p)\dot{s}_\alpha B(\mathbb{Q}_p).$$

L'injection (5.3.7) avec V au lieu de U se factorise à travers $I_\alpha^{N_{\alpha,0}}$ et on a un diagramme commutatif de représentations lisses de $T^+ \ltimes N''_{\alpha,0}$ sur A

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & I_\alpha^{N_{\alpha,0}} \arrow[d, two heads] \\ V^\alpha \arrow[r, hook] & \mathcal{C}_c^\infty(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), V)^{N_{\alpha,0}} \end{tikzcd}$$

où le morphisme horizontal du bas est défini par $v \mapsto 1_{N_{\alpha,0}} v$ avec $1_{N_{\alpha,0}}$ la fonction caractéristique de $N_{\alpha,0}$ sur $N_\alpha(\mathbb{Q}_p)$, le morphisme vertical de gauche est induit par l'évaluation en $\dot{s}_\alpha$ et le morphisme vertical de droite est induit par la restriction à $B^-(\mathbb{Q}_p)\dot{s}_\alpha B(\mathbb{Q}_p)$. En appliquant le foncteur $\mathrm{H}^1(N''_{\alpha,0}, -)$ et en utilisant l'isomorphisme T^+-équivariant

$$\mathrm{H}^1(N''_{\alpha,0}, V^\alpha) \cong V^\alpha \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha)$$

donné par la proposition 3.1.5 avec $n = 1$ $(= \dim_{\mathbb{Q}_p} N''_{\alpha,0})$, $\widetilde{L}^+ = T^+$, $\widetilde{N}_0 = N''_{\alpha,0}$ et V^α au lieu de V, on obtient un diagramme commutatif de représentations lisses de T^+ sur A

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^1\left(N''_{\alpha,0}, \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1\left(N''_{\alpha,0}, I_\alpha^{N_{\alpha,0}}\right) \arrow[d] \\ V^\alpha \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha) \arrow[r] & \mathrm{H}^1\left(N''_{\alpha,0}, \mathcal{C}_c^\infty(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), V)^{N_{\alpha,0}}\right). \end{tikzcd}$$

Le localisé en T^+ du morphisme vertical de gauche est l'isomorphisme (5.3.4) et le localisé en T^+ de la composée

$$V^\alpha \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha) \to \mathrm{H}^1\left(N''_{\alpha,0}, \mathcal{C}_c^\infty(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), V)^{N_{\alpha,0}}\right) \to \mathrm{H}^1\left(N_0, \mathcal{C}_c^\infty(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), V)\right)$$

du morphisme horizontal du bas et du morphisme d'inflation est l'isomorphisme (4.2.7) avec $n = 1$ et $w = s_\alpha$. En utilisant la commutativité du diagramme et la naturalité du morphisme d'inflation, on en déduit que la composée

$$\mathrm{H}^1\left(N''_{\alpha,0}, \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V\right) \to \mathrm{H}^1\left(N''_{\alpha,0}, \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right)^{N_{\alpha,0}}\right) \to \mathrm{H}^1\left(N_0, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right)$$

du morphisme induit par l'injection (5.3.7) avec V au lieu de U et du morphisme d'inflation vérifie bien la propriété de l'énoncé. □

Démonstration de la proposition 5.3.5. — On remarque que le morphisme vertical de gauche du diagramme de l'énoncé est bien injectif car le foncteur exact $\mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ admet un quasi-inverse à gauche (voir la proposition 1.2.6 pour le triplet (G, P_α, G_α)).

Soit $\mathcal{E}_\alpha$ une extension entre représentations lisses de $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur A

$$0 \to \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V \to \mathcal{E}_\alpha \to \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U \to 0.$$

En appliquant le foncteur exact $\mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$, on obtient une extension entre représentations lisses de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur A

$$0 \to \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V \to \mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{E}_\alpha \to \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U \to 0. \tag{5.3.10}$$

En prenant les $N_{\alpha,0}$-invariants, on obtient une suite exacte de représentations lisses de $T^+ \ltimes N''_{\alpha,0}$ sur A

$$0 \to \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right)^{N_{\alpha,0}} \to \left(\mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{E}_\alpha\right)^{N_{\alpha,0}} \to \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U\right)^{N_{\alpha,0}}$$

et on note $I \subset (\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U)^{N_{\alpha,0}}$ l'image du dernier morphisme. En utilisant l'injection (1.2.7) pour le triplet (G, P_α, G_α), on en déduit un diagramme commutatif de représentations lisses de $T^+ \ltimes N''_{\alpha,0}$ sur A

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right)^{N_{\alpha,0}} & \longrightarrow & \left(\mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{E}_\alpha\right)^{N_{\alpha,0}} & \longrightarrow & I & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V & \longrightarrow & \mathcal{E}_\alpha & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes. En prenant la cohomologie de $N''_{\alpha,0}$ à valeurs dans ces suites exactes courtes, on obtient un diagramme commutatif de représentations lisses de T^+ sur A

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0\left(N''_{\alpha,0}, I\right) \arrow[r, "\delta'_\alpha"] & \mathrm{H}^1\left(N''_{\alpha,0}, \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right)^{N_{\alpha,0}}\right) \\
\mathrm{H}^0\left(N''_{\alpha,0}, \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U\right) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\delta_\alpha"] & \mathrm{H}^1\left(N''_{\alpha,0}, \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V\right). \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{5.3.11}$$

Par ailleurs, on a un diagramme commutatif de représentations lisses de T^+ sur A

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0\left(N_0, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U\right) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^1\left(N_0, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right) \\
\mathrm{H}^0\left(N''_{\alpha,0}, I\right) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\delta'_\alpha"] & \mathrm{H}^1\left(N''_{\alpha,0}, \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right)^{N_{\alpha,0}}\right) \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{5.3.12}$$

où l'injection verticale de gauche est induite par l'inclusion $I \subset \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U$, le morphisme vertical de droite est l'inflation et δ est le morphisme obtenu par la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte (5.3.10).

En combinant les diagrammes (5.3.11) et (5.3.12), on obtient un diagramme commutatif de représentations lisses de T^+ sur A

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0\left(N_0, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U\right) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^1\left(N_0, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right) \\
\mathrm{H}^0\left(N''_{\alpha,0}, \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U\right) \arrow[r, "\delta_\alpha"] \arrow[u, hook] & \mathrm{H}^1\left(N''_{\alpha,0}, \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V\right) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où l'injection verticale de gauche est celle du lemme 5.3.6 et le morphisme vertical de droite est celui du lemme 5.3.8. En utilisant ces deux lemmes, on voit qu'à travers les isomorphismes (5.3.1), (5.3.2), (5.3.3) et (5.3.4), le localisé en T^+ de ce diagramme est un diagramme commutatif de représentations lisses de $T(\mathbb{Q}_p)$ sur A

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\widetilde{\delta}"] \arrow[d, equal] & \bigoplus_{\beta\in\Delta} V^\beta \otimes (\omega^{-1}\circ\beta) \\
U \arrow[r, "\widetilde{\delta}_\alpha"] & V^\alpha \otimes (\omega^{-1}\circ\alpha) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

où le morphisme vertical de droite est l'injection naturelle. Enfin, $\widetilde{\delta}$ (resp. $\widetilde{\delta}_\alpha$) est l'image de la classe de l'extension $\mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{E}_\alpha$ (resp. $\mathcal{E}_\alpha$) par le morphisme horizontal supérieur (resp. inférieur) du diagramme de l'énoncé. $\square$

CHAPITRE 6

APPPLICATION AUX EXTENSIONS

Nous calculons les extensions entre séries principales de $G(F)$. Puis, nous calculons les extensions d'une série principale de $G(F)$ par une représentation ordinaire de $G(F)$. Enfin, en supposant vraie une conjecture d'Emerton, nous calculons les extensions de longueur supérieure entre séries principales modulo p de $G(F)$.

6.1. Extensions entre séries principales

On calcule les extensions entre séries principales continues unitaires de $G(F)$ sur E. Les démonstrations prouvent également les résultats analogues modulo p. On traite séparément les cas $F = \mathbb{Q}_p$ et $F \neq \mathbb{Q}_p$.

Résultats dans le cas $F = \mathbb{Q}_p$

Théorème 6.1.1. — *Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire.*

(i) *Si $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un caractère continu unitaire distinct de χ, alors*

$$\dim_E \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) = \mathrm{card}\left\{\alpha \in \Delta \mid \chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)\right\}.$$

(ii) *Si $\chi \neq s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta$, alors le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme E-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right).$$

Remarque 6.1.2. — La dimension du point (i) peut être arbitrairement grande (voir l'exemple 5.1.6 en remplaçant χ par $\chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)$ et en utilisant le fait que $s_\alpha(\theta) + \alpha = \theta$ d'après la preuve du corollaire 4.2.12). On s'attend à ce que le point (ii) du théorème soit vrai pour *tout* caractère continu unitaire $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ (voir la remarque 6.1.8 pour son analogue modulo p). On voit dans la preuve que le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit une injection E-linéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi, \chi) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right)$$

dont le conoyau est de dimension au plus

$$\mathrm{card}\left\{\alpha \in \Delta \mid \chi = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)\right\}.$$

Démonstration. — Soient $\chi, \chi' : T(\mathbb{Q}_p) \to A^\times$ des caractères lisses. En utilisant les isomorphismes (5.3.1) et (5.3.3), la suite exacte (1.2.10) pour le triplet (G, B, T) avec $U = \chi'$ et $V = \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi$ devient

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi', \chi) \to \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \to \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}\left(\chi', s_\alpha(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\alpha)\right). \tag{6.1.3}$$

De même pour tout $\alpha \in \Delta$, en utilisant les isomorphismes (5.3.2) et (5.3.4), la suite exacte (1.2.10) pour le triplet (G_α, B_α, T) avec $U = \chi'$ et $V = \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi$ devient

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi', \chi) \to \mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \to \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}\left(\chi', s_\alpha(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\alpha)\right). \tag{6.1.4}$$

On suppose $A = k_E$ et on prouve la version modulo p du théorème. On pose

$$\Delta' \overset{\text{déf}}{=} \left\{\alpha \in \Delta \mid \chi' = s_\alpha(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\alpha)\right\}.$$

On suppose tout d'abord $\chi' \neq \chi$ et on utilise le point (i) de la proposition 5.1.7. D'une part, la suite exacte (6.1.3) donne une injection k_E-linéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \hookrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}\left(\chi', s_\alpha(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\alpha)\right), \tag{6.1.5}$$

d'où

$$\dim_{k_E} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \leq \mathrm{card}\,\Delta'.$$

D'autre part pour tout $\alpha \in \Delta$, la suite exacte (6.1.4) donne une injection k_E-linéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}\left(\chi', s_\alpha(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\alpha)\right). \tag{6.1.6}$$

Pour tout $\alpha \in \Delta'$, l'analogue modulo p de la proposition 5.2.2 donne une extension non scindée

$$0 \to \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi \to \mathcal{E}_\alpha \to \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi' \to 0.$$

En utilisant l'injection (6.1.6) et la proposition 5.3.5 avec $U = \chi'$ et $V = \chi$, on en déduit que les classes des extensions $(\mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Delta'}$ sont linéairement indépendantes dans le k_E-espace vectoriel

$$\mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right)$$

car leurs images par l'injection (6.1.5) appartiennent à des facteurs directs distincts, d'où

$$\dim_{k_E} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \geq \mathrm{card}\,\Delta'.$$

On obtient ainsi le point (i) modulo p. Si $\chi \neq s_\alpha(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta$, alors la suite exacte (6.1.3) donne un isomorphisme k_E-linéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right),$$

d'où le point (ii) modulo p.

On prouve maintenant le théorème. Soient $\chi, \chi' : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ des caractères continus unitaires. Pour $k \geq 1$ entier, les suites exactes (6.1.3) et (6.1.4) et le diagramme de la proposition 5.3.5 avec $A = \mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E$ et les réductions modulo ϖ_E^k des caractères χ et χ' forment des systèmes projectifs. On passe à la limite projective puis on tensorise par E sur $\mathcal{O}_E$ en utilisant les isomorphismes (1.2.11), (1.1.2) et la proposition 1.1.3. On utilise le point (i) de la proposition 5.1.9 au lieu du point (i) de la proposition 5.1.7. Le reste de la démonstration est identique à la version modulo p. □

On montre l'existence d'extensions supplémentaires d'une série principale de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E par elle-même dans certains cas « dégénérés » (ne pouvant se produire que lorsque $p < 5$, voir la remarque 5.2.4).

Proposition 6.1.7. — *Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to k_E^\times$ un caractère lisse. Le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit une injection k_E-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi,\chi) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}\chi, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}\chi\right)$$

dont le conoyau est de dimension au moins

$$\mathrm{card}\,\{\alpha \in \Delta \mid \chi \circ \alpha^\vee = 1 \ \textit{et}\ \omega \circ \alpha = 1\}\,.$$

Remarque 6.1.8. — On s'attend à ce que cette inégalité soit toujours une égalité (c'est le cas lorsque $G = \mathrm{GL}_2$ d'après [**20**, Proposition 4.3.15]). On voit dans la preuve du théorème 6.1.1 que le conoyau de l'injection k_E-linéaire de l'énoncé est de dimension au plus

$$\mathrm{card}\left\{\alpha \in \Delta \mid \chi = s_\alpha(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\alpha)\right\}.$$

Démonstration. — L'injection k_E-linéaire de l'énoncé est le premier morphisme non trivial de la suite exacte (6.1.3) avec $A = k_E$ et $\chi' = \chi$. On pose

$$\Delta' \overset{\text{déf}}{=} \{\alpha \in \Delta \mid \chi \circ \alpha^\vee = 1 \text{ et } \omega \circ \alpha = 1\}\,.$$

Pour tout $\alpha \in \Delta'$, la proposition 5.2.3 montre que le conoyau du premier morphisme non trivial de la suite exacte (6.1.4) avec $A = k_E$ et $\chi' = \chi$ est de dimension 1, donc il existe une extension non scindée

$$0 \to \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi \to \mathcal{E}_\alpha \to \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi \to 0$$

dont la classe a une image non nulle par le second morphisme non trivial de cette suite exacte. En utilisant la proposition 5.3.5 avec $A = k_E$ et $U = V = \chi$, on en déduit que les images des classes des extensions $(\mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Delta'}$ par le second morphisme non trivial de la suite exacte (6.1.3) avec $A = k_E$ et $\chi' = \chi$ sont non nulles et appartiennent à des facteurs directs distincts, donc le conoyau du premier morphisme non trivial de cette suite exacte est de dimension supérieure ou égale au cardinal de Δ'. □

Résultats dans le cas $F \neq \mathbb{Q}_p$

Théorème 6.1.9. — *Soit $\chi : T(F) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire.*

(i) *Si $\chi' : T(F) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un caractère continu unitaire distinct de χ, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi', \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi\right) = 0.$$

(ii) *Le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)}$ induit un isomorphisme E-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{T(F)}(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi, \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi\right).$$

Démonstration. — Soient $\chi, \chi' : T(F) \to A^\times$ des caractères lisses. En utilisant le corollaire 4.1.14 avec $P = B$ et $U = \chi$, la suite exacte (1.2.10) pour le triplet (G, B, T) avec $U = \chi'$ et $V = \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi$ donne un isomorphisme A-linéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{T(F)}(\chi', \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi', \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi\right).$$

Avec $A = k_E$ et en utilisant le point (i) de la proposition 5.1.7, on prouve la version modulo p du théorème. Par un passage à la limite projective et un produit tensoriel comme dans la preuve du théorème 6.1.1 et en utilisant le point (i) de la proposition 5.1.9, on prouve le théorème. □

6.2. Variante pour les représentations ordinaires

On définit et on étudie les représentations spéciales de $G(F)$ sur E, puis on calcule les extensions d'une série principale continue unitaire de $G(F)$ sur E par une représentation spéciale de $G(F)$ sur E. Les démonstrations prouvent également les résultats analogues modulo p. Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique standard et $L \subset P$ le sous-groupe de Levi standard.

Préliminaires

Définition 6.2.1. — Pour tout sous-groupe parabolique standard $Q \subset L$, on définit la *représentation spéciale* relative à Q de $L(F)$ sur E

$$\widehat{\mathrm{Sp}}_Q \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \underline{1}}{\sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} \mathrm{Ind}_{Q'^-(F)}^{L(F)} \underline{1}}$$

avec Q' parmi les sous-groupes paraboliques de L et $\underline{1}$ la représentation triviale sur E. Lorsque $Q = B_L$, on l'appelle la *représentation de Steinberg* de $L(F)$ sur E et on la note $\widehat{\mathrm{St}}$. Lorsque $Q = Q_\alpha$ avec $\alpha \in \Delta_L$, on la note $\widehat{\mathrm{Sp}}_\alpha$.

Proposition 6.2.2. — *Les représentations spéciales sont des représentations continues unitaires admissibles de $L(F)$ sur E topologiquement irréductibles et deux à deux non isomorphes. Elles forment les constituants irréductibles de $\mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} \underline{1}$, chacune apparaissant avec multiplicité un.*

Cette proposition est une conséquence directe du résultat analogue modulo p (voir la remarque 2.3.7) et du lemme suivant avec $k = 1$.

Lemme 6.2.3. — *Soit $Q \subset L$ un sous-groupe parabolique standard. Il existe une boule $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0 \subset \widehat{\mathrm{Sp}}_Q$ stable par $L(F)$ telle que pour tout entier $k \geq 1$, $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0/\varpi_E^k\widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0$ est isomorphe à la représentation spéciale relative à Q de $L(F)$ sur $\mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E$.*

Démonstration. — Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on note $\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^r\mathcal{O}_E \subset \mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} E$ la boule stable par $L(F)$ constituée des fonctions à valeurs dans $\varpi_E^r\mathcal{O}_E$. On note $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0$ l'image de $\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E$ dans $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q$. C'est une boule de $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q$ stable par $L(F)$ et on a une suite exacte courte

$$0 \to \sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} \mathrm{Ind}_{Q'^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E \to \mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E \to \widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0 \to 0$$

(l'injectivité du premier morphisme non trivial est immédiate, la surjectivité du second morphisme non trivial résulte de la définition de $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0$ et l'exactitude au milieu se déduit du sous-lemme ci-dessous avec $r = 0$).

Soit $k \geq 1$ entier. La composition avec la projection $\mathcal{O}_E \twoheadrightarrow \mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E$ induit une application

$$\sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} \mathrm{Ind}_{Q'^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E \twoheadrightarrow \sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} \mathrm{Ind}_{Q'^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E$$

(la première somme est calculée dans $\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E$ et la seconde dans $\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E$) qui s'identifie à la réduction modulo ϖ_E^k (le noyau est bien le même d'après le sous-lemme ci-dessous avec $r = k$ et la surjectivité est immédiate). On en déduit que la réduction modulo ϖ_E^k de la suite exacte précédente est

$$0 \to \sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} \mathrm{Ind}_{Q'^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E \to \mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E \to \widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0/\varpi_E^k\widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0 \to 0.$$

Ainsi, $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0/\varpi_E^k\widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0$ est la représentation spéciale relative à Q de $L(F)$ sur $\mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E$. $\square$

Sous-lemme. — *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $Q \subsetneq Q_1, \ldots, Q_n \subset L$ des sous-groupes paraboliques standards. Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité suivante dans $\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} E$:*

$$\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^r\mathcal{O}_E \cap \sum_{k=1}^n \mathrm{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} E = \sum_{k=1}^n \mathrm{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^r\mathcal{O}_E.$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est trivial. On suppose $n > 0$ et le lemme vrai pour $n-1$. Par multiplication par un scalaire, on se ramène au cas $r = 0$. Il suffit de montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion suivante dans $\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} E$:

$$\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E \cap \sum_{k=1}^n \mathrm{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^{-l}\mathcal{O}_E \subset \sum_{k=1}^n \mathrm{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E.$$

On procède par récurrence sur l. Le cas $l = 0$ est trivial. On suppose $l > 0$ et l'inclusion vraie pour $l-1$. Soit $(f_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \prod_{k=1}^n \mathrm{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^{-l}\mathcal{O}_E$ tel que $\sum_{k=1}^n f_k \in \mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $\overline{f}_k \in \mathrm{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} k_E$ la composée de f_k avec la projection $\varpi_E^{-l}\mathcal{O}_E \twoheadrightarrow \varpi_E^{-l}\mathcal{O}_E/\varpi_E^{1-l}\mathcal{O}_E \cong k_E$. On a donc l'égalité $\sum_{k=1}^n \overline{f}_k = 0$ dans $\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} k_E$.

Comme $\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} k_E$ est de longueur fini sans multiplicité dans la catégorie $\mathrm{Mod}_{L(F)}^{\infty}(k_E)$ (voir la remarque 2.3.7), on a l'égalité suivante dans $\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} k_E$:

$$\mathrm{Ind}_{Q_n^-(F)}^{L(F)} k_E \cap \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} k_E = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\mathrm{Ind}_{Q_n^-(F)}^{L(F)} k_E \cap \mathrm{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} k_E \right).$$

Ainsi, $\overline{f}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{f}'_k$ avec $\overline{f}'_k \in \mathrm{Ind}_{Q_n^-(F)}^{L(F)} k_E \cap \mathrm{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} k_E$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. On choisit un relèvement $f'_k \in \mathrm{Ind}_{Q_n^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^{-l} \mathcal{O}_E \cap \mathrm{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^{-l} \mathcal{O}_E$ de $\overline{f}'_k$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. On obtient donc $f_n = \sum_{k=1}^{n-1} f'_k + f'_n$ avec $f'_n \in \mathrm{Ind}_{Q_n^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^{1-l} \mathcal{O}_E$. On a alors $\sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n-1} (f_k + f'_k) + f'_n \in \mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E$ par hypothèse, donc $\sum_{k=1}^{n-1} (f_k + f'_k) \in \mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^{1-l} \mathcal{O}_E$. Par hypothèse de récurrence avec $n-1$ et $r = 1 - l$, on en déduit que $\sum_{k=1}^{n-1} (f_k + f'_k) = \sum_{k=1}^{n-1} f''_k$ avec $f''_k \in \mathrm{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^{1-l} \mathcal{O}_E$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et par hypothèse de récurrence avec $l-1$, on en conclut que $\sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n-1} f''_k + f'_n \in \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E$. □

Définition 6.2.4. — Une *représentation ordinaire* de $G(F)$ sur E est une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi$ avec σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur E et $\chi : L(F) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire.

Remarque 6.2.5. — Si [**12**, Conjecture 3.1.2] est vraie, alors les représentations ordinaires topologiquement irréductibles sont exactement les sous-quotients topologiquement irréductibles de séries principales.

Résultats dans le cas $F = \mathbb{Q}_p$

Proposition 6.2.6. — *Soient $\chi : L(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire et σ une représentation spéciale de $L(\mathbb{Q}_p)$ sur E.*

(i) *Si $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un autre caractère continu unitaire, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \sigma \otimes \chi \right) \neq 0$$

si et seulement si ou bien $\sigma = \widehat{\mathrm{St}}$ et $\chi' = \chi$, ou bien $\sigma = \widehat{\mathrm{St}}$ et $\chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$ avec $\alpha \in \Delta - \Delta_L$, ou bien $\sigma = \widehat{\mathrm{Sp}}_\alpha$ et $\chi' = \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$ avec $\alpha \in \Delta_L$.

(ii) *Si $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un caractère continu unitaire distinct de χ, alors*

$$\dim_E \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \widehat{\mathrm{St}} \otimes \chi \right) = \mathrm{card} \left\{ \alpha \in \Delta - \Delta_L \mid \chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \right\}.$$

(iii) *Pour tout $\alpha \in \Delta_L$, on a*

$$\dim_E \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha), \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \widehat{\mathrm{Sp}}_\alpha \otimes \chi \right) = 1.$$

(iv) *Si* $\chi \neq s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$ *pour tout* $\alpha \in \Delta - \Delta_L$*, alors le foncteur* $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ *et la projection* $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \widehat{\mathrm{St}} \otimes \chi$ *induisent un isomorphisme* E*-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \widehat{\mathrm{St}} \otimes \chi\right).$$

Remarque 6.2.7. — On s'attend à ce que le point (iv) de la proposition soit vrai pour *tout* caractère continu unitaire $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$. On voit dans la preuve que le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ et la projection $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \widehat{\mathrm{St}} \otimes \chi$ induisent une injection E-linéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi, \chi) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \widehat{\mathrm{St}} \otimes \chi\right)$$

dont le conoyau est de dimension au plus

$$\mathrm{card}\left\{\alpha \in \Delta - \Delta_L \mid \chi = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)\right\}.$$

Pour l'analogue modulo p du point (iv), on peut montrer que le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ et la projection $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{St} \otimes \chi$ induisent une injection k_E-linéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi, \chi) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{St} \otimes \chi\right)$$

dont le conoyau est de dimension au moins

$$\mathrm{card}\{\alpha \in \Delta - \Delta_L \mid \chi \circ \alpha^\vee = 1 \text{ et } \omega \circ \alpha = 1\}.$$

On s'attend à ce que cette inégalité soit toujours une égalité. On voit dans la preuve que la dimension du conoyau de l'injection ci-dessus est au plus

$$\mathrm{card}\left\{\alpha \in \Delta - \Delta_L \mid \chi = s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)\right\}.$$

Démonstration. — Soient $\chi : L(\mathbb{Q}_p) \to A^\times$, $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \to A^\times$ des caractères lisses et σ une représentation spéciale de $L(\mathbb{Q}_p)$ sur A. En utilisant le corollaire 4.3.3 et le point (i) du corollaire 4.3.4, on déduit de la suite exacte (1.2.10) pour le triplet (G, B, T) avec $U = \chi'$ et $V = \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \sigma \otimes \chi$ que :

– si $\sigma \neq \mathrm{St}$ et $\sigma \neq \mathrm{Sp}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta_L$, alors

$$\mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \sigma \otimes \chi\right) = 0\ ; \tag{6.2.8}$$

– si $\sigma = \mathrm{St}$, alors on a une suite exacte de A-modules

$$\begin{aligned}0 \to \mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi', \chi) \to \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}&\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{St} \otimes \chi\right) \\ &\to \bigoplus_{\alpha \in \Delta - \Delta_L} \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}\left(\chi', s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)\right);\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

– si $\sigma = \mathrm{Sp}_\alpha$ avec $\alpha \in \Delta_L$, alors on a une injection A-linéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sp}_\alpha \otimes \chi\right) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}\left(\chi', \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)\right). \tag{6.2.10}$$

On suppose $A = k_E$ et on prouve la version modulo p de la proposition. En utilisant le point (i) de la proposition 5.1.7, on obtient les cas d'annulation du point (i) modulo p. Le premier cas de non annulation du point (i) modulo p ($\sigma = \mathrm{St}$ et $\chi' = \chi$) et le point (iv) modulo p se déduisent de la suite exacte (6.2.9). Les autres cas de non annulation du point (i) modulo p ($\sigma = \mathrm{St}$ et $\chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha) \neq \chi$ avec $\alpha \in \Delta - \Delta_L$; $\sigma = \mathrm{Sp}_\alpha$ et $\chi' = \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)$ avec $\alpha \in \Delta_L$) sont des conséquences des points (ii) et (iii) modulo p. On suppose $\chi' \neq \chi$ et on pose

$$\Delta' \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \alpha \in \Delta \mid \chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha) \right\}.$$

En utilisant la suite exacte (6.2.9) et le point (i) de la proposition 5.1.7, on obtient

$$\dim_{k_E} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{St} \otimes \chi \right) \leq \operatorname{card} \Delta' \cap (\Delta - \Delta_L) \tag{6.2.11}$$

et en utilisant l'injection (6.2.10) avec $\alpha \in \Delta_L$, on voit que

$$\dim_{k_E} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sp}_\alpha \otimes \chi \right) = 0 \text{ si } \alpha \notin \Delta' \tag{6.2.12}$$

$$\dim_{k_E} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sp}_\alpha \otimes \chi \right) \leq 1 \text{ si } \alpha \in \Delta'. \tag{6.2.13}$$

Or, la représentation $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cong \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}((\mathrm{Ind}_{Q^-(\mathbb{Q}_p)}^{L(\mathbb{Q}_p)} \underline{1}) \otimes \chi)$ admet une filtration dont les quotients successifs sont exactement les représentations $(\mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sp}_Q \otimes \chi)_{Q \subset L}$ avec Q parmi les sous-groupes paraboliques standards de L (voir la remarque 2.3.7), donc utilisant le point (i) modulo p du théorème 6.1.1, on voit que l'on a

$$\operatorname{card} \Delta' \leq \sum_{Q \subset L} \dim_{k_E} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sp}_Q \otimes \chi \right)$$

avec Q parmi les sous-groupes paraboliques standards de L. En utilisant l'égalité (6.2.8) et les égalités (6.2.12) pour tout $\alpha \in \Delta_L \cap (\Delta - \Delta')$, on en déduit que l'inégalité (6.2.11) et les inégalités (6.2.13) pour tout $\alpha \in \Delta_L \cap \Delta'$ sont des égalités. On obtient point (ii) modulo p d'une part. D'autre part avec $\chi' = \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)$, on obtient le point (iii) modulo p pour tout $\alpha \in \Delta_L$ tel que $\omega \circ \alpha \neq 1$ (car on a supposé $\chi' \neq \chi$). On suppose que $\omega \circ \alpha = 1$ avec $\alpha \in \Delta_L$ et on montre le point (iii) dans ce cas. Soit I_α le noyau de la projection $\mathrm{Ind}_{Q_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{L(\mathbb{Q}_p)} \underline{1} \twoheadrightarrow \mathrm{Sp}_\alpha$ avec $\underline{1}$ la représentation triviale de $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E. En utilisant l'exactitude de la torsion par le caractère χ et du foncteur $\mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$, on voit que l'on a une suite exacte de k_E-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} I_\alpha \otimes \chi \right) \\ &\to \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \right) \to \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sp}_\alpha \otimes \chi \right). \end{aligned} \tag{6.2.14}$$

On déduit de la remarque 2.3.7 que les constituants irréductibles de I_α sont exactement les représentations $(\mathrm{Sp}_Q)_{Q_\alpha \subsetneq Q \subset L}$ avec Q parmi les sous-groupes paraboliques de L. En utilisant les égalités (6.2.8) avec $\chi' = \chi$ et $\sigma = \mathrm{Sp}_Q$ pour tout sous-groupe parabolique $Q \subset L$ tel que $Q_\alpha \subsetneq Q$, on en déduit que le terme de gauche de la suite exacte (6.2.14) est nul. En utilisant l'égalité (5.2.7) avec $\omega^{-1} \circ \alpha = 1$ et l'injection k_E-linéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi, \chi\right) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right)$$

induite par le foncteur exact $\mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$, on voit que le terme du milieu de la suite exacte (6.2.14) est non nul et on en déduit que le terme de droite est non nul. En utilisant l'injection (6.2.10) avec $\chi' = \chi$ et $\omega^{-1} \circ \alpha = 1$, on en conclut qu'il est de dimension 1, d'où le point (iii) modulo p dans ce cas.

On prouve maintenant la proposition. Soient σ une représentation spéciale de $L(\mathbb{Q}_p)$ sur E et $\chi : L(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$, $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ des caractères continus unitaires. Pour $k \geq 1$ entier, l'égalité (6.2.8), la suite exacte (6.2.9) et l'injection (6.2.10) avec $A = \mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E$ et les réductions modulo ϖ_E^k de la représentation spéciale σ (voir le lemme 6.2.3) et des caractères χ et χ' forment des systèmes projectifs. On passe à la limite projective puis on tensorise par E sur $\mathcal{O}_E$ en utilisant les isomorphismes (1.2.11), (1.1.2) et la proposition 1.1.3. On utilise le point (i) de la proposition 5.1.9 au lieu du point (i) de la proposition 5.1.7 et on remarque $\varepsilon \circ \alpha \neq 1$ pour tout $\alpha \in \Delta_L$, donc les caractères dans le point (iii) sont toujours distincts. Le reste de la démonstration est identique à la version modulo p. □

Résultats dans le cas $F \neq \mathbb{Q}_p$

Proposition 6.2.15. — *Soient $\chi : L(F) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire et σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur E.*

(i) *Si $\chi' : T(F) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un autre caractère continu unitaire, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi\right) \neq 0$$

si et seulement si $\sigma = \widehat{\mathrm{St}}$ et $\chi' = \chi$.

(ii) *Le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)}$ et la projection $\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \widehat{\mathrm{St}} \otimes \chi$ induisent un isomorphisme E-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{T(F)}(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi, \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \widehat{\mathrm{St}} \otimes \chi\right).$$

Démonstration. — Soient $\chi : L(F) \to A^\times$, $\chi' : T(F) \to A^\times$ des caractères lisses et σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur A. En utilisant le corollaire 4.3.3 et le point (ii) du corollaire 4.3.4, on déduit de la suite exacte (1.2.10) pour le triplet (G, B, T) avec $U = \chi'$ et $V = \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi$ que :

– si $\sigma \neq \mathrm{St}$, alors

$$\mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi\right) = 0\ ;$$

– si $\sigma = \mathrm{St}$, alors on a un isomorphisme A-linéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{T(F)}(\chi', \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \mathrm{St} \otimes \chi\right).$$

Avec $A = k_E$ et en utilisant le point (i) de la proposition 5.1.7, on prouve la version modulo p de la proposition. Par un passage à la limite projective et un produit tensoriel comme dans la preuve de la proposition 6.2.6 et en utilisant le point (i) de la proposition 5.1.9, on prouve la proposition. □

6.3. Résultat conjectural sur les $\mathrm{Ext}^\bullet$ modulo p

On suppose que la conjecture 1.2.5 est *vraie* (on rappelle que cette dernière est démontrée pour $G = \mathrm{GL}_2$ dans [**23**]). Par soucis de clarté, on fait également l'hypothèse que G admet un « twisting element » noté θ.

Théorème 6.3.1. — *Soient $\chi : T(F) \to k_E^\times$ un caractère lisse et $n \in \mathbb{N}$.*

(i) *Soit $\chi' : T(F) \to k_E^\times$ un autre caractère lisse. Si*

$$\mathrm{Ext}^n_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi' \cdot (\omega^{-1} \circ \theta), \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right) \neq 0,$$

alors il existe $w \in W$ tel que $\chi' = w(\chi)$ et $[F : \mathbb{Q}_p] \cdot \ell(w) \leq n$.

(ii) *Soit $w \in W$ tel que $[F : \mathbb{Q}_p] \cdot \ell(w) \leq n$. Si χ est fortement générique, alors on a un isomorphisme k_E-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^n_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} w(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \theta), \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right) \cong \mathrm{Ext}^{n-[F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(w)}_{T(F)} (\underline{1}, \underline{1})$$

avec $\underline{1}$ la représentation triviale de $T(F)$ sur k_E.

Remarque 6.3.2. — Sous les conditions du point (ii), on déduit du théorème que

$$\dim_{k_E} \mathrm{Ext}^{[F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(w)}_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} w(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \theta), \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right) = 1.$$

Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, la non annulation de cet espace était attendue par Emerton (voir [**12**, Remarque 3.5.3]).

Démonstration. — Soit $\chi' : T(F) \to k_E^\times$ un autre caractère lisse. On note $(\mathcal{E}_r^{i,j})$ la suite spectrale (1.2.9) pour le triplet (G, B, T) avec $A = k_E$, $U = \chi' \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)$ et $V = \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)$. En utilisant la conjecture 1.2.5 et le corollaire 4.2.12, on voit que

$$\mathcal{E}_2^{i,j} = \bigoplus_{[F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(w')=j} \mathrm{Ext}^i_{T(F)}\left(\chi' \cdot (\omega^{-1} \circ \theta), w'(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi' \cdot (\omega^{-1} \circ \theta), \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right).$$

On suppose que le k_E-espace vectoriel du point (i) est non nul. Alors il existe $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i + j = n$ et $\mathcal{E}_2^{i,j} \neq 0$, donc il existe $w' \in W$ tel que $[F : \mathbb{Q}_p] \cdot \ell(w') = j$ et

$$\mathrm{Ext}^i_{T(F)}\left(\chi' \cdot (\omega^{-1} \circ \theta), w'(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right) \neq 0.$$

En utilisant le point (i) de la proposition 5.1.7, on en déduit que $\chi' = w'(\chi)$. Comme $[F : \mathbb{Q}_p] \cdot \ell(w') = j \leq n$, on obtient le point (i).

Soit $w \in W$. On suppose χ fortement générique. En utilisant le point (i) de la proposition 5.1.7 on voit que la suite spectrale $(\mathcal{E}_r^{i,j})$ avec $\chi' = w(\chi)$ dégénère : pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{E}_2^{i,j} \cong \begin{cases} \mathrm{Ext}^i_{T(F)}\left(w(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \theta), w(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right) & \text{si } j = [F : \mathbb{Q}_p] \cdot \ell(w), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En comparant ceci à la limite de $(\mathcal{E}_r^{i,j})$ on voit que si $n < [F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(w)$, alors
$$\mathrm{Ext}^n_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} w(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\theta), \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)}\chi\cdot(\omega^{-1}\circ\theta)\right)=0$$
tandis que si $n \geq [F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(w)$, alors on a un isomorphisme k_E-linéaire
$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^n_{G(F)}&\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} w(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\theta), \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)}\chi\cdot(\omega^{-1}\circ\theta)\right)\\ &\cong \mathrm{Ext}^{n-[F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(w)}_{T(F)}\left(w(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\theta), w(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\theta)\right).\end{aligned}$$
Après torsion par l'inverse du caractère $w(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\theta)$, on obtient le point (ii). □

Remarque 6.3.3. — Soient $\chi : T(F)\to k_E^\times$ un caractère lisse fortement générique et $w\in W$. Si $w=w_1w_2$ avec $w_1,w_2\in W$ et $\ell(w)=\ell(w_1)+\ell(w_2)$, alors on s'attend à ce que l'unique extension non nulle dans
$$\mathrm{Ext}^{[F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(w)}_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} w(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\theta), \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)}\chi\cdot(\omega^{-1}\circ\theta)\right)$$
soit le produit de Yoneda de celles dans
$$\mathrm{Ext}^{[F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(w_2)}_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} w_2(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\theta), \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)}\chi\cdot(\omega^{-1}\circ\theta)\right)$$
et
$$\mathrm{Ext}^{[F:\mathbb{Q}_p]\cdot\ell(w_1)}_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} w_1w_2(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\theta), \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} w_2(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\theta)\right).$$

En particulier avec $G=\mathrm{GL}_2$, on obtient le résultat *inconditionnel* suivant.

Corollaire 6.3.4. — *Soient $\chi_1,\chi_2 : F^\times\to k_E^\times$ deux caractères lisses et $n\in\mathbb{N}$.*

(i) *Soient $\chi_1',\chi_2' : F^\times\to k_E^\times$ deux autres caractères lisses tels que $(\chi_1',\chi_2')\neq(\chi_1,\chi_2)$. Si $n<[F:\mathbb{Q}_p]$ ou $(\chi_1',\chi_2')\neq(\chi_2,\chi_1)$, alors*
$$\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{GL}_2(F)}\left(\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix}*&0\\ *&*\end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(F)}\chi_1'\omega^{-1}\otimes\chi_2', \mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix}*&0\\ *&*\end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(F)}\chi_1\omega^{-1}\otimes\chi_2\right)=0.$$

(ii) *Si $\chi_1\neq\chi_2$, alors*
$$\dim_{k_E}\mathrm{Ext}^{[F:\mathbb{Q}_p]}_{\mathrm{GL}_2(F)}\left(\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix}*&0\\ *&*\end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(F)}\chi_2\omega^{-1}\otimes\chi_1, \mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix}*&0\\ *&*\end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(F)}\chi_1\omega^{-1}\otimes\chi_2\right)=1.$$

Démonstration. — On note χ le caractère $\chi_1\otimes\chi_2$ et s l'unique élément non trivial de W. On a $s(\chi)=\chi_2\otimes\chi_1$ et $\omega^{-1}\circ\theta=\omega^{-1}\otimes 1$.

Soient $\chi_1',\chi_2' : T(F)\to k_E^\times$ deux autres caractères lisses tels que $(\chi_1',\chi_2')\neq(\chi_1,\chi_2)$. En notant χ' le caractère $\chi_1'\otimes\chi_2'$ on a $\chi'\neq\chi$, donc on déduit du point (i) du théorème 6.3.1 que si
$$\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{GL}_2(F)}\left(\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix}*&0\\ *&*\end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(F)}\chi_1'\omega^{-1}\otimes\chi_2', \mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix}*&0\\ *&*\end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(F)}\chi_1\omega^{-1}\otimes\chi_2\right)\neq0,$$
alors $[F:\mathbb{Q}_p]\leq n$ et $\chi'=s(\chi)$, c'est-à-dire $(\chi_1',\chi_2')=(\chi_2,\chi_1)$. Par contraposée on obtient le point (i).

Si $\chi_1\neq\chi_2$, c'est-à-dire $s(\chi)\neq\chi$, alors χ est fortement générique et en utilisant le point (ii) du théorème 6.3.1 avec $n=[F:\mathbb{Q}_p]$ et $w=s$, on obtient le point (ii). □

CHAPITRE 7

SUR UNE CONJECTURE DE BREUIL-HERZIG

Dans ce dernier chapitre, on fait les hypothèses suivantes sur G : son centre est connexe et son groupe dérivé est simplement connexe. On note θ la somme des poids fondamentaux relatifs à Δ (bien définie à un caractère algébrique de G près).

Nous prouvons qu'il n'existe pas de « chaîne » de trois séries principales distinctes. Puis, nous démontrons une conjecture de Breuil-Herzig. Nous énonçons enfin une nouvelle conjecture sur les extensions entre représentations lisses admissibles de $G(F)$ modulo p et nous la démontrons pour les extensions par une série principale.

7.1. Extensions de séries principales

On suppose $F = \mathbb{Q}_p$ et on donne deux résultats sur les extensions de séries principales continues unitaires de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E. Les résultats analogues modulo p se démontrent de façon analogue.

On commence par reformuler le théorème 6.1.1 en utilisant les hypothèses sur G. En particulier, on utilise le « twisting element » θ pour normaliser les séries principales.

Corollaire 7.1.1. — *Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire.*

(i) *Si $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un autre caractère continu unitaire, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi' \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta), \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)\right) \neq 0$$

si et seulement si $\chi' = \chi$ ou $\chi' = s_\alpha(\chi)$ avec $\alpha \in \Delta$.

(ii) *Soit $\alpha \in \Delta$. Si $s_\alpha(\chi) \neq \chi$, alors*

$$\dim_E \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta), \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)\right) = 1.$$

(iii) *Si χ est faiblement générique, alors le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme E-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}\left(\chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta), \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta), \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)\right).$$

Démonstration. — On utilise le théorème 6.1.1 avec $\chi\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)$ au lieu de χ et en tenant compte du fait que $s_\alpha(\chi\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta))\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\alpha)=s_\alpha(\chi)\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)$ (car $s_\alpha(\theta)+\alpha=\theta$, voir la preuve du corollaire 4.2.12). On obtient ainsi les points (i) et (iii), en utilisant la remarque 6.1.2 pour traiter le cas $\chi'=\chi=s_\alpha(\chi)$ avec $\alpha\in\Delta$.

Soit $\alpha\in\Delta$. Si $s_\alpha(\chi)\neq\chi$, alors en utilisant le lemme 5.1.2 on voit que $s_\alpha(\chi)\neq s_\beta(\chi)$ pour tout $\beta\in\Delta-\{\alpha\}$. En utilisant le point (i) du théorème 6.1.1 avec $\chi'=s_\alpha(\chi)$, on en déduit le point (ii). □

On montre à présent qu'il n'existe pas de « chaîne » de trois séries principales continues unitaires distinctes topologiquement irréductibles de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E.

Théorème 7.1.2. — *Si $\chi,\chi',\chi'':T(\mathbb{Q}_p)\to\mathcal{O}_E^\times\subset E^\times$ sont des caractères continus unitaires deux à deux distincts tels que les séries principales de $G(\mathbb{Q}_p)$ correspondantes soient topologiquement irréductibles, alors il n'existe pas de représentation continue unitaire admissible de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E ayant $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}\chi$ pour socle, $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}\chi''$ pour cosocle et un unique constituant intermédiaire $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}\chi'$.*

Démonstration. — Il revient au même de montrer le théorème pour des séries principales normalisées. En utilisant le point (i) du corollaire 7.1.1, on voit qu'il suffit de montrer le théorème pour $\chi\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)$, $s_\beta(\chi)\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)$, $s_\alpha s_\beta(\chi)\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)$ avec $\chi:T(\mathbb{Q}_p)\to\mathcal{O}_E^\times\subset E^\times$ un caractère continu unitaire et $\alpha,\beta\in\Delta$ deux racines distinctes. On suppose donc que les séries principales correspondantes sont topologiquement irréductibles et que $\chi\neq s_\beta(\chi)$ et $s_\beta(\chi)\neq s_\alpha s_\beta(\chi)$, ou de façon équivalente $\chi\circ\beta^\vee\neq1$ et $\chi\circ s_\beta(\alpha)^\vee\neq1$ (voir le point (i) de la remarque 5.1.3), d'où $\chi\neq s_\alpha s_\beta(\chi)$ d'après le lemme 5.1.2.

On reprend les notations de la section 5.2 : G_α, P_α, P_α^-, B_α, B_α^-. Les hypothèses sur G montrent que G_α est de centre connexe et de groupe dérivé simplement connexe. On déduit donc du lemme 5.2.1 qu'il existe un sous-tore $T'\subset T$ et un isomorphisme $G_\alpha\cong T'\times\mathrm{GL}_2$ à travers lequel $T\cong T'\times T_\alpha$ où $T_\alpha\subset\mathrm{GL}_2$ est le sous-groupe des matrices diagonales. On remarque que s_α s'identifie à l'élément non trivial du groupe de Weyl de (GL_2,T_α), $\theta_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ est un poids fondamental de (GL_2,T_α) correspondant à α et on a

$$\begin{aligned}s_\alpha s_\beta(\chi)_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}&=s_\alpha(s_\beta(\chi)_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)})\\ s_\alpha s_\beta(\chi)_{|T'(\mathbb{Q}_p)}&=s_\beta(\chi)_{|T'(\mathbb{Q}_p)}.\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{E}_2$ l'unique extension non scindée de $\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix}*&0\\ *&*\end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}s_\alpha s_\beta(\chi)_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)})$ par $\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix}*&0\\ *&*\end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}s_\beta(\chi)_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)})$ dans la catégorie $\mathrm{Ban}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{adm,u}}(E)$ donnée par [**12**, Proposition B.2 (i)] (on a bien $s_\beta(\chi)_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\circ\alpha^\vee\notin\{1,\varepsilon,\varepsilon^{-1}\}$ car les séries principales normalisées de $G(\mathbb{Q}_p)$ correspondant à $s_\beta(\chi)$ et $s_\alpha s_\beta(\chi)$ sont topologiquement irréductibles et distinctes par hypothèse). En utilisant [**12**, Lemme A.6 (ii)] avec $G_1=\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $G_2=T'(\mathbb{Q}_p)$, $\Pi_1=\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix}*&0\\ *&*\end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}s_\beta(\chi)_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)})$, $\Pi_1'=\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix}*&0\\ *&*\end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}s_\alpha s_\beta(\chi)_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)})$ et $\Pi_2=\Pi_2'=s_\beta(\chi)_{|T'(\mathbb{Q}_p)}\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta_{|T'(\mathbb{Q}_p)})$, on voit qu'il existe une unique extension non scindée

$$\mathcal{E}_\alpha\overset{\text{déf}}{=}s_\beta(\chi)_{|T'(\mathbb{Q}_p)}\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta_{|T'(\mathbb{Q}_p)})\otimes_E\mathcal{E}_2$$

de $\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha s_\beta(\chi)\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)$ par $\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} s_\beta(\chi)\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)$ dans la catégorie $\mathrm{Ban}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{adm,u}}(E)$. On déduit de la proposition 1.2.12 pour le triplet (G,P_α,G_α) que l'extension

$$\mathcal{E} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{E}_\alpha$$

de $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha s_\beta(\chi)\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)$ par $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} s_\beta(\chi)\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)$ dans la catégorie $\mathrm{Ban}_{G(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{adm,u}}(E)$ n'est pas scindée et elle est unique en tant que telle d'après le point (ii) du corollaire 7.1.1. Pour prouver le théorème, il suffit donc de montrer que

$$\mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathcal{E}, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)\right) = 0. \tag{7.1.3}$$

Soit $\mathcal{E}_\alpha^0 \subset \mathcal{E}_\alpha$ une boule stable par $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$. Pour tout entier $k\geq 1$, on note χ_k l'image de χ dans $(\mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E)^\times$. En utilisant la suite exacte (1.2.10) pour le triplet (G,P_α,G_α) avec $A=\mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E$, $U=\mathcal{E}_\alpha^0/\varpi_E^k\mathcal{E}_\alpha^0$ et $V=\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}\chi_k\cdot(\omega^{-1}\circ\theta)$ et l'isomorphisme (4.1.12) pour le triplet (G,P_α,G_α) avec $A=\mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E$ et $U=\chi_k\cdot(\omega^{-1}\circ\theta)$ pour tout entier $k\geq 1$ et en tenant compte de l'isomorphisme (1.2.11) et de la proposition 1.1.3, on obtient une suite exacte de E-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathcal{E}_\alpha, \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)\right)\\ &\to \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathcal{E}, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}\chi\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)\right)\\ &\to \mathrm{Hom}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathcal{E}_\alpha, E\otimes_{\mathcal{O}_E}\varprojlim_k \mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}\chi_k\cdot(\omega^{-1}\circ\theta)\right)\right)\end{aligned} \tag{7.1.4}$$

(pour vérifier que la topologie de la limite projective coïncide avec la topologie ϖ_E-adique, on procède comme dans le premier paragraphe de la preuve de [**19**, Proposition 3.4.3]).

Si $\chi_{|T'(\mathbb{Q}_p)}\neq s_\beta(\chi)_{|T'(\mathbb{Q}_p)}$, alors en utilisant [**12**, Lemme A.6 (i)] avec $G_1=T'(\mathbb{Q}_p)$, $G_2=\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $\Pi_1=\chi_{|T'(\mathbb{Q}_p)}\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta_{|T'(\mathbb{Q}_p)})$, $\Pi_1'=s_\beta(\chi)_{|T'(\mathbb{Q}_p)}\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta_{|T'(\mathbb{Q}_p)})$, $\Pi_2=\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix}*&0\\ *&*\end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)})$, $\Pi_2'=\mathcal{E}_2$, on obtient

$$\mathrm{Ext}^1_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathcal{E}_\alpha, \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\chi\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta)\right) = 0 \tag{7.1.5}$$

car $\mathrm{Hom}_{G_1}(\Pi_1',\Pi_1)=0$ par hypothèse et $\mathrm{Ext}^1_{G_1}(\Pi_1',\Pi_1)=0$ d'après la proposition 5.1.9 avec T' au lieu de T. Sinon, alors $\chi_{|T'(\mathbb{Q}_p)}=s_\beta(\chi)_{|T'(\mathbb{Q}_p)}=s_\alpha s_\beta(\chi)_{|T'(\mathbb{Q}_p)}$, donc $\chi_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\neq s_\alpha s_\beta(\chi)_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ (car $\chi\neq s_\alpha s_\beta(\chi)$) et en utilisant [**12**, Lemme A.6 (i)] avec $G_1=\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $G_2=T'(\mathbb{Q}_p)$, $\Pi_1=\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix}*&0\\ *&*\end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)})$, $\Pi_1'=\mathcal{E}_2$, $\Pi_2=\chi_{|T'(\mathbb{Q}_p)}\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta_{|T'(\mathbb{Q}_p)})$, $\Pi_2'=s_\beta(\chi)_{|T'(\mathbb{Q}_p)}\cdot(\varepsilon^{-1}\circ\theta_{|T'(\mathbb{Q}_p)})$, on obtient encore l'égalité (7.1.5) car d'une part $\mathrm{Hom}_{G_1}(\Pi_1',\Pi_1)=0$ et d'autre part ou bien $\chi_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}\neq s_\beta(\chi)_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ d'où $\mathrm{Ext}^1_{G_1}(\Pi_1',\Pi_1)=0$ d'après [**20**, Proposition 4.3.15 (1)], ou bien $\chi_{|T'(\mathbb{Q}_p)}\neq s_\beta(\chi)_{|T'(\mathbb{Q}_p)}$ d'où $\mathrm{Hom}_{G_2}(\Pi_2',\Pi_2)=0$.

En utilisant le corollaire 4.1.7 avec $n = 1$, $P = P_\alpha$, $A = \mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E$ et $U = \chi_k \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)$ pour tout entier $k \geq 1$, on obtient un isomorphisme $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$-équivariant

$$
\begin{aligned}
(7.1.6) \quad & E \otimes_{\mathcal{O}_E} \varprojlim_k \mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi_k \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right) \\
& \cong \bigoplus_{\gamma \in \Delta - \{\alpha\}} E \otimes_{\mathcal{O}_E} \varprojlim_k \mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \left(\text{c-ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{(B^- \dot{s}_\gamma P_\alpha)(\mathbb{Q}_p)} \chi_k \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right)
\end{aligned}
$$

et pour tout $\gamma \in \Delta - \{\alpha\}$, les morphismes (4.1.9) avec $n = 1$, $P = P_\alpha$, $A = \mathcal{O}_E/\varpi_E^k\mathcal{O}_E$ et $U = \chi_k \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)$ pour tout entier $k \geq 1$ donnent, en tenant compte du fait que $U^\gamma \otimes (\omega^{-1} \circ \gamma) = s_\gamma(\chi_k) \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)$ (car $s_\gamma(\theta) + \gamma = \theta$, voir la preuve du corollaire 4.2.12), un morphisme $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$-équivariant

$$
\begin{aligned}
(7.1.7) \quad & \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} s_\gamma(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta) \\
& \to E \otimes_{\mathcal{O}_E} \varprojlim_k \mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \left(\text{c-ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{(B^- \dot{s}_\gamma P_\alpha)(\mathbb{Q}_p)} \chi_k \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right).
\end{aligned}
$$

Soit $\gamma \in \Delta - \{\alpha\}$. Le morphisme (7.1.7) est injectif en restriction à la sous-$B_\alpha(\mathbb{Q}_p)$-représentation

$$
E \otimes_{\mathcal{O}_E} \varprojlim_k \mathrm{Fil}^0_{B_\alpha} \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} s_\gamma(\chi_k) \cdot (\omega^{-1} \circ \theta).
$$

Cette dernière est topologiquement irréductible (car résiduellement irréductible, voir la preuve de la proposition 4.1.11), de codimension 1 et son image par le morphisme (7.1.7) est encore de codimension 1. De plus $T(\mathbb{Q}_p)$ agit sur ces représentations unidimensionnelles à travers le même caractère $s_\alpha(s_\gamma(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta))$. Comme un caractère de $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ est déterminé par sa restriction à $T(\mathbb{Q}_p)$, on en déduit un isomorphisme $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$-équivariant

$$
\begin{aligned}
(7.1.8) \quad & \left(E \otimes_{\mathcal{O}_E} \varprojlim_k \mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \left(\text{c-ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{(B^- \dot{s}_\gamma P_\alpha)(\mathbb{Q}_p)} \chi_k \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right)\right)^{\mathrm{ss}} \\
& \cong \left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} s_\gamma(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)\right)^{\mathrm{ss}}
\end{aligned}
$$

où l'exposant $^{\mathrm{ss}}$ désigne la semi-simplifiée dans la catégorie $\mathrm{Ban}^{\mathrm{adm,u}}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}(E)$.

Pour tout $\gamma \in \Delta - \{\alpha\}$, on a $s_\alpha s_\beta(\chi) \neq s_\gamma(\chi)$ (par hypothèse si $\gamma = \beta$ et sinon cela résulte du lemme 5.1.2 car $s_\beta(\chi) \circ \alpha^\vee \neq 1$ par hypothèse) donc les représentations $\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha s_\beta(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)$ et $\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} s_\gamma(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)$ n'ont aucun constituant en commun. Comme l'extension $\mathcal{E}_\alpha$ n'est pas scindée et la représentation $\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} s_\beta(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)$ est topologiquement irréductible, on déduit de l'isomorphisme (7.1.6) et des isomorphismes (7.1.8) pour tout $\gamma \in \Delta - \{\alpha\}$ que

$$
\mathrm{Hom}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathcal{E}_\alpha, E \otimes_{\mathcal{O}_E} \varprojlim_k \mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi_k \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)\right)\right) = 0.
$$

En tenant compte de l'égalité (7.1.5), on en conclut que la suite exacte (7.1.4) est nulle. On a donc bien l'égalité (7.1.3) et on en déduit le théorème. □

Remarque 7.1.9. — L'égalité (7.1.3) est encore vraie sans les hypothèses d'irréductibilité de l'énoncé (auquel cas il existe encore une unique extension non scindée $\mathcal{E}_2$ par une preuve identique à celle de [**12**, Proposition B.2 (i)]) mais en supposant seulement $\chi \circ \beta^\vee \neq 1$ et $\chi \circ s_\beta(\alpha)^\vee \notin \{1, \varepsilon\}$. L'hypothèse $\chi \circ s_\beta(\alpha)^\vee \neq \varepsilon$ ne serait pas nécessaire non plus si la conjecture 4.1.10 était démontrée pour $n = 1$ et $P = P_\alpha$.

7.2. Preuve de la conjecture

On suppose toujours $F = \mathbb{Q}_p$ et on démontre enfin le résultat principal de ce chapitre. Le résultat analogue modulo p se démontre de façon analogue.

Pour toute représentation continue unitaire admissible de longueur finie V d'un groupe de Lie p-adique H sur E, on note $\mathrm{soc}_H^\bullet V$ la filtration par le socle de V, $\mathrm{rad}_H V$ le noyau de la projection de V sur son cosocle et si C est un constituant irréductible de V avec multiplicité un, on note $\deg C$ son degré dans le gradué de la filtration par le socle de V.

Théorème 7.2.1. — *Soient $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire et $J \subset \Delta$. On suppose que $\chi \circ \alpha^\vee \neq 1$ pour tout $\alpha \in J$ et que pour tout $I \subset J$ constitué de racines deux à deux orthogonales, la représentation*

$$\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \big(\prod_{\alpha \in I} s_\alpha\big)(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)$$

est topologiquement irréductible. Alors il existe une unique représentation continue unitaire admissible $\Pi_J(\chi)$ de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E de longueur finie sans multiplicité, dont le socle est $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta)$ et dont les constituants irréductibles sont exactement les représentations ci-dessus pour tout $I \subset J$ constitué de racines deux à deux orthogonales.

Remarque 7.2.2. — Les séries principales considérées dans le théorème devraient être topologiquement irréductibles lorsque $\chi \circ \alpha^\vee \neq \varepsilon$ pour tout $\alpha \in \Phi$ d'après [**12**, Conjecture 3.1.2]. La conjecture analogue modulo p est vraie d'après [**29**, Théorème 4] lorsque $G = \mathrm{GL}_n$ et [**1**, Théorème 1.3] dans le cas général déployé. En particulier si la réduction $\overline{\chi}$ de χ modulo ϖ_E vérifie $\overline{\chi} \circ \alpha^\vee \neq \omega$ pour tout $\alpha \in \Phi$, alors ces séries principales sont topologiquement irréductibles.

Démonstration. — Soit $\mathcal{P}^\perp(J)$ (resp. $\mathcal{P}_\mathrm{s}^\perp(J)$) l'ensemble des parties (resp. des parties strictes) de J constituées de racines deux à deux orthogonales. Pour tout $I \in \mathcal{P}^\perp(J)$, on pose

$$C_I \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \big(\prod_{\alpha \in I} s_\alpha\big)(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta).$$

Par hypothèse, ces représentations sont topologiquement irréductibles. De plus, elles sont deux à deux distinctes. En effet, soient $I, I' \in \mathcal{P}^\perp(J)$ distincts. La condition d'échange[(8)] montre que $(\prod_{\alpha \in I'} s_\alpha)^{-1} (\prod_{\alpha \in I} s_\alpha)$ admet une décomposition réduite en un produit de réflexions simples deux à deux distinctes (les s_α pour tout $\alpha \in (I \cup I' - I \cap I')$).

[(8)] Si $s, w \in W$ vérifient $\ell(sw) = \ell(w) - 1$ avec s une réflexion simple, alors pour toute décomposition réduite $w = s_1 \ldots s_{\ell(w)}$ il existe $k \in [\![1, \ell(w)]\!]$ tel que $sw = s_1 \ldots s_{k-1} s_{k+1} \ldots s_{\ell(w)}$ (voir [**7**, Chapitre IV, § 1, Proposition 4]).

En utilisant le lemme 5.1.2 et l'hypothèse de généricité sur χ, on en déduit que $(\prod_{\alpha\in I} s_\alpha)(\chi) \neq (\prod_{\alpha\in I'} s_\alpha)(\chi)$. En utilisant la proposition 1.2.12 pour le triplet (G,B,T), on en conclut que $C_I \ncong C_{I'}$.

On démontre l'existence de $\Pi_J(\chi)$ en procédant comme dans [**12**, § 3.3]. Soit $I \in \mathcal{P}^\perp(J)$. On note $G_I \subset G$ le centralisateur de $\bigcap_{\alpha\in I} \ker\alpha$ dans G (c'est le sous-groupe engendré par T et les sous-groupes radiciels correspondant aux racines dans I). D'après [**12**, Lemme 3.1.4], il existe un sous-tore $T' \subset T$ et un isomorphisme $G_I \cong T' \times \mathrm{GL}_2^I$ à travers lequel $T \cong T' \times \prod_{\alpha\in I} T_\alpha$ où $T_\alpha \subset \mathrm{GL}_2$ est le sous-groupe des matrices diagonales. Pour tout $\alpha \in I$, on note $\mathcal{E}_\alpha$ l'unique extension non scindée de $\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)}) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)})$ par $\mathrm{Ind}_{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)})$ donnée par [**12**, Proposition B.2 (i)] (on a bien $\chi_{|T_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \circ \alpha^\vee \notin \{1, \varepsilon, \varepsilon^{-1}\}$ car les séries principales normalisées de $G(\mathbb{Q}_p)$ correspondant à χ et $s_\alpha(\chi)$ sont topologiquement irréductibles et distinctes par hypothèse) et on pose

$$\widetilde{\Pi}_I(\chi) \overset{\text{déf}}{=} (\chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \theta))_{|T'(\mathbb{Q}_p)} \otimes_E \widehat{\bigotimes}_{E,\alpha\in I} \mathcal{E}_\alpha.$$

En utilisant [**12**, Lemme A.6 (ii)], on voit que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a un isomorphisme $\mathrm{soc}^k_{G_I(\mathbb{Q}_p)} \widetilde{\Pi}_I(\chi) / \mathrm{soc}^{k-1}_{G_I(\mathbb{Q}_p)} \widetilde{\Pi}_I(\chi) \cong \bigoplus_{\mathrm{card}\, I'=k} C_{I'}$ avec I' parmi les sous-ensembles de I. On pose

$$\Pi_I(\chi) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}_{(B^- G_I)(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \widetilde{\Pi}_I(\chi)$$

et on vérifie que pour tout $I' \subset I$, il existe une injection $\Pi_{I'}(\chi) \hookrightarrow \Pi_I(\chi)$ unique à multiplication par un scalaire près. En fixant des injections compatibles, on obtient un système inductif $(\Pi_I(\chi))_{I\in\mathcal{P}^\perp(J)}$ et on pose

$$\Pi_J(\chi) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{I\in\mathcal{P}^\perp(J)} \Pi_I(\chi).$$

Par construction, $\Pi_J(\chi)$ vérifie bien la propriété de l'énoncé.

On démontre l'unicité de $\Pi_J(\chi)$ par récurrence sur $\mathrm{card}\, J$. Si $J = \emptyset$, alors $\Pi_\emptyset(\chi) \cong C_\emptyset$ et le résultat est immédiat. On suppose $J \neq \emptyset$ et le théorème vrai avec I au lieu de J pour tout $I \in \mathcal{P}^\perp_{\mathrm{s}}(J)$. On procède par étapes.

Étape 1 : on précise les extensions entre les constituants de $\Pi_J(\chi)$.

Soient $I, I' \in \mathcal{P}^\perp(J)$ distincts. Il existe une extension non scindée de C_I par $C_{I'}$ si et seulement si $\mathrm{card}(I \cup I' - I \cap I') = 1$, auquel cas cette extension est unique. En effet, d'après le point (i) du corollaire 7.1.1 il existe une telle extension si et seulement si $(\prod_{\alpha\in I'} s_\alpha)(\chi) = (s_\beta \prod_{\alpha\in I} s_\alpha)(\chi)$ avec $\beta \in \Delta$. Dans ce cas en utilisant le lemme 5.1.2 et l'hypothèse de généricité sur χ, on en déduit que $\prod_{\alpha\in I'} s_\alpha = s_\beta \prod_{\alpha\in I} s_\alpha$. La condition d'échange montre alors que $\beta \in I$ ou $\beta \in I'$, donc $I' = I - \{\beta\}$ ou $I' = I \cup \{\beta\}$, d'où le résultat concernant l'existence. En utilisant le point (ii) du corollaire 7.1.1 et le fait que C_I et $C_{I'}$ ne sont pas isomorphes (car I et I' sont distincts), on obtient le résultat concernant l'unicité.

Étape 2 : on donne le gradué de la filtration par le socle de $\Pi_J(\chi)$.

Soit $I \in \mathcal{P}^\perp(J)$. On montre que $\deg C_I = \mathrm{card}\, I$ par récurrence sur $\deg C_I$. Si $\deg C_I = 0$, alors $I = \emptyset$ par hypothèse. Sinon, il existe $I' \in \mathcal{P}^\perp(J)$ tel que

$\deg C_{I'} = \deg C_I - 1$ et que l'unique sous-quotient de $\Pi_J(\chi)$ ayant pour constituants $C_{I'}$ et C_I est une extension non scindée de C_I par $C_{I'}$. En utilisant l'étape 1, on en déduit que $\operatorname{card} I = \operatorname{card} I' \pm 1$ et par hypothèse de récurrence avec I', on a $\operatorname{card} I' = \deg C_{I'}$. Par l'absurde, supposons que $\operatorname{card} I = \operatorname{card} I' - 1$, donc $I = I' - \{\alpha\}$ avec $\alpha \in I' - I$. En particulier $I' \neq \emptyset$, donc $C_{I'}$ n'est pas dans le socle de $\Pi_J(\chi)$ par hypothèse, donc il existe $I'' \in \mathcal{P}^{\perp}(J)$ tel que $\deg C_{I''} = \deg C_{I'} - 1$ et que l'unique sous-quotient de $\Pi_J(\chi)$ ayant pour constituants $C_{I''}$ et $C_{I'}$ est une extension non scindée de $C_{I'}$ par $C_{I''}$. En utilisant l'étape 1 et l'hypothèse de récurrence avec I'', on voit qu'il existe $\beta \in I$ tel que $I'' = I' - \{\beta\}$. En utilisant encore l'étape 1 et l'hypothèse de récurrence, on voit que $C_{I'}$ est le seul constituant de $\Pi_J(\chi)$ de degré $\deg C_{I'}$ ayant des extensions non scindées avec C_I et $C_{I''}$. On en déduit que $\Pi_J(\chi)$ admet un sous-quotient ayant $C_{I''}$ pour socle, C_I pour cosocle et un unique constituant intermédiaire $C_{I'}$. Or, une telle représentation n'existe pas d'après le théorème 7.1.2.

On a ainsi montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariant $\operatorname{soc}^k_{G(\mathbb{Q}_p)} \Pi_J(\chi) / \operatorname{soc}^{k-1}_{G(\mathbb{Q}_p)} \Pi_J(\chi) \cong \bigoplus_{\operatorname{card} I = k} C_I$ avec $I \in \mathcal{P}^{\perp}(J)$.

Étape 3 : on décrit la structure interne de $\Pi_J(\chi)$.

Soit $I \in \mathcal{P}^{\perp}(J)$. On suppose $\operatorname{card} I > 0$ et on fixe $\alpha \in I$. On déduit de l'étape 2 qu'il existe un unique sous-quotient de $\Pi_J(\chi)$ ayant pour constituants $C_{I-\{\alpha\}}$ et C_I. On montre par récurrence sur $\operatorname{card} I$ que cet unique sous-quotient est une extension non scindée de C_I par $C_{I-\{\alpha\}}$. En utilisant les étapes 1 et 2, on voit qu'il existe $\beta \in I$ tel que l'unique sous-quotient de $\Pi_J(\chi)$ ayant pour constituants $C_{I-\{\beta\}}$ et C_I est une extension non scindée de C_I par $C_{I-\{\beta\}}$. Si $\alpha = \beta$ (en particulier si $\operatorname{card} I = 1$), alors on obtient le résultat. Sinon, on raisonne par l'absurde et on suppose que l'unique sous-quotient de $\Pi_J(\chi)$ ayant pour constituants $C_{I-\{\alpha\}}$ et C_I est $C_{I-\{\alpha\}} \oplus C_I$. Par hypothèse de récurrence avec $I - \{\beta\}$, l'unique sous-quotient de $\Pi_J(\chi)$ ayant pour constituants $C_{I-\{\alpha,\beta\}}$ et $C_{I-\{\beta\}}$ est une extension non scindée de $C_{I-\{\beta\}}$ par $C_{I-\{\alpha,\beta\}}$. En utilisant encore les étapes 1 et 2, on en déduit que $\Pi_J(\chi)$ admet un sous-quotient ayant $C_{I-\{\alpha,\beta\}}$ pour socle, C_I pour cosocle et un unique constituant intermédiaire $C_{I-\{\beta\}}$. Or, une telle représentation n'existe pas d'après le théorème 7.1.2.

Soit Π l'unique sous-représentation de $\Pi_J(\chi)$ ayant pour cosocle C_I. On a montré que pour tout $\alpha \in I$, la représentation $C_{I-\{\alpha\}}$ apparaît dans Π. En utilisant les étapes 1 et 2, on en déduit que les constituants de Π sont exactement les représentations $C_{I'}$ avec $I' \subset I$. Ainsi, le treillis des sous-représentations de $\Pi_J(\chi)$ est le treillis des parties fermées inférieurement[9] de $(\mathcal{P}^{\perp}(J), \subset)$.

Étape 4 : on construit une sous-représentation de $\Pi_J(\chi)$ *à partir des représentations* $\Pi_I(\chi)$ *avec* $I \in \mathcal{P}^{\perp}_{\mathrm{s}}(J)$.

Pour tout $I \in \mathcal{P}^{\perp}_{\mathrm{s}}(J)$, on déduit de l'étape 3 et du théorème avec I que l'on a une injection $\Pi_I(\chi) \hookrightarrow \Pi_J(\chi)$ dont l'image est l'unique sous-représentation de $\Pi_J(\chi)$ ayant pour cosocle C_I. De plus pour tout $I' \subset I$, l'injection $\Pi_{I'}(\chi) \hookrightarrow \Pi_J(\chi)$ se factorise à travers l'injection $\Pi_I(\chi) \hookrightarrow \Pi_J(\chi)$.

[9] Une partie fermée inférieurement d'un ensemble ordonné $(X, \leq)$ est un sous-ensemble $Y \subset X$ vérifiant $x \leq y \Rightarrow x \in Y$ pour tous $x \in X$ et $y \in Y$.

On en déduit que l'on a un système inductif $(\Pi_I(\chi))_{I\in\mathcal{P}_s^\perp(J)}$ et des injections compatibles $(\Pi_I(\chi)\hookrightarrow\Pi_J(\chi))_{I\in\mathcal{P}_s^\perp(J)}$. Pour tout $I\in\mathcal{P}_{\mathrm{s}}^\perp(J)$, la représentation $\Pi_I(\chi)$ est de longueur finie sans multiplicité et de socle $C_\emptyset$ dont les endomorphismes sont scalaires d'après la proposition 1.2.12 pour le triplet (G,B,T), donc ses endomorphismes sont scalaires. On en déduit que pour tout $I\in\mathcal{P}_{\mathrm{s}}^\perp(J)$, les injections $(\Pi_{I'}(\chi)\hookrightarrow\Pi_I(\chi))_{I'\subset I}$ sont uniques à multiplication par un scalaire près. En particulier, $\varinjlim_{I\in\mathcal{P}_{\mathrm{s}}^\perp(J)}\Pi_I(\chi)$ ne dépend pas à isomorphisme près du choix de ces injections.

La représentation $\Pi_J(\chi)$ est de longueur finie sans multiplicité. De plus pour tous $I,I'\in\mathcal{P}_{\mathrm{s}}^\perp(J)$, l'intersection de $\Pi_I(\chi)$ et $\Pi_{I'}(\chi)$ dans $\Pi_J(\chi)$ est $\Pi_{I\cap I'}(\chi)$ et $I\cap I'\in\mathcal{P}_{\mathrm{s}}^\perp(J)$. Ainsi, on a un isomorphisme naturel

$$\varinjlim_{I\in\mathcal{P}_{\mathrm{s}}^\perp(J)}\Pi_I(\chi)\xrightarrow{\sim}\sum_{I\in\mathcal{P}_{\mathrm{s}}^\perp(J)}\Pi_I(\chi)\subset\Pi_J(\chi).$$

Les constituants de cette sous-représentation sont exactement les représentations C_I avec $I\in\mathcal{P}_{\mathrm{s}}^\perp(J)$. En particulier, l'inclusion est une égalité si J n'est pas constitué de racines deux à deux orthogonales, ce qui conclut la démonstration de l'unicité dans ce cas.

Étape 5 : on termine la preuve de l'unicité de $\Pi_J(\chi)$.

On suppose que J est constitué de racines deux à deux orthogonales. Dans ce cas, on déduit de l'étape 3 que le cosocle de $\Pi_J(\chi)$ est C_J, d'où un isomorphisme

$$\varinjlim_{I\in\mathcal{P}_{\mathrm{s}}^\perp(J)}\Pi_I(\chi)\cong\mathrm{rad}_{G(\mathbb{Q}_p)}\Pi_J(\chi)$$

et on a une suite exacte courte non scindée

$$0\to\mathrm{rad}_{G(\mathbb{Q}_p)}\Pi_J(\chi)\to\Pi_J(\chi)\to C_J\to 0.$$

Il suffit donc de montrer qu'une telle extension est unique.

Soit $\alpha\in J$. Si $J=\{\alpha\}$, alors $\mathrm{rad}_{G(\mathbb{Q}_p)}\Pi_J(\chi)\cong C_\emptyset$ et en utilisant l'étape 1, on obtient le résultat. Dans le cas général, on voit en utilisant l'étape 3 et le théorème avec $J-\{\alpha\}$ et $s_\alpha(\chi)$ que l'on a une suite exacte courte non scindée

$$0\to\Pi_{J-\{\alpha\}}(\chi)\to\Pi_J(\chi)\to\Pi_{J-\{\alpha\}}(s_\alpha(\chi))\to 0.$$

On suppose que $J\neq\{\alpha\}$. Dans ce cas, on en déduit une suite exacte courte non scindée

$$0\to\Pi_{J-\{\alpha\}}(\chi)\to\mathrm{rad}_{G(\mathbb{Q}_p)}\Pi_J(\chi)\to\mathrm{rad}_{G(\mathbb{Q}_p)}\Pi_{J-\{\alpha\}}(s_\alpha(\chi))\to 0,$$

d'où une suite exacte

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(C_J,\Pi_{J-\{\alpha\}}(\chi)\right)&\to\mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(C_J,\mathrm{rad}_{G(\mathbb{Q}_p)}\Pi_J(\chi)\right)\\&\to\mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(C_J,\mathrm{rad}_{G(\mathbb{Q}_p)}\Pi_{J-\{\alpha\}}(s_\alpha(\chi))\right).\end{aligned}$$

On montre que le premier terme de la suite exacte est nul. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une extension non scindée Π de C_J par $\Pi_{J-\{\alpha\}}(\chi)$. Soit $\beta\in J-\{\alpha\}$. En utilisant les étapes 1 et 3, on voit que l'unique quotient de Π ayant pour socle $C_{J-\{\alpha,\beta\}}$ a pour cosocle C_J et un unique constituant intermédiaire $C_{J-\{\alpha\}}$. Or, une telle représentation n'existe pas d'après le théorème 7.1.2. En utilisant le théorème avec $J-\{\alpha\}$ et

$s_\alpha(\chi)$, on voit que le dernier terme de la suite exacte est de dimension 1 sur E (l'unique extension non scindée correspondante est $\Pi_{J-\{\alpha\}}(s_\alpha(\chi))$). On en déduit que

$$\dim_E \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\big(C_J, \mathrm{rad}_{G(\mathbb{Q}_p)}\Pi_J(\chi)\big) = 1$$

ce qui conclut la démonstration de l'unicité dans ce cas. □

Corollaire 7.2.3. — [**12**, Conjecture 3.5.1] *est vraie.*

Démonstration. — On rappelle le contexte de cette conjecture.

Soit $(\widehat{G}, \widehat{B}, \widehat{T})$ le triplet dual de (G, B, T). Pour tout $\Psi \subset \Phi^+$ fermé[10], on note $\widehat{B}_\Psi \subset \widehat{B}$ le sous-groupe engendré par $\widehat{T}$ et les sous-groupes radiciels correspondant aux racines dans Ψ et $W_\Psi \subset W$ le sous-ensemble des éléments $w \in W$ vérifiant $w^{-1}(\Psi) \subset \Phi^+$, ou de façon équivalente $\dot{w}^{-1}\widehat{B}_\Psi\dot{w} \subset \widehat{B}$.

Soit $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \widehat{B}(E) \subset \widehat{G}(E)$ une représentation continue ordinaire. On note $\Psi_\rho \subset \Phi^+$ le plus petit sous-ensemble fermé vérifiant $\mathrm{im}\,\rho \subset \widehat{B}_{\Psi_\rho}(E)$. Soit χ_ρ la composée

$$\begin{aligned} T(\mathbb{Q}_p) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{X}^*(T), \mathbb{Q}_p^\times\big) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathrm{X}^*(T), \mathbb{Z}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p^\times \cong \mathrm{X}^*(\widehat{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p^\times \\ &\hookrightarrow \mathrm{X}^*(\widehat{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p\right)^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{X}^*(\widehat{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{T}(E) \to E^\times \end{aligned}$$

où X^* désigne le groupe des caractères algébriques, l'injection est induite par le symbole d'Artin local et le morphisme suivant par le caractère $\widehat{\chi}_\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\rho} \widehat{B}(E) \twoheadrightarrow \widehat{T}(E)$. Par compacité de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, χ_ρ est un caractère continu unitaire $T(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$. On suppose que ρ est une bonne conjuguée (c'est-à-dire que $\Psi_\rho \subset \Psi_{b\rho b^{-1}}$ pour tout $b \in \widehat{B}(E)$, voir [**12**, Définition 3.2.4]) et générique au sens de [**12**, Définition 3.3.1], c'est-à-dire $\chi_\rho \circ \alpha^\vee \notin \{1, \varepsilon, \varepsilon^{-1}\}$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$.

Soit $w_{\Psi_\rho} \in W_{\Psi_\rho}$. Pour tout $I \subset w_{\Psi_\rho}(\Delta) \cap \Psi_\rho$ constitué de racines deux à deux orthogonales, on a $((\prod_{\alpha\in I} s_\alpha)w_{\Psi_\rho})^{-1}(\chi_\rho) = (\prod_{\alpha\in w_{\Psi_\rho}^{-1}(I)} s_\alpha)(w_{\Psi_\rho}^{-1}(\chi_\rho))$ et par généricité de ρ la représentation

$$\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}\Big(\big(\prod_{\alpha\in I} s_\alpha\big)w_{\Psi_\rho}\Big)^{-1}\big(\chi_\rho\big) \cdot \big(\varepsilon^{-1} \circ \theta\big)$$

devrait être topologiquement irréductible d'après [**12**, Conjecture 3.1.2]. Lorsque c'est le cas (par exemple lorsque la réduction $\overline{\chi}_\rho$ de χ_ρ modulo ϖ_E vérifie $\overline{\chi}_\rho \circ \alpha^\vee \neq \omega$ pour tout $\alpha \in \Phi$, voir la remarque 7.2.2), le théorème 7.2.1 (voir aussi l'étape 2 de sa preuve) avec $\chi = w_{\Psi_\rho}^{-1}(\chi_\rho)$ et $J = \Delta \cap w_{\Psi_\rho}^{-1}(\Psi_\rho)$ montre qu'il existe une unique représentation continue unitaire admissible $\Pi(\rho)_{\Psi_\rho, w_{\Psi_\rho}}$ de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariant

$$\begin{aligned} &\mathrm{soc}^k_{G(\mathbb{Q}_p)}\Pi(\rho)_{\Psi_\rho, w_{\Psi_\rho}} / \mathrm{soc}^{k-1}_{G(\mathbb{Q}_p)}\Pi(\rho)_{\Psi_\rho, w_{\Psi_\rho}} \\ &\qquad \cong \bigoplus_{\mathrm{card}\, I = k} \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}\Big(\big(\prod_{\alpha\in I} s_\alpha\big)w_{\Psi_\rho}\Big)^{-1}\big(\chi_\rho\big) \cdot \big(\varepsilon^{-1} \circ \theta\big) \end{aligned}$$

avec $I \subset w_{\Psi_\rho}(\Delta) \cap \Psi_\rho$ parmi les sous-ensembles de racines deux à deux orthogonales. □

[10] Un sous-ensemble $\Psi \subset \Phi^+$ est fermé si pour tous $\alpha, \beta \in \Psi$, $\alpha + \beta \in \Phi^+ \Rightarrow \alpha + \beta \in \Psi$.

7.3. Conjecture sur les extensions modulo p

On ne fait pas d'hypothèse sur F. Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique standard et $L \subset P$ le sous-groupe de Levi standard.

Définition 7.3.1. — On dit qu'une représentation lisse admissible absolument irréductible π de $L(F)$ sur k_E est *supersingulière* si la représentation lisse admissible irréductible $\overline{\mathbb{F}_p} \otimes_{k_E} \pi$ de $L(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ est supersingulière (voir [**26**, Définition 4.7]).

Exemple 7.3.2. — Les représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_1(F)$ sur k_E sont les caractères lisses $F^\times \to k_E^\times$.

On définit un sous-ensemble de Δ en posant

$$\Delta_L^\perp \overset{\text{déf}}{=} \{\alpha \in \Delta \mid \alpha \perp \beta \text{ pour tout } \beta \in \Delta_L\}.$$

Soit $\alpha \in \Delta_L^\perp$. Comme $\alpha \circ \beta^\vee = 1$ pour tout $\beta \in \Delta_L$, α se prolonge en un caractère algébrique de L (voir la preuve de [**1**, Lemme 3.2]). De plus, l'action de s_α sur $T \cap L^{\mathrm{der}}$ est triviale (car $T \cap L^{\mathrm{der}}$ est engendré par les images des $\beta^\vee$ avec $\beta \in \Delta_L$), donc l'action de s_α sur T se prolonge sur L en faisant agir s_α trivialement sur L^{der} (car $L = TL^{\mathrm{der}}$ et L^{der} est distingué dans L). Si π est une représentation lisse de $L(F)$ sur k_E, on note π^α la représentation lisse de $L(F)$ sur k_E dont le k_E-espace vectoriel sous-jacent est π et sur lequel $l \in L(F)$ agit à travers $s_\alpha(l)$.

La conjecture suivante a été suggérée par Breuil lorsque $G = \mathrm{GL}_n$. Dans les points (iii) et (iv), la condition « Sinon » signifie que les conditions du point (ii) ne sont pas toutes satisfaites.

Conjecture 7.3.3. — *Soient $P, P' \subset G$ deux sous-groupes paraboliques standards, $L \subset P, L' \subset P$ les sous-groupes de Levi standards et π, π' des représentations supersingulières de $L(F), L'(F)$ respectivement sur k_E. On suppose que les représentations $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \pi$ et $\mathrm{Ind}_{P'^-(F)}^{G(F)} \pi'$ sont irréductibles.*

(i) *Si $P' \not\subset P$ et $P \not\subset P'$, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{P'^-(F)}^{G(F)} \pi', \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \pi\right) = 0.$$

(ii) *Si $F = \mathbb{Q}_p$, $P' = P$ et $\pi' \cong \pi^\alpha \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha) \ncong \pi$ avec $\alpha \in \Delta_L^\perp$, alors*

$$\dim_{k_E} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi^\alpha \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha), \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi\right) = 1.$$

(iii) *Sinon si $P' \subset P$, alors le foncteur $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}$ induit un isomorphisme k_E-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{L(F)}\left(\mathrm{Ind}_{(P'^- \cap L)(F)}^{L(F)} \pi', \pi\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{P'^-(F)}^{G(F)} \pi', \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \pi\right).$$

(iv) *Sinon si $P \subset P'$, alors le foncteur $\mathrm{Ind}_{P'^-(F)}^{G(F)}$ induit un isomorphisme k_E-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{L'(F)}\left(\pi', \mathrm{Ind}_{(P^- \cap L')(F)}^{L'(F)} \pi\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{P'^-(F)}^{G(F)} \pi', \mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \pi\right).$$

Remarque 7.3.4. — Sous les conditions du point (ii), il n'existe pas d'extension non scindée de π' par π (car leurs caractères centraux sont distincts) mais on peut construire une extension non scindée entre leurs induites par induction parabolique à partir de l'unique extension non scindée entre les séries principales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ correspondantes.

On démontre cette conjecture pour les extensions par une série principale (sous des hypothèses de généricité lorsque $F = \mathbb{Q}_p$). Si π est une représentation lisse localement admissible de $L(F)$ sur k_E et $\chi : T(F) \to k_E^\times$ est un caractère lisse, alors en tenant compte de l'isomorphisme (4.1.12) avec $A = k_E$ et $U = \chi$, la suite exacte (1.2.10) avec $A = k_E$, $U = \pi$ et $V = \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi$ devient

$$(7.3.5)\quad 0 \to \mathrm{Ext}^1_{L(F)}\left(\pi, \mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} \chi\right) \to \mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \pi, \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi\right) \\ \to \mathrm{Hom}_{L(F)}\left(\pi, \mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{P(F)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi\right)\right).$$

Proposition 7.3.6. — *On suppose $F = \mathbb{Q}_p$. Soient π une représentation supersingulière de $L(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E et $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to k_E^\times$ un caractère lisse.*

(i) *Si $P = B$ et $\pi = s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha) \neq \chi$ avec $\alpha \in \Delta$, alors*

$$\dim_{k_E} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha), \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) = 1.$$

(ii) *Si $P = B$ et $\pi = \chi \neq s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta$, alors le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme k_E-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right).$$

(iii) *Si $P \neq B$ et $(s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)) \circ \beta^\vee \neq 1$ pour tous $\alpha \in \Delta - \Delta_L$ et $\beta \in \Delta_L$, alors le foncteur $\mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme k_E-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{L(\mathbb{Q}_p)}\left(\pi, \mathrm{Ind}_{B_L^-(\mathbb{Q}_p)}^{L(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right).$$

Remarque 7.3.7. — Par réduction modulo ϖ_E^k et dévissage, on obtient la proposition analogue p-adique (c'est-à-dire dans les catégories de représentations continues unitaires admissibles sur E). Pour le point (iii), il faut supposer π non ordinaire résiduellement de longueur finie et les représentations $\mathrm{Ind}_{B_L^-(\mathbb{Q}_p)}^{L(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$ avec $\alpha \in \Delta - \Delta_L$ topologiquement irréductibles.

Démonstration. — On suppose $P = B$. Comme π est absolument irréductible, c'est un caractère lisse $\pi : T(\mathbb{Q}_p) \to k_E^\times$. En utilisant le fait que $s_\alpha(\theta) + \alpha = \theta$ (voir la preuve du corollaire 4.2.12), on voit que $s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha) = s_\alpha(\chi \cdot (\omega \circ \theta)) \cdot (\omega^{-1} \circ \theta)$. Les points (i) et (ii) résultent donc respectivement des points (ii) et (iii) de l'analogue modulo p du corollaire 7.1.1 avec $\chi \cdot (\omega \circ \theta)$ au lieu de χ.

On suppose $P \neq B$ et $(s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)) \circ \beta^\vee \neq 1$ pour tous $\alpha \in \Delta - \Delta_L$ et $\beta \in \Delta_L$. Sous ces conditions, les représentations $\mathrm{Ind}_{B_L^-(\mathbb{Q}_p)}^{L(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)$ avec $\alpha \in \Delta - \Delta_L$ sont irréductibles d'après [**29**, Théorème 4] lorsque $L = \mathrm{GL}_n$ et [**1**, Théorème 1.3] dans le cas général déployé. En utilisant la proposition 4.1.11, on en déduit que le morphisme (4.1.13) avec $A = k_E$ et $U = \chi$ est un isomorphisme $L(\mathbb{Q}_p)$-équivariant

$$\bigoplus_{\alpha\in\Delta-\Delta_L} \mathrm{Ind}_{B_L^-(\mathbb{Q}_p)}^{L(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\mathrm{Ord}_{P(\mathbb{Q}_p)}\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right).$$

Comme π est supersingulière, c'est une représentation supercuspidale d'après [**26**, Corollaire 1.2 (ii)] lorsque $L = \mathrm{GL}_n$ et [**1**, Théorème 1.2] dans le cas général déployé. En particulier pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta_L$, on a

$$\mathrm{Hom}_{L(\mathbb{Q}_p)}\left(\pi, \mathrm{Ind}_{B_L^-(\mathbb{Q}_p)}^{L(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi)\cdot(\omega^{-1}\circ\alpha)\right) = 0.$$

En utilisant la suite exacte (7.3.5), on en déduit le point (iii). □

Proposition 7.3.8. — *On suppose $F \neq \mathbb{Q}_p$. Soient π une représentation lisse admissible de $L(F)$ sur k_E et $\chi : T(F) \to k_E^\times$ un caractère lisse. Le foncteur $\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}$ induit un isomorphisme k_E-linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1_{L(F)}\left(\pi, \mathrm{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} \chi\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G(F)}\left(\mathrm{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} \pi, \mathrm{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi\right).$$

Remarque 7.3.9. — Par réduction modulo ϖ_E^k et dévissage, on obtient la proposition analogue p-adique avec π résiduellement de longueur finie.

Démonstration. — L'isomorphisme se déduit de la suite exacte (7.3.5) en utilisant le corollaire 4.1.14 avec $A = k_E$ et $U = \chi$. □

Remarque 7.3.10. — Le point (iii) de la proposition 7.3.6 et la proposition 7.3.8 (ainsi que leurs analogues p-adiques) sont vrais sans hypothèse sur G.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Abe – « On a classification of irreducible admissible modulo p representations of a p-adic split reductive group », *Compos. Math.* **149** (2013), no. 12, p. 2139–2168.

[2] L. Barthel & R. Livné – « Irreducible modular representations of GL_2 of a local field », *Duke Math. J.* **75** (1994), no. 2, p. 261–292.

[3] I. N. Bernšteĭn & A. V. Zelevinskiĭ – « Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-Archimedean field », *Uspehi Mat. Nauk* **31** (1976), no. 3, p. 5–70.

[4] A. Borel & J. Tits – « Groupes réductifs », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **27** (1965), p. 55–150.

[5] ———, « Compléments à l'article : "Groupes réductifs" », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **41** (1972), p. 253–276.

[6] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*, Hermann, Paris, 1971.

[7] ———, *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4 à 6*, Masson, Paris, 1981.

[8] C. Breuil – « Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ I », *Compos. Math.* **138** (2003), no. 2, p. 165–188.

[9] ———, « Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ II », *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), no. 1, p. 23–58.

[10] ———, « The emerging p-adic Langlands programme », dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Volume II*, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010, p. 203–230.

[11] C. Breuil & M. Emerton – « Représentations p-adiques ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et compatibilité local-global », *Astérisque* **331** (2010), p. 255–315.

[12] C. Breuil & F. Herzig – « Ordinary representations of $G(\mathbb{Q}_p)$ and fundamental algebraic representations », à paraître dans *Duke Mathematical Journal*, 2012.

[13] C. Breuil & V. Paškūnas – « Towards a Modulo p Langlands Correspondence for GL_2 », *Mem. Amer. Math. Soc.* **216** (2012), no. 1016.

[14] K. Buzzard & T. Gee – « The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations », dans *Automorphic Forms and Galois Representations, Volume 1*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 414, Cambridge University Press, Cambridge, 2014, p. 135–187.

[15] P. Colmez – « Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (ϕ, Γ)-modules », *Astérisque* **330** (2010), p. 281–509.

[16] P. Colmez, G. Dospinescu & V. Paškūnas – « The p-adic Local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ », *Cambridge J. Math.* **2** (2014), no. 1, p. 1–47.

[17] M. Demazure & P. Gabriel – *Groupes algébriques. Tome I. Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson & Cie, Paris, 1970.

[18] M. Emerton – « Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups I. Construction and first properties », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **39** (2006), no. 5, p. 775–839.

[19] ______, « Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups I. Definition and first properties », *Astérisque* **331** (2010), p. 355–402.

[20] ______, « Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups II. Derived functors », *Astérisque* **331** (2010), p. 403–459.

[21] ______, « Local-global compatibility in the p-adic langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$ », prépublication, 2011.

[22] ______, « Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups », à paraître dans *Memoirs of the American Mathematical Society*, 2011.

[23] M. Emerton & V. Paškūnas – « On the effaceability of certain δ-functors », *Astérisque* **331** (2010), p. 461–469.

[24] E. Grosse-Klönne – « On special representations of p-adic reductive groups », *Duke Math. J.* **163** (2014), no. 12, p. 2179–2216.

[25] A. Grothendieck – « Sur quelques points d'algèbre homologique », *Tôhoku Math. J.* **9** (1957), no. 2–3, p. 119–221.

[26] F. Herzig – « The classification of irreducible admissible mod p representations of a p-adic GL_n », *Invent. Math.* **186** (2011), no. 2, p. 373–434.

[27] M. Lazard – « Groupes analytiques p-adiques », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **26** (1965), p. 389–603.

[28] B. Mitchell – *Theory of categories*, Pure and Applied Mathematics, vol. 17, Academic Press, New York, 1965.

[29] R. Ollivier – « Critère d'irréductibilité pour les séries principales de $\mathrm{GL}_n(F)$ en caractéristique p », *J. Algebra* **304** (2006), no. 1, p. 39–72.

[30] V. Paškūnas – « The image of Colmez's Montreal functor », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **118** (2013), p. 1–191.

[31] P. Schneider – « Continuous representation theory of p-adic Lie groups », dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Volume II*, European Mathematical Society, Zürich, 2006, p. 1261–1282.

[32] P. Schneider & J. Teitelbaum – « Banach space representations and Iwasawa theory », *Israel J. Math.* **127** (2002), p. 359–380.

[33] P. Schneider & M.-F. Vignéras – « A functor from smooth o-torsion representations to (ϕ, Γ)-modules », dans *On certain L-functions*, Clay Mathematical Proceedings, vol. 13, American Mathematical Society, Providence, 2011, p. 525–601.

[34] J.-P. Serre – *Cohomologie Galoisienne*, cinquième éd., Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[35] ———, *Corps locaux*, quatrième éd., Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1296, Hermann, Paris, 1997.

[36] M.-F. Vignéras – « Série principale modulo p de groupes réductifs p-adiques », *Geom. Funct. Anal.* **17** (2008), no. 6, p. 2090–2112.