Journées du GDR

Analyse Fonctionnelle et Harmonique

Lille, 11-14 Septembre 2006

Evgeny Abakumov (Marne La Vallée) : *Spectres aléatoires et cyclicité.*
Nous examinons le rôle de la cyclicité dans l'étude de la structure spectrale des opérateurs auto-adjoints aléatoires (travail en collaboration avec A. Poltoratski).

Ihab Al Alam (Lens) : *Problèmes de complémentation dans les espaces de Müntz.*
Le but de cet exposé est de construire un espace de Müntz non complementé dans $L_1[0,1]$. La construction de notre exemple est basée sur l'observation que toute projection de $L_1[0,1]$ sur $sp\left\{x^{N-1}, x^{2N-1}, ..., x^{kN-1}\right\}$ est de norme $\geq c \log k$, ce fait nous permet de construire une suite de réels

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{N_k - 1, 2N_k - 1, ..., kN_k - 1\},$$

pour une suite convenable de N_k, telle que toute projection de $L_1[0,1]$ sur $M(\Lambda) = sp\left\{x^{\lambda}, \lambda \in \Lambda\right\}$ n'est pas bornée.

Éric Amar (Bordeaux) : *Suites d'interpolation. Mesures de Carleson.*
Le but de cet exposé est de présenter, dans le cadre des algèbres uniformes, la théorie des mesures de Carleson et des suites d'interpolation. On présentera également les derniers résultats concernant les suites d'interpolation, avec application au cas de la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Les méthodes utilisées sont uniquement d'analyse fonctionnelle et donnent, pour l'instant, de meilleurs résultats que les méthodes utilisant l'équation $\overline{\partial} u = f$.

Florent Baudier (Besançon) : *Caractérisation métrique de la super-réflexivité et du type linéaire pour les espaces de Banach.*
L'exposé porte sur la caractérisation métrique de certaines propriétés géométriques des espaces de Banach, à savoir la super-réflexivité et le type linéaire (ou type de Rademacher). On montre qu'un espace de Banach X est non super-réflexif si et seulement si l'arbre hyperbolique T, i.e l'arbre infini muni de la distance hyberbolique se plonge métriquement dans X. On améliore ainsi une implication d'un résultat de J.Bourgain qui donne une caractérisation métrique de la super-réflexivité en termes de plongements uniformes des arbres finis. De même on caractérise le type d'un espace de Banach X en utilisant le plongement métrique de T mais muni d'une autre distance, par exemple la distance induite par la norme ℓ_p classique.

Frédéric Bayart (Bordeaux) : *Les fonctions universelles sont très universelles*

Une fonction f holomorphe dans un ouvert Ω est dite universelle par rapport au point $z_0 \in \Omega$ si les sommes partielles de son développement en série de Taylor de centre z_0 approchent tout ce qu'il est raisonnable d'approcher en dehors de Ω. Nous prouvons qu'une telle fonction est aussi automatiquement universelle si l'on considère divers types de développements en série (séries de Faber).

Jean-Christophe Bourin (Cergy) : *Inégalités matricielles de sous-additivité.*

Des versions matricielles d'inégalités scalaires évidentes de sous additivité sont données. Par exemple, si f est une fonction concave positive et A, B sont des matrices définies positives, alors il exite des unitaires U, V tels que

$$f(A+B) \leq Uf(A)U^* + Vf(B)V^*$$

Isabelle Chalendar (Lyon) : *Sous-espaces invariants du shift sur l'espace de Hardy $H^2(A)$ où A est une couronne.*

Travail en collaboration avec Nicolas Chevrot et Jonathan Partington.

Nous étudions les sous-espaces invariants de l'opérateur de multiplication par z, noté S, agissant sur $L^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ où ∂A est la frontière d'un anneau A. Aprs avoir donné une description des sous-espaces réduisants (invariants par S et son adjoint), nous étudions les sous-espaces M de $H^2(\partial A, \mathbb{C}^m)$ bi-invariants (invariants par S et son inverse). Nous montrons, en suivant une approche initiée par Sarason, que ceux-ci sont engendrés par au plus m fonctions de M. Comme corollaire, nous obtenons que si M est un sous-espace de $H^2(\partial A, \mathbb{C}^2)$ bi-invariant et égal au graphe d'un opérateur (non nécessairement borné), alors M est engendré par une seule fonction.

Emmanuel Fricain (Lyon) : *Moyenne de la dérivée des produits de Blaschke.*

Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite du disque unité $\mathbb{D}$ satisfaisant la condition de Blaschke

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|) < \infty. \tag{1}$$

Alors le produit de Blaschke associé

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \, \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n \, z}$$

est une fonction holomorphe et bornée dans $\mathbb{D}$ avec des zéros uniquement aux points z_n, $n \geq 1$. Dans cet exposé, nous nous intéressons au comportement de B' quand on s'approche de la frontière et plus précisément, nous étudions la croissance de $\int_0^{2\pi} |B'(re^{i\theta})| \, d\theta$ quand r tend vers 1.

Si (1) est la seule restriction mise sur les zéros de B, alors la seule chose qu'on puisse dire est que

$$\int_0^{2\pi} |B'(re^{i\theta})| \, d\theta = \frac{o(1)}{1-r}, \qquad (r \to 1).$$

Cependant si on impose des conditions plus restrictives sur la croissance des zéros de B, nous montrons qu'on peut obtenir des résultats plus intéressants.

Gilles Godefroy (Paris) : *Un point sur les isomorphismes Lipschitziens entre espaces de Banach.*

Certains espaces de Banach X sont déterminés par leur structure métrique. En d'autres termes, on peut parfois montrer qu'un espace Y Lipschitz-isomorphe a X au sens ou il existe une bijection bi-Lipschitzienne entre X et Y, lui est en fait linéairement isomorphe. Ce n'est pas toujours vrai, cependant, mais les contre-exemples actuellement connus sont tous non-séparables, et on ne sait pas si deux espaces de Banach séparables Lipschitz-isomorphes sont nécessairement linéairement isomorphes. Cette conférence se propose de présenter quelques-uns des outils disponibles pour travailler sur ce problème ou sur certains de ses cas particuliers, et quelques résultats récents qu'ils ont permis d'établir. Les détails techniques seront évités dans toute la mesure du possible.

Andreas Hartmann (Bordeaux) : *Interpolation libre dans des classes de fonctions holomorphes inclues dans la classe de Nevanlinna.*

En 1956, Naftalevič a démontré que la trace de la classe de Nevanlinna N sur un sous ensemble $\Lambda = \{\lambda_k\}_k$ du disque unité $\mathbb{D}$ était égale à un certain espace de suites fixé *a priori* si et seulement si une certaine condition de densité de type Carleson était vérifiée par Λ et si de plus Λ était contenu dans un polygone inscrit dans le cercle unité $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ (i.e. Λ est dans une réunion finie d'angles de Stolz). Le résultat excluant ainsi certaines suites d'interpolation pour H^p d'être d'interpolation pour N (à savoir celles qui s'accumulent tangentiellement au bord). Il s'avère que la trace imposée par Naftalevič est trop grande.
Comme il est difficile d'intuiter dans cette situation une trace naturelle, on peut faire appel à un autre type d'interpolation : interpolation libre. Nous allons discuter ce type d'interpolation, et le résultat d'interpolation que l'on peut alors obtenir pour la classe de Nevanlinna (pour laquelle on obtient alors un espace des traces naturel *a posteriori*).
Nous allons également discuter un résultat plus récent sur l'interpolation dans les grands espaces de Hardy-Orlicz. En effet, l'interpolation dans les espaces de Hardy est caractérisée par la condition (de Carleson)

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \log |B_\lambda(\lambda)|^{-1} < \infty$$

où B_λ est le produit de Blaschke s'annulant sur $\Lambda \setminus \{\lambda\}$, alors que pour la classe de Nevanlinna l'interpolation est caractérisée par la condition beaucoup plus faible $\log |B_\lambda(\lambda)|^{-1} \le u(\lambda)$, u étant une fonction harmonique positive. Il paraît alors naturel de s'intéresser au changement de la condition d'interpolation entre les espaces H^p à la classe de Nevanlinna. Nous allons plus particulièrement discuter des résultats pour les grands espaces de Hardy-Orlicz $\bigcup_{p>0} H^p \subsetneqq H^\Phi \subset N$.

Karim Kellay (Marseille) : *Cyclicité dans l'espace de Dirichlet.*

Nous donnons des conditions suffisantes sur l'ensemble des zéros d'une fonction extérieure pour qu'elle soit cyclique dans l'espace de Dirichlet. (Ce travail est conjoint avec El-Fallah et Ransford)

Stanislas Kupin (Marseille) : *Propriétés asymptotiques des noyaux reproduisants dans des espaces modèles spéciaux.*

Gilles Lancien (Besançon) : *Espaces de Banach métriquement universels.*
Travail en commun avec F. Baudier.

On dira qu'un espace métrique (M,d) se plonge métriquement dans l'espace métrique (N,δ), s'il existe une injection bi-lipschitzienne de (M,d) dans (N,δ). Un célèbre résultat d'Aharoni (1974) assure que tout espace métrique séparable se plonge métriquement dans c_0, qui est donc en un certain sens un espace métrique séparable universel. Notre exposé tournera autour de la question (ouverte) suivante: quels sont les espaces de Banach séparables qui possèdent cette propriété? On ne sait donc pas si un tel espace contient nécessairement un sous-espace isomorphe à c_0. Cependant, N. Kalton a récemment démontré qu'il ne peut être réflexif (même si on autorise des plongements moins contraignants comme les plongements "uniformes" ou "grossiers").
Dans cet exposé, nous améliorons un autre résultat récent, du à Brown et Guentner, qui ont prouvé qu'il existe un Banach réflexif dans lequel se plongent grossièrement tous les espaces métriques à géométrie bornée. Nous prouverons que si X est un espace de Banach sans cotype, alors tous les espaces métriques localement finis se plongent métriquement dans X. Nous examinerons aussi la réciproque.

Pascal Lefèvre (Lens) : *Critères de faible compacité dans certains espaces de fonctions.*

Il existe diverses caractérisations des opérateurs faiblement compacts, la plus connue étant le théorème de factorisation de Davis-Figiel-Johnson-Peczynski. Il existe pour les opérateurs définis sur certains espaces un autre genre de caractérisation en terme d'inégalité de type interpolation. Un tel résultat a été établi par Niculescu pour l'espace des fonctions continues sur un compact au milieu des années 70 puis plus tard par Jarchow sur les C*-algèbres. Nous verrons qu'une telle caractérisation existe pour l'algèbre du disque et H^∞, ainsi que pour les sous-espaces des espaces d'Orlicz-Morse Transue. Ceci a des applications pour les opérateurs de composition.

Christian Le Merdy (Besançon) : *Ensembles d'opérateurs R-bornés et applications.*

Soit $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Rademacher sur un espace de probabilité $(\Sigma; P)$. Etant donnés un espace de Banach X et une suite finie $x_1,\ldots,x_n$ d'éléments de X, notons

$$\Big\|\sum_k \varepsilon_k x_k\Big\|_{\mathrm{Rad(X)}} = \int_\Omega \Big\|\sum_k \varepsilon_k(\lambda) x_k\Big\|_X \, dP(\lambda)$$

la "moyenne de Rademacher" de $(x_1,\ldots,x_n)$. Un ensemble $\mathcal{F}\subset B(X)$ d'opérateurs bornés sur X est dit *R-borné* s'il existe une constante $C\geq 0$ telle que pour toute suite finie $T_1,\ldots,T_n$ d'éléments de $\mathcal{F}$ et pour toute suite finie $x_1, \dots, x_n$ d'éléments de X, on ait

$$\Big\|\sum_k \varepsilon_k T_k(x_k)\Big\|_{\mathrm{Rad(X)}} \le C\Big\|\sum_k \varepsilon_k x_k\Big\|_{\mathrm{Rad(X)}}.$$

Cette notion récente joue un rôle considérable dans des sujets tels que les multiplicateurs de Fourier à valeurs opératorielles, le calcul fonctionnel H^∞, ou les fonctions carrées. Dans cet exposé, je présenterai quelques résultats et applications relatifs à la R-bornitude.

Daniel Li (Lens) : *Opérateurs de composition sur les espaces de Hardy-Orlicz.*

Contrairement au cas classique des espaces de Hardy H^p, les opérateurs de composition sur les espaces de Hardy-Orlicz H^Ψ (espace des fonctions holomorphes dans le disque dont les valeurs au bord sont dans l'espace d'Orlicz L^Ψ)) ont été peu étudiés, du moins lorsque la fonction d'Orlicz Ψ ne vérifie pas la condition Δ_2. On regarde ici ce qui se passe en fonction de la croissance de Ψ, pour des fonctions d'Orlicz Ψ croissant "vite" (travail en collaboration avec P. Lefèvre, H. Queffélec et L. Rodríguez-Piazza).

Françoise Lust-Piquard (Cergy) : *Le petit théorème de Grothendieck pour les espaces symétriques d'opérateurs $E(M,\tau)$ 2-convexes; application aux inégalités de Khintchine non commutatives.*

Soient E un espace invariant par réarrangement, M une algèbre de Von Neumann munie d'une trace τ, $E(M,\tau)$ l'espace symétrique d'opérateurs associé. Si E est 2-convexe, on a la propriété suivante: Pour tout opérateur borné T: $E(M,\tau) \to H$ (H = Hilbert), il existe une forme linéaire positive f convenable telle que

$$\|T(x)\|_H^2 \le K^2 f(x^*x + xx^*), \ x \in E(M,\tau).$$

Ce théorème récent dû à Q.Xu améliore mon ancien résultat qui nécessitait la 2+ε convexité. On sait depuis longtemps que cette propriété pour un espace 2-convexe $E(M,\tau)$ est équivalente à l' inégalité de Khintchine pour $E'(M,\tau)$ (E' = dual de Köthe de E = espace 2-concave)

$$\begin{aligned} &\inf'_{y_i=z_i+w_i}\{\Big\|(\sum z_i^* z_i)^{\frac12}\Big\|_{E'(M,\tau)} + \Big\|(\sum w_i w_i^*)^{\frac12}\Big\|_{E'(M,\tau)}\} \\ \le\ & c(\Big(\int \Big\|\sum \varepsilon_i y_i\Big\|^2_{E'(M,\tau)} dP\Big)^{\frac12}. \end{aligned}$$

Enfin, si E est 2-convexe et $q-$concave pour un $q>0$, cette inégalité pour $E'(M,\tau)$ est équivalente à l'in égalité pour $E(M,\tau)$

$$\begin{aligned} &\Big(\int \Big\|\sum \varepsilon_i x_i\Big\|^2_{E(M,\tau)} dP\Big)^{\frac12} \le \\ &C\max\{\Big\|(\sum x_i^* x_i)^{\frac12}\Big\|_{E(M,\tau)}, \Big\|(\sum x_i x_i^*)^{\frac12}\Big\|_{E(M,\tau)}\}. \end{aligned}$$

Raymond Mortini (Metz) : *Fonctions universelles bornées en une et plusieurs variables.*

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ un domaine et (ϕ_n) une suite d'applications de Ω dans lui-même. De plus, soit $X = H(\Omega)$ l'espace de Fréchet des fonctions holomorphes dans Ω ou bien $X = \mathcal{B} := \{f \in H(\Omega) : \sup_{z\in\Omega} |f(z)| \leq 1\}$ l a boule unité dans $H^\infty(\Omega)$, le sous-espace des fonctions holomorphes bornées. On dit que la fonction $f \in X$ est X-universelle, si "l'orbite" $\{f \circ \phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X. On va charactériser pour $\Omega = \mathbb{D}$ les suites (ϕ_n) qui admettent des fonctions X-universelles. Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$, on résout ce problème dans le cas où $X = \mathcal{B}$ et (ϕ_n) est une suite d'automorphismes. Dans le cas d'une variable, on aborde aussi le problème de l'existence sous-espaces universels fermés de dimension infinie. Les résultats ont été obtenus en collaboration avec F. Bayart, F. Leon-Saavedra, P. Gorkin et S. Grivaux.

Stefan Neuwirth (Besançon) : *Le module maximal d'un trinôme trigonométrique*

En isolant le point où une combinaison linéaire de trois exponentielles complexes atteint son module maximal, on peut étudier les variations de ce module en fonction des arguments des coefficients de cette combinaison.

El Maati Ouhabaz (Bordeaux) : *Noyau de la chaleur et multiplicateurs spectraux.*

Les techniques des noyaux de la chaleur ont été utilisées avec beaucoup de succès dans l'étude de plusieurs problèmes liés aux équations d'évolution et l'analyse harmonique. Mentionnons par exemple, les problèmes de régularité maximale, d'analyticité du semi-groupe, d'interpolation du spectre, de bornitude dans Lp des transformées de Riesz.... Dans cet exposé, nous présenterons quelques avancées récentes sur les multiplicateurs spectraux. Il s'agit de montrer comment les méthodes des noyaux de la chaleur peuvent servir pour montrer des théorèmes de type multiplicateur à la Hörmander pour différentes classes d'opérateurs pour lequelles les techniques d'analyse de Fourier ne semblent pas adaptées (par exemple, les opérateurs différentiels ayant des coefficients variables et agissant dans des domaines non réguliers). Des exemples seront donnés pour illustrer les résultats.

Pierre Petitcunot (Lille) : *Spectre étendu et critères d'hypercyclicité.*

Dans cet exposé, nous donnons un certain nombre de critères d'hypercyclicité analogues à celui de Godefroy-Shapiro. Notre outil de travail est le spectre étendu d'un opérateur.
Soit T un opérateur sur X un espace de Banach, par spectre étendu de T, on entend :

$$EE(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \exists\, R \in B(X),\, R \neq 0,\, TR = \lambda RT\}.$$

Dans un premier temps, nous présentons donc ce spectre étendu et ses récents développements.
Notre critère, sous sa forme générale, est le suivant:
Soit T un opérateur sur X et soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes tels qu'il existe $\rho > 0$ et $M > 0$ avec $sup_n \|p_n\|_{\infty,D(\rho)} < M$.
Si

$$EE(T) \bigcap D \neq \emptyset \text{ ou } EE(T) \bigcap (\mathbb{C} - \overline{D}) \neq \emptyset,$$

alors il existe x de X non-nul, tel que $\{p_n(T)x, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas dense dans X.
Nous appliquons ensuite ce théorème à différentes suites de polynômes, notamment aux polynômes associés au disque unité ($p_n(z) = z^n$) et aux polynômes de Faber. Par exemple, nous obtenons un critère d'existence de sous-ensemble invariant.
Soit T un opérateur sur X, si

$$EE(T) \bigcap D \neq \emptyset \text{ ou } EE(T) \bigcap (\mathbb{C} - \overline{D}) \neq \emptyset,$$

alors T admet un sous-ensemble invariant.

Violeta Petkova (Bordeaux) : *Opérateurs de Wiener-Hopf sur les espaces de fonctions sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans un espace de Hilbert séparable H.*

Un opérateur T borné sur $L^p(\mathbb{R}^+)$ est appelé opérateur de Wiener-Hopf s'il vérifie l'équation

$$T = P^+ S_{-x} T S_x, \ \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{2}$$

Ici S_x et P^+ désignent respectivement la translation par x et la projection sur $\mathbb{R}^+$. Il est bien connu que si T est un opérateur de Wiener-Hopf sur $L^p(\mathbb{R}^+)$, il existe $h_T \in L^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$Tf = P^+ \mathcal{F}^{-1}(h_T \hat{f}), \ \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+).$$

Nous établissons un résultat analogue pour les opérateurs bornés qui vérifient une équation similaire à (2) sur une classe d'espaces de Banach de fonctions sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans un espace de Hilbert séparable.

Jean Roydor (Besançon) : *Sous-espaces complètement 1-complémentés de S^p.*

En se basant sur les travaux d'Arazy et Friedman, on donnera une description des sous-espaces complètement 1-complémentés de S^p $(1 < p \neq 2 < \infty)$.

Emmanuel Rüss (Marseille) : *Une inégalité isopérimétrique pour les valeurs propres d'opérateurs elliptiques du second ordre.*

On montre divers résultats d'optimisation pour la première valeur propre d'opérateurs elliptiques généraux du second ordre sous forme divergence avec condition au bord de Dirichlet dans des domaines bornés non vides de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$. En particulier, on obtient une inégalité de type Faber-Krahn pour ces opérateurs. Les preuves utilisent une nouvelle méthode de réarrangement. Il s'agit d'un travail commun avec F. Hamel et N. Nadirashvili.

Laurian Suciu (Lyon) : *Contractions hyponormales et quasi-isométries.*

For a hyponormal contraction T on a complex Hilbert space we study the maximum invariant, or reducing, subspace on which T (respectively, T^*) is a quasi-isometry. The same problem is discussed for the contractions having the asymptotic limit of the sequence $T^{*n}T^n$ an orthogonal projection. These contractions generalize the cohyponormal contractions. Some applications concerning the quasi-isometries are also given.

Mohamed Zarrabi (Bordeaux) : *Opérateurs polynômialement bornés sur des espaces de Banach.*

On sait par l'inégalité de von Neumann que toute contraction sur un espace de Hilbert est polynomialement bornée. Des exemples simples montrent que ce résultat ne s'étend pas aux contractions définies sur un espace de Banach. En utilisant des techniques d'analyse harmonique, en particulier des résultats concernant les ensembles "minces" , on donne des conditions générales qui entrainent qu'une contraction est polynomialement bornée. Ces conditions portent essentiellement sur le spectre et le comportement de la résolvante ou des itérés de l'opérateur.