THÉORIE DE L'INTÉGRATION

Gijs M. Tuynman

20 septembre 2007

Table des matières

1. Tribus

1.1 Définition. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une collection de sous-ensembles de Ω. On dit que $\mathcal{F}$ est une *tribu sur* Ω si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
(ii) si, pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $A_n \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{F}$;
(iii) si $A \in \mathcal{F}$, alors $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.

En toutes lettres : une tribu contient l'ensemble vide et l'espace total et est stable par réunion et intersection dénombrables ainsi que par complémentaire dans Ω.

Un couple $(\Omega, \mathcal{F})$ où Ω est un ensemble et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω (on dit aussi que Ω est *muni de la tribu* $\mathcal{F}$) est appelé un *espace mesurable*. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés *ensembles ($\mathcal{F}$-)mesurables*.

1.2 Notation. Dans la suite on aura souvent l'occasion de parler du complémentaire d'un ensemble. Pour alléger la notation on convient de noter le complémentaire $\Omega \setminus A$ d'un ensemble A par A^c, à condition que Ω soit l'espace total où se déroule la discussion. Pour toute autre différence d'ensembles A et B on continuera d'utiliser la notation $A \setminus B$.

1.3 Exemples. Soit Ω un ensemble, alors il y a deux tribus "triviales" sur Ω. D'abord la plus petite possible $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ qui ne contient que le strict minimum : le vide et le total. Et on a aussi la plus grande possible $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ qui contient tous les sous-ensembles de Ω. Un autre exemple qu'on peut facilement construire dans le cas général consiste à prendre un sous-ensemble $A \subset \Omega$ arbitrairement. Et alors la collection

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$$

est une tribu contenant 4 éléments (sauf dans les cas triviaux $A = \emptyset$ ou $A = \Omega$, quand elle ne contient que 2).

→ **1.4 Lemme.** *Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une collection de sous-ensembles de Ω. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *$\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω.*
(ii) *$\mathcal{F}$ vérifie les conditions suivantes :*
  (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,
  (ii) si, pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $A_n \in \mathcal{F}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{F}$;
  (iii) si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$;
(iii) *$\mathcal{F}$ vérifie les conditions suivantes :*
  (i) $\Omega \in \mathcal{F}$,
  (ii) si, pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $A_n \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{F}$;
  (iii) si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \setminus B \in \mathcal{F}$;

→ **1.5 Lemme.** *Soit Ω et I deux ensembles quelconques et soit $\mathcal{F}_i$ une tribu sur Ω pour tout $i \in I$. Alors l'intersection $\mathcal{G} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est une tribu sur Ω.*

→ **1.6 Lemme.** *Soit Ω un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une collection de sous-ensembles de Ω. On définit $\mathbf{F}$ comme la collection de toutes les tribus sur Ω qui contiennent $\mathcal{C}$:*

$$\mathbf{F} = \{\, \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{F} \ \textit{et}\ \mathcal{F} \ \textit{est une tribu sur}\ \Omega \,\}\ .$$

Alors on a les propriétés suivantes.

(i) $\mathcal{P}(\Omega) \in \mathbf{F}$.
(ii) $\sigma(\mathcal{C}) = \cap_{\mathcal{F}\in\mathbf{F}} \mathcal{F}$ *est une tribu sur* Ω.
(iii) *si $\mathcal{G}$ est une tribu sur Ω et si $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$.*

1.7 Définition. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une collection de sous-ensembles de Ω. La tribu $\sigma(\mathcal{C})$ définie dans [1.6.ii] par

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{F}\in\mathbf{F}} \mathcal{F} \quad \text{avec} \quad \mathbf{F} = \{\, \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{F} \text{ et } \mathcal{F} \text{ est une tribu sur } \Omega \,\}$$

est appelé *la tribu engendrée par* $\mathcal{C}$. C'est la plus petite tribu sur Ω qui contient $\mathcal{C}$.

→ **1.8 Lemme.** *Soit Ω un ensemble et $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ deux collections de sous-ensembles de Ω. Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D})$.*

→ **1.9 Exercice.** Soit Ω un ensemble et soit $\mathcal{C} = \{\, \{\omega\} \mid \omega \in \Omega \,\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ la collection de tous les singletons. Décrire explicitement la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ selon la cardinalité de Ω (finie, dénombrable, non-dénombrable).

1.10 Définitions. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une collection de sous-ensembles de Ω. On dit que $\mathcal{O}$ est une topologie sur Ω si elle vérifie les trois conditions

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{T}$,
(ii) $O_1, O_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$,
(iii) si I est un ensemble (d'indices) et si pour tout $i \in I$ on a $A_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{O})$ est appelé un *espace topologique* et les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés les *ouverts* (de la topologie). Si $(\Omega, \mathcal{O})$ est un espace topologique, alors une partie $\mathfrak{B} \subset \mathcal{O}$ est appelée *une base pour la topologie* si tout élément de $\mathcal{O}$ s'écrit comme une réunion (quelconque) d'éléments de $\mathfrak{B}$. On dit qu'un espace topologique $(\Omega, \mathcal{O})$ est *à base dénombrable* s'il existe une base $\mathfrak{B}$ pour la topologie $\mathcal{O}$ qui contient un nombre dénombrable d'éléments. Si $A \subset \Omega$ est un sous-ensemble, alors la collection $\mathcal{O}_A \subset \mathcal{P}(A)$ définie par

$$\mathcal{O}_A = \{\, O \cap A \mid O \in \mathcal{O} \,\}$$

est une topologie sur A, appelé *la topologie induite sur A.*

1.11 Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{O})$ un espace topologique. La *tribu de Borel sur* Ω (aussi appelée *tribu borélienne*), notée $\mathcal{B}$ (ou $\mathcal{B}(\Omega)$ si on doit être plus précis, ou encore $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{O})$ si on doit être hyper précis), est la tribu engendrée par les ouverts (de la topologie) : $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O})$. Souvent les éléments de la tribu de Borel sont appelés des *boréliens*, au lieu d'ensembles mesurables.

→ **1.12 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{O})$ un espace topologique. Alors tout ensemble ouvert et tout ensemble fermé sont des boréliens.*

1.13 Utilisation du symbole $\equiv$. Dans un calcul le symbole « $\equiv$ » est utilisé dans le sens « est identiquement égal à » ; le plus souvent cela veut dire que l'égalité est une simple réécriture en utilisant la définition.

→ **1.14 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{O})$ un espace topologique à base dénombrable et soit $\mathfrak{B} \subset \mathcal{O}$ une base dénombrable pour la topologie. Alors la tribu de Borel $\mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{O})$ est aussi engendrée par $\mathfrak{B}$: $\mathcal{B} \equiv \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathfrak{B})$.*

→ **1.15 Lemme/Définition.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $A \subset \Omega$ un sous-ensemble quelconque. Alors la collection $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{P}(A)$ des traces des éléments de $\mathcal{F}$ sur A définie par*

$$\mathcal{F}_A = \{\, F \cap A \mid F \in \mathcal{F} \,\}$$

est une tribu sur A, appelée la tribu induite sur A *ou* la tribu trace de $\mathcal{F}$ sur A*.*

1.16 Remarque. Si $A \subset \Omega$ est mesurable ($A \in \mathcal{F}$), alors la collection $\mathcal{F}_A$ est incluse dans $\mathcal{F}$ parce qu'une tribu est stable par intersection (dénombrable, en particulier finie). Par contre, $\mathcal{F}_A$ n'est pas une tribu sur Ω, simplement parce que $\Omega \notin \mathcal{F}_A$ (sauf dans le cas trivial $A = \Omega$).

1.17 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $A \subset \Omega$ un sous-ensemble. Si $\mathcal{F}$ est engendré par $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, alors $\mathcal{F}_A$ est engendré par $\mathcal{C}_A = \{C \cap A \mid C \in \mathcal{C}\}$:*

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C}) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{F}_A = \sigma(\mathcal{C}_A) \ .$$

Preuve. Par [1.6.iii] on a l'implication $\mathcal{C}_A \subset \sigma(\mathcal{C})_A \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_A) \subset \sigma(\mathcal{C})_A$, ce qui est l'inclusion $\sigma(\mathcal{C}_A) \subset \mathcal{F}_A$. Pour avoir l'inclusion dans l'autre sens, on considère la collection

$$\mathcal{G} = \{G \subset \Omega \mid G \cap A \in \sigma(\mathcal{C}_A)\} \ .$$

Il est évident qu'on a l'inclusion $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$. Si on sait montrer que $\mathcal{G}$ est une tribu, alors on doit avoir $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$. La définition de $\mathcal{G}$ nous dit alors qu'on a l'inclusion $\mathcal{F}_A \subset \sigma(\mathcal{C}_A)$.

Pour montrer que $\mathcal{G}$ est une tribu, on note qu'on a les égalités

$$\emptyset \cap A = \emptyset \quad , \quad \big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} G_n\big) \cap A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} (G_n \cap A) \quad , \quad (\Omega \setminus G) \cap A = A \setminus (G \cap A) \ .$$

Sachant que $\sigma(\mathcal{C}_A)$ est une tribu sur A, les trois propriétés d'une tribu (pour $\mathcal{G}$) en découlent immédiatement. $\boxed{CQFD}$

1.18 Corollaire. *Soit $(\Omega, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset \Omega$ un sous-ensemble. Alors la tribu de Borel sur A associée à la topologie induite $\mathcal{O}_A$ est égale à la tribu induite sur A par la tribu de Borel sur Ω associée à la topologie $\mathcal{O}$:*

$$\mathcal{B}(A, \mathcal{O}_A) = \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{O})_A \ .$$

1.19 Définition. La collection $\mathfrak{B}_b \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ des boules ouvertes dans $\mathbf{R}^d$,

$$\mathfrak{B}_b = \{ \ B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0 \ , \ x \in \mathbf{R}^d \ \}$$

avec

$$B_\varepsilon(x) = \{ \, y \in \mathbf{R}^d \mid \ \|y - x\| < \varepsilon \, \} \ ,$$

est une base pour la topologie euclidienne sur $\mathbf{R}^d$. Autrement dit, un sous-ensemble $O \subset \mathbf{R}^d$ est ouvert si (et seulement si) pour chaque $x \in O$ on peut trouver $\varepsilon(x) > 0$ tel que $B_{\varepsilon(x)}(x) \subset O$. Car si c'est le cas, on peut écrire

$$O = \bigcup_{x\in O} B_{\varepsilon(x)}(x) \ ,$$

ce qui est une réunion de boules ouvertes.

1.20 Lemme. *La collection $\mathfrak{B}_p$ des pavés ouverts dans $\mathbf{R}^d$,*

$$\mathfrak{B}_p = \Big\{ \ \prod_{i=1}^{d} \,]a_i, b_i[\ \mid \ a_i, b_i \in \mathbf{R} \, , \, a_i < b_i \Big\} \ ,$$

est (aussi) une base pour la topologie euclidienne.

Preuve. La stratégie de la preuve est de montrer d'abord que les pavés ouverts $\prod_{i=1}^{d} \,]a_i, b_i[$ sont des ouverts pour la topologie euclidienne et ensuite que chaque boule est la réunion de pavés ouverts. Alors un ouvert étant une réunion de boules et chaque boule étant une réunion de pavés ouverts, on aura montré qu'un ouvert est une réunion de pavés ouverts.

On commence donc avec la preuve que chaque pavé $P = \prod_{i=1}^{d} \,]a_i, b_i[$ est un ouvert. Soit $x \in P$ arbitraire. Alors il existe $\varepsilon(x) > 0$ tel que $B_{\varepsilon(x)}(x) \subset P$.

DESSIN

Il suffit de prendre $\varepsilon(x) = \min(b_1 - x_1, x_1 - a_1, \ldots, b_d - x_d, x_d - a_d)$ quand $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ (voir dessin). On a alors les inclusions

$$P = \bigcup_{x \in P} \{x\} \subset \bigcup_{x \in P} B_{\varepsilon(x)}(x) \subset P \ .$$

On a donc égalité partout, ce qui dit que P est la réunion de boules ouvertes, c'est-à-dire que P est un ouvert pour la topologie euclidienne.

Soit maintenant $B_\varepsilon(x)$ une boule et soit $y \in B_\varepsilon(x)$ arbitraire. On pose $\delta = (\varepsilon - \|y - x\|)/\sqrt{d}$ et $P_y = \prod_{i=1}^{d} \,]y_i - \delta, y_i + \delta[$.

DESSIN

À cause du facteur $1/\sqrt{d}$ dans δ, la plus grande distance entre un point de P_y et y est $\delta \cdot \sqrt{d} = \varepsilon - \|y - x\|$. L'inégalité triangulaire implique alors que P_y est contenu dans $B_\varepsilon(x)$. On a donc les inclusions

$$B_\varepsilon(x) = \bigcup_{y \in B_\varepsilon(x)} \{y\} \subset \bigcup_{y \in B_\varepsilon(x)} P_y \subset B_\varepsilon(x) \ .$$

On a donc égalité partout, ce qui dit que $B_\varepsilon(x)$ est la réunion de pavés ouverts $\prod_{i=1}^{d} \,]a_i, b_i[$. $\boxed{CQFD}$

1.21 Remarque pour les initiés. Le fait que les pavés ouverts forment une base pour la topologie euclidienne peut être considéré comme une variante du fait que la norme euclidienne $\|x\| = \big(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\big)^{1/2}$ est équivalente à la norme $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_d|)$.

1.22 Proposition. *La topologie euclidienne sur $\mathbf{R}^d$ est à base dénombrable, une base dénombrable $\mathfrak{B}_r$ étant donnée par*

$$\mathfrak{B}_r = \Big\{ \prod_{i=1}^{d} \,]a_i, b_i[\ \mid \ a_i, b_i \in \mathbf{Q} \,,\ a_i < b_i \Big\} \ .$$

Preuve. On sait déjà que les éléments de $\mathfrak{B}$ sont des ouverts ; il suffit donc, comme dans la preuve de [1.20], de montrer que chaque pavé ouvert $\prod_{i=1}^{d} \,]a_i, b_i[$ avec

$a_i, b_i \in \mathbf{R}$ est la réunion d'éléments de $\mathfrak{B}_r$. Alors chaque ouvert étant la réunion de pavés avec bornes dans $\mathbf{R}$ et chaque pavé avec bornes dans $\mathbf{R}$ étant la réunion de pavés avec bornes dans $\mathbf{Q}$, on aura montré que chaque ouvert est la réunion de pavés avec bornes dans $\mathbf{Q}$.

Soit donc $P = \prod_{i=1}^d \,]a_i, b_i[$ un pavé ouvert avec $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ et soit $x \in P$ arbitraire. Alors on a les inégalités strictes $a_i < x_i < b_i$. Mais entre deux réels il y a toujours un rationnel, ce qui veut dire qu'il existe $q_i, r_i \in \mathbf{Q}$ tels que $a_i < q_i < x_i < r_i < b_i$. Alors on pose $Q_x = \prod_{i=1}^d \,]q_i, r_i[$, et donc, par le choix des $q_i, r_i \in \mathbf{Q}$ on a $Q_x \subset P$. On a alors les inclusions

$$P = \bigcup_{x\in P} \{x\} \subset \bigcup_{x\in P} Q_x \subset P \ .$$

On a donc égalité partout, ce qui dit que le pavé avec bornes dans $\mathbf{R}$ est une réunion de pavés avec bornes dans $\mathbf{Q}$. $\boxed{CQFD}$

1.23 Proposition. *La tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ sur $\mathbf{R}^d$ muni de la topologie euclidienne est engendrée par l'une des collections suivantes au choix :*

(i) $\mathfrak{B}_p = \left\{ \prod_{i=1}^d \,]a_i, b_i[\ \mid a_i, b_i \in \mathbf{R}\,,\ a_i < b_i \right\}$ *(les pavés ouverts) ;*
(ii) $\mathfrak{B}_2 = \left\{ \prod_{i=1}^d \,]a_i, b_i] \ \mid a_i, b_i \in \mathbf{R}\,,\ a_i < b_i \right\}$ *(les pavés "semi-ouverts") ;*
(iii) $\mathfrak{B}_3 = \left\{ \prod_{i=1}^d \,[a_i, b_i] \ \mid a_i, b_i \in \mathbf{R}\,,\ a_i < b_i \right\}$ *(les pavés fermés) ;*
(iv) $\mathfrak{B}_4 = \left\{ \prod_{i=1}^d \,]-\infty, b_i[\ \mid b_i \in \mathbf{R} \right\}$ *(les hyperquadrants ouverts) ;*
(v) $\mathfrak{B}_5 = \left\{ \prod_{i=1}^d \,]-\infty, b_i] \ \mid b_i \in \mathbf{R} \right\}$ *(les hyperquadrants fermés).*

Preuve. Selon [1.22] la topologie euclidienne est à base dénombrable, une base dénombrable étant donnée par $\mathfrak{B}_r$. Selon [1.14] on a donc $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathfrak{B}_r)$, où $\mathcal{O}$ désigne la topologie euclidienne sur $\mathbf{R}^d$. Mais on a les inclusions $\mathfrak{B}_r \subset \mathfrak{B}_p \subset \mathcal{O}$ et donc on a les inclusions

$$\mathcal{B} \overset{[1.14]}{=} \sigma(\mathfrak{B}_r) \subset \sigma(\mathfrak{B}_p) \subset \sigma(\mathcal{O}) \equiv \mathcal{B} \ .$$

On a donc égalité partout, ce qui montre que la tribu de Borel sur $\mathbf{R}^d$ est engendrée par $\mathfrak{B}_p$.

Pour montrer que les autres collections $\mathfrak{B}_i$, $i = 2, \ldots, 5$ engendrent aussi la tribu de Borel, il suffit donc de montrer qu'elles engendrent la même tribu que $\mathfrak{B}_p$. Pour cela il suffit de montrer les deux inclusions $\mathfrak{B}_i \subset \sigma(\mathfrak{B}_p)$ et $\mathfrak{B}_p \subset \sigma(\mathfrak{B}_i)$ pour chaque $i = 2, \ldots, 5$. On le fera pour le cas $i = 5$ et on laisse les trois autres cas aux bons soins du lecteur.

Pour l'inclusion $\mathfrak{B}_5 \subset \sigma(\mathfrak{B}_p)$, prenons $\prod_{i=1}^d \,]-\infty, b_i] \in \mathfrak{B}_5$, qu'on peut écrire comme

$$\prod_{i=1}^d \,]-\infty, b_i] = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \prod_{i=1}^d \,]b_i - n, b_i] = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \ \bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} \prod_{i=1}^d \,]b_i - n, b_i + \tfrac{1}{k}[\ .$$

Vu que les $\prod_{i=1}^d \,]b_i - n, b_i + \frac{1}{k}[$ appartiennent à $\mathfrak{B}_p$ et qu'une tribu est stable pour réunions et intersections dénombrables, $\prod_{i=1}^d \,]-\infty, b_i]$ appartient à $\sigma(\mathfrak{B}_p)$.

Pour l'autre inclusion, prenons $\prod_{i=1}^d \,]a_i, b_i[\, \in \mathfrak{B}_p$, qu'on peut écrire comme

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^d \,]a_i, b_i[\, &= \prod_{i=1}^d \big(\,]-\infty, b_i[\, \setminus \,]-\infty, a_i]\,\big) \\ &= \Big(\prod_{i=1}^d \,]-\infty, b_i[\Big) \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^d \prod_{i=1}^{j-1} \,]-\infty, b_i[\, \times \,]-\infty, a_j] \times \prod_{i=j+1}^d \,]-\infty, b_i[\Big) \ .\end{aligned}$$

Si on rajoute à cela les égalités

$$\prod_{i=1}^d \,]-\infty, b_i[\, = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \prod_{i=1}^d \,]-\infty, b_i - \tfrac{1}{n}]$$

et

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{j-1} \,]-\infty, b_i[\, \times \,]-\infty, a_j] \times \prod_{i=j+1}^d \,]-\infty, b_i[\\ &\qquad = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \,]-\infty, b_i - \tfrac{1}{n}] \times \,]-\infty, a_j] \times \prod_{i=j+1}^d \,]-\infty, b_i - \tfrac{1}{n}] \ ,\end{aligned}$$

on voit que $\prod_{i=1}^d \,]a_i, b_i[$ appartient à la tribu engendrée par $\mathfrak{B}_5$. $\boxed{CQFD}$

2. La droite achevée

2.1 Définition. *La droite achevée* $\overline{\mathbf{R}}$ est la droite réelle $\mathbf{R}$ à laquelle on ajoute deux éléments ∞ et ϖ : $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\varpi, \infty\}$. On prolonge l'ordre sur $\mathbf{R}$ en un ordre sur $\overline{\mathbf{R}}$ en posant

$$\forall x \in \mathbf{R} : \varpi < x < \infty \ .$$

Si $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ n'est pas vide, on dit que $b \in \overline{\mathbf{R}}$ est une borne supérieure pour A si b vérifie les conditions

$$\forall a \in A : a \leq b \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \overline{\mathbf{R}} : \Big(x < b \Rightarrow \exists a \in A : x < a\Big) \ .$$

En toutes lettres : b est un majorant de A et tout élément plus petit que b n'est pas un majorant ; ou encore : b est le plus petit majorant de A. De la même manière on définit une borne inférieure b par les conditions

$$\forall a \in A : b \leq a \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \overline{\mathbf{R}} : \Big(b < x \Rightarrow \exists a \in A : a < x\Big) \ ,$$

c'est-à-dire : un minorant tel que tout élément plus grand n'est pas un minorant ; ou encore : le plus grand minorant. L'existence et unicité d'une borne supérieure/inférieure sont assurés par [2.2].

→ **2.2 Lemme/Définition.** *Dans la droite achevée on a les propriétés suivantes.*

(i) *Tout ensemble non vide* $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ *possède une unique borne inférieure et une unique borne supérieure dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *; on les note comme* $\inf A$ *et* $\sup A$*.*

(ii) *Toute suite monotone (croissante ou décroissante)* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *d'éléments dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *admet une limite dans* $\overline{\mathbf{R}}$*.*

2.3 Définition. Sur $\overline{\mathbf{R}}$ on définit une topologie en disant que

$$\mathfrak{B} = \{\, [\varpi, b[\,,\ ]a, b[\,,\ ]a, \infty\,] \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

est une base pour cette topologie.

2.4 Remarque pour les initiés. Ce n'est pas n'importe quelle collection de sous-ensembles qui peut être la base d'une topologie. Pour que $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ puisse servir comme base pour une topologie $\mathcal{O}$ sur Ω il faut (et il suffit) que $\mathfrak{B}$ vérifie les conditions

(i) $\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B = \Omega$

(ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}\ \forall \omega \in B_1 \cap B_2\ \exists B_3 \in \mathfrak{B} :\ \omega \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Il est facile de vérifier que ces conditions sont satisfaites par la collection donnée comme base pour la topologie sur $\overline{\mathbf{R}}$.

→ **2.5 Lemme.** *La topologie induite sur* $\mathbf{R}$ *par celle de* $\overline{\mathbf{R}}$ *est la topologie (euclidienne) de* $\mathbf{R}$ *et tout ouvert de* $\mathbf{R}$ *est un ouvert de* $\overline{\mathbf{R}}$*.*

2.6 Nota Bene. Une autre façon de définir la topologie sur $\overline{\mathbf{R}}$ est de considérer la bijection $f : \overline{\mathbf{R}} \to [-\pi/2, \pi/2\,]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) & x \in \mathbf{R} \\ \pi/2 & x = \infty \\ -\pi/2 & x = \varpi\ , \end{cases}$$

et de dire qu'un ensemble $O \subset \overline{\mathbf{R}}$ est ouvert si (et seulement si) $f(O)$ est une ouvert de $[-\pi/2, \pi/2\,]$. Cette façon de définir la topologie de $\overline{\mathbf{R}}$ permet de voir directement que $\overline{\mathbf{R}}$ est un espace métrique où une métrique $d : \overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}_+$ est donnée par

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|\ ,$$

c'est-à-dire qu'on transporte la métrique standard sur $[-\pi/2, \pi/2\,]$ vers $\overline{\mathbf{R}}$ via la bijection f.

Cette métrique permet d'unifier les différentes définitions de limites dans le cadre de fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Citons trois cas, où a et ℓ sont des réels :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad &\overset{\text{déf}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall 0 < |x-a| < \delta : |f(x) - \ell| < \varepsilon \\
\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad &\overset{\text{déf}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall 0 < |x-a| < \delta : f(x) > \varepsilon \\
\lim_{x\to \infty} f(x) = \ell \quad &\overset{\text{déf}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x > \delta : |f(x) - \ell| < \varepsilon \; .
\end{aligned}$$

Dans ces définitions on a volontairement gardé les mêmes symboles, bien qu'il soit d'usage de remplacer dans la deuxième définition le symbole ε par M et dans la troisième définition le symbole δ par M.

Si on sait que la condition $d(x, \infty) < \varepsilon$ se traduit comme $x > \operatorname{cotan}(\varepsilon)$, il n'est pas difficile de voir que ces trois définitions citées ci-dessus sont équivalentes aux définitions

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall 0 < d(x,a) < \delta : d(f(x), \ell) < \varepsilon \\
\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall 0 < d(x,a) < \delta : d(f(x), \infty) < \varepsilon \\
\lim_{x\to \infty} f(x) = \ell \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall 0 < d(x,\infty) < \delta : d(f(x), \ell) < \varepsilon \; .
\end{aligned}$$

Et on voit que l'utilisation de la métrique d sur $\overline{\mathbf{R}}$ permet d'écrire ces trois définitions de la même façon.

2.7 Remarque pour les initiés. Ce n'est pas une surprise que l'utilisation de la métrique d sur $\overline{\mathbf{R}}$ permette d'unifier les différentes notions de limite. La notion de limite étant une notion topologique, elle ne dépend même pas du fait que $\overline{\mathbf{R}}$ est un espace métrique.

→ **2.8 Lemme.** *La topologie sur* $\overline{\mathbf{R}}$ *est à base dénombrable, une base dénombrable étant donnée par*

$$\mathfrak{B}_r = \{\, [\varpi, b[\,,\ ]a, b[\,,\ ]a, \infty] \mid a, b \in \mathbf{Q} \} \; .$$

2.9 Lemme. $B \subset \overline{\mathbf{R}}$ *est un borélien de* $\overline{\mathbf{R}}$ *si et seulement si* $B \cap \mathbf{R}$ *est un borélien de* $\mathbf{R}$.

2.10 Corollaire. *Tout borélien de* $\mathbf{R}$ *est un borélien de* $\overline{\mathbf{R}}$ *et la tribu sur* $\mathbf{R}$ *induite par la tribu de Borel de* $\overline{\mathbf{R}}$ *est la tribu de Borel de* $\mathbf{R}$.

2.11 Proposition. *La tribu de Borel $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$ sur $\overline{\mathbf{R}}$ muni de sa topologie naturelle est engendrée par l'une des collections suivantes au choix :*

(i) $\mathfrak{B}_1 = \big\{\ [\varpi, b[\ \mid\ b \in \mathbf{R}\,\big\}$ *(les demi-droites ouvertes) ;*
(ii) $\mathfrak{B}_2 = \big\{\ [\varpi, b]\ \mid\ b \in \mathbf{R}\,\big\}$ *(les demi-droites fermées).*

Preuve. • Notons $\mathfrak{B} = \{\,[\varpi, b[\,, \,]a, b[\,, \,]a, \infty\,]\ \mid\ a, b \in \mathbf{R}\}$ la base canonique de la topologie sur $\overline{\mathbf{R}}$ et $\mathfrak{B}_r = \{\,[\varpi, b[\,, \,]a, b[\,, \,]a, \infty\,]\ \mid\ a, b \in \mathbf{Q}\}$ une base dénombrable. Par [1.14] $\mathcal{B}$ est engendré par $\mathfrak{B}_r$ et donc les inclusions $\mathfrak{B}_r \subset \mathfrak{B} \subset \mathcal{O}$ nous donnent les inclusions

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathfrak{B}_r) \subset \sigma(\mathfrak{B}) \subset \sigma(\mathcal{O}) \equiv \mathcal{B}\ ,$$

et donc $\mathcal{B} = \sigma(\mathfrak{B})$. De l'inclusion $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$ on déduit l'inclusion $\sigma(\mathfrak{B}_1) \subset \sigma(\mathfrak{B}) \equiv \mathcal{B}$.

Pour obtenir l'inclusion dans l'autre sens, on note les égalités

$$]a, b[\ = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} [\varpi, b[\ \setminus\ [\varpi, a + \tfrac{1}{n}[\qquad \text{et} \qquad]a, \infty\,] = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \overline{\mathbf{R}} \setminus [\varpi, a + \tfrac{1}{n}[\ ,$$

ce qui montre l'inclusion $\mathfrak{B} \subset \sigma(\mathfrak{B}_1)$. Par [1.6.iii] on a donc aussi $\sigma(\mathfrak{B}) \subset \sigma(\mathfrak{B}_1)$.

• Vu qu'on a les égalités

$$[\varpi, b\,] = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} [\varpi, b + \tfrac{1}{n}[\qquad \text{et} \qquad [\varpi, b[\ = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} [\varpi, b - \tfrac{1}{n}\,]\ ,$$

on a les inclusions $\mathfrak{B}_1 \subset \sigma(\mathfrak{B}_2)$ et $\mathfrak{B}_2 \subset \sigma(\mathfrak{B}_1)$. Par une double application de [1.6.iii] on a donc l'égalité $\sigma(\mathfrak{B}_1) = \sigma(\mathfrak{B}_2)$. $\boxed{CQFD}$

2.12 Définition. On définit les ensembles $\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Add}}$, $\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Soust}}$ et $\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Mult}}$ comme

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Add}} &= \overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}} \setminus \{(\infty, \varpi), (\varpi, \infty)\} \\
\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Soust}} &= \overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}} \setminus \{(\infty, \infty), (\varpi, \varpi)\} \\
\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Mult}} &= \overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}} \setminus \{(0, \infty), (\infty, 0), (0, \varpi), (\varpi, 0)\}\ .
\end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de voir que les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication se prolongent par continuité sur respectivement $\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Add}}$, $\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Soust}}$ et $\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Mult}}$. Une autre façon de dire cela est de dire que les trois opérations sont compatibles avec des limites quand on se restreint aux ensembles correspondants. Avec l'interprétation usuelle que $\varpi = -\infty$ (qu'on fait dès maintenant), on voit que la définition des ensembles $\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Add}}$, $\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Soust}}$ et $\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Mult}}$ est faite d'une telle façon qu'on évite l'addition de ∞ et $-\infty$, qu'on évite la soustraction de ∞ et ∞ (et de $-\infty$ et $-\infty$) et qu'on évite la multiplication de 0 avec $\pm\infty$. Mais ces cas sont exactement les cas où on ne peut pas donner une définition cohérente avec des limites. Par exemple, si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ et si $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, on ne peut rien dire de $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)$. Par contre, si $\lim_{n\to\infty} x_n = -2$ et si $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, on est sûr qu'on a $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = -\infty$.

2.13 Corollaire. *Toute série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ d'éléments positifs dans $\overline{\mathbf{R}}$ ($a_n \in \overline{\mathbf{R}}_+$) converge dans $\overline{\mathbf{R}}$ dans le sens que la suite des sommes partielles $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ admet une limite (dans $\overline{\mathbf{R}}$).*

2.14 Définition. Sur $\overline{\mathbf{R}}$ on définit une "nouvelle" opération, notée $\centerdot : \overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{R}}$ et qu'on appelle *le produit tordu*, par

$$\forall x, y \in \overline{\mathbf{R}} \qquad : \qquad x \centerdot y = \begin{cases} xy \equiv x \cdot y & x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ ou } y = 0 \ . \end{cases}$$

Sur $\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Mult}}$ l'opération $\centerdot$ coïncide avec le produit usuel ; c'est donc un prolongement de la multiplication. Mais $\centerdot$ ne vérifie pas la propriété de la distributivité et n'est pas continue. On l'utilisera surtout pour résumer plusieurs formules en une, ce qui simplifiera la lecture et la compréhension.

2.15 Remarque pour les comparateurs. Certains auteurs présentent la définition du produit tordu comme une convention et le notent comme le produit usuel. Ce langage est trompeur car cela suggère qu'on a un choix et il n'en est rien. L'introduction du produit tordu (sa définition) se fait pour des raisons de commodité. Au lieu d'avoir à écrire deux lignes pour un résultat en séparant le cas zéro/infini des autres cas, on peut l'écrire en une ligne en utilisant le produit tordu, ce qui rend du coup le résultat plus lisible. Ce sont donc les résultats qu'on démontre qui motivent la définition du produit tordu. Ce qui est surprenant est que (quasiment) tous les résultats se résument avec le produit tordu tel qu'il est donné.

→ **2.16 Lemme.** *Les opérations d'addition, soustraction et multiplication (non tordue) sur $\overline{\mathbf{R}}$ vérifient, chaque fois que les formules sont définies, les règles usuelles du calcul : commutativité, associativité, distributivité.*

→ **2.17 Lemme.** *Le produit tordu est commutatif et associatif ; il vérifie la distributivité sur $\overline{\mathbf{R}}_+$:*

$$\forall a, b, c \in \overline{\mathbf{R}}_+ \quad : \quad a \centerdot (b + c) = (a \centerdot b) + (a \centerdot c) \ .$$

3. Applications mesurables

3.1 Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(X, \mathcal{G})$ deux espaces mesurables. Une application $f : \Omega \to X$ est dite *mesurable* (ou, si on doit être plus précis, *mesurable pour les* *tribus $\mathcal{F}$ sur Ω et $\mathcal{G}$ sur X* ou *$\mathcal{F}$-$\mathcal{G}$-mesurable*), si elle vérifie la condition

$$\forall B \in \mathcal{G} : f^{-1}(B) \in \mathcal{F} \ .$$

3.2 Terminologie. Sauf contre-indications, on munit toujours les espaces $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\overline{\mathbf{R}}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}^d$ de la tribu de Borel associée à leur topologie naturelle : la topologie euclidienne pour $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}^d$, la topologie discrète sur $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$ (qui est d'ailleurs induite par la topologie euclidienne sur $\mathbf{R}$). En conséquence, si $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable et si $f : \Omega \to \mathbf{K}$ est une application avec $\mathbf{K} = \mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\overline{\mathbf{R}}$, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{R}^d$, on dira que f est mesurable si elle est mesurable pour la tribu $\mathcal{F}$ sur Ω et la tribu de Borel sur $\mathbf{K}$.

→ **3.3 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $A \subset \Omega$ un sous-ensemble. Alors la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A : \Omega \to \mathbf{R}$ est mesurable si et seulement si A est mesurable (appartient à $\mathcal{F}$).*

3.4 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{O})$ et $(X, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables et soit $f : \Omega \to X$ une application. Si $\mathcal{G}$ est engendrée par $\mathcal{C}$: $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C})$, alors f est mesurable si et seulement si elle vérifie la condition*

$$\forall C \in \mathcal{C} : f^{-1}(C) \in \mathcal{F} \ .$$

Preuve. Si f est mesurable, alors le fait que $\mathcal{C}$ est inclus dans $\mathcal{G}$ implique que la condition est vérifiée. Supposons donc que la condition est vérifiée et posons

$$\mathcal{H} = \{B \in \mathcal{G} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \ .$$

Alors par hypothèse $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$. Si on montre que $\mathcal{H}$ est une tribu, alors par [1.8] on peut conclure que $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, et donc que f est mesurable.

Pour montrer que $\mathcal{H}$ est une tribu, on vérifie les propriétés. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F}$ donc $\emptyset \in \mathcal{H}$. Si $B_n \in \mathcal{H}$, alors

$$f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} f^{-1}(B_n)$$

appartient à $\mathcal{F}$ car ce dernier est une tribu. Donc $\cup_{n \in \mathbf{N}} B_n$ appartient à $\mathcal{H}$. Et pour terminer, si $B \in \mathcal{H}$, alors

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$$

appartient à $\mathcal{F}$ et donc B^c appartient à $\mathcal{H}$. $\boxed{CQFD}$

→ **3.5 Corollaire.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et soit $f : \Omega \to \mathbf{R}$ une application. Alors les énoncés suivants sont équivalents.*

(i) *f est une application mesurable.*
(ii) *Pour tout $a, b \in \mathbf{R}$ l'ensemble $f^{-1}(\,]a, b]\,)$ est mesurable.*
(ii) *Pour tout $a, b \in \mathbf{R}$ l'ensemble $f^{-1}(\,]a, b[\,)$ est mesurable.*
(iii) *Pour tout $a \in \mathbf{R}$ l'ensemble $f^{-1}(\,]-\infty, a[\,)$ est mesurable.*
(iv) *Pour tout $a \in \mathbf{R}$ l'ensemble $f^{-1}(\,]-\infty, a]\,)$ est mesurable.*

→ **3.6 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(X, \mathcal{G})$ deux espaces mesurables, soit $f : \Omega \to X$ une application mesurable et soit $A \subset \Omega$ un sous-ensemble (pas nécessairement dans $\mathcal{F}$). Alors la restriction de f à A, $f|_A : A \to X$ est $\mathcal{F}_A$-$\mathcal{G}$-mesurable.*

3.7 Proposition. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(X, \mathcal{G})$ deux espaces mesurables, $A \in \mathcal{F}$ un ensemble mesurable et $f : \Omega \to X$ une application. Si les restrictions de f à A et à son complémentaire A^c sont $\mathcal{F}_A$-$\mathcal{G}$ respectivement $\mathcal{F}_{A^c}$-$\mathcal{G}$-mesurables, alors f est $\mathcal{F}$-$\mathcal{G}$ mesurable.*

Preuve. Il faut montrer que pour tout $G \in \mathcal{G}$ l'ensemble $f^{-1}(G)$ appartient à $\mathcal{F}$. Pour cela on note qu'on a pour tout $B \subset X$ les égalités

$$\big(f|_A\big)^{-1}(B) = \{\omega \in A \mid \big(f|_A\big)(\omega) \in B\} = \{\omega \in A \mid f(\omega) \in B\}$$

et

$$\big(f|_{A^c}\big)^{-1}(B) = \{\omega \in A^c \mid \big(f|_{A^c}\big)(\omega) \in B\} = \{\omega \in A^c \mid f(\omega) \in B\}\ .$$

On a donc l'égalité

$$f^{-1}(G) = \big(f|_A\big)^{-1}(G) \cup \big(f|_{A^c}\big)^{-1}(G)\ .$$

Par hypothèse $\big(f|_A\big)^{-1}(G) \in \mathcal{F}_A$ et $\big(f|_{A^c}\big)^{-1}(G) \in \mathcal{F}_{A^c}$. Vu que A appartient à $\mathcal{F}$ on en déduit ([1.16]) que $\big(f|_A\big)^{-1}(G)$ et $\big(f|_{A^c}\big)^{-1}(G)$ appartiennent à $\mathcal{F}$. Et donc $f^{-1}(G)$ appartient à $\mathcal{F}$. $\boxed{CQFD}$

→ **3.8 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$, $(X, \mathcal{G})$ et $(Y, \mathcal{H})$ trois espaces mesurables et soit $f : \Omega \to X$ et $g : X \to Y$ deux applications mesurables. Alors la fonction composée $g \circ f : \Omega \to Y$ est mesurable.*

→ **3.9 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{O})$ et $(X, \mathcal{T})$ deux espaces topologiques et soit $f : \Omega \to X$ une application continue. Alors f est mesurable pour les tribus de Borel associées.*

→ **3.10 Corollaire.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $f : \Omega \to \mathbf{K}$ une application mesurable avec $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$. Alors l'application $|f| : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ est aussi mesurable.*

3.11 Remarque. La combinaison de [3.8] et [3.9] permet (par exemple) de montrer facilement que, si $f : \Omega \to \mathbf{R}$ est mesurable, alors $g(\omega) = \sin(f(\omega))$ est une application mesurable sur Ω.

3.12 Définition. Soit Ω un ensemble et soit $f_n : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$, $n \in \mathbf{N}$ une suite de fonctions. On définit les fonctions $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} f_n, \inf\limits_{n\in\mathbf{N}} f_n, \limsup\limits_{n\to\infty} f_n, \liminf\limits_{n\to\infty} f_n : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ par les formules

$$\begin{aligned}
\big(\sup_{n\in\mathbf{N}} f_n\big)(\omega) &= \sup_{n\in\mathbf{N}} f_n(\omega) \quad , \quad & \big(\limsup_{n\to\infty} f_n\big)(\omega) &= \inf_{n\in\mathbf{N}} \big(\sup_{k\geq n} f_k(\omega)\big) \\
\big(\inf_{n\in\mathbf{N}} f_n\big)(\omega) &= \inf_{n\in\mathbf{N}} f_n(\omega) \quad , \quad & \big(\liminf_{n\to\infty} f_n\big)(\omega) &= \sup_{n\in\mathbf{N}} \big(\inf_{k\geq n} f_k(\omega)\big)
\end{aligned}$$

3.13 Remarque. Le fait qu'on considère des fonctions f_n à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ nous garantit que les fonctions $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} f_n, \inf\limits_{n\in\mathbf{N}} f_n, \limsup\limits_{n\to\infty} f_n, \liminf\limits_{n\to\infty} f_n : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ sont bien définies à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$.

3.14 Lemme. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite avec $a_n \in \overline{\mathbf{R}}$. Alors on a toujours l'inégalité $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$. La limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe (dans $\overline{\mathbf{R}}$) si et seulement si $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ (auquel cas c'est égal à $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$).*

Preuve. • La suite $S_n = \sup_{k\geq n} a_k$ est décroissante (on prend le sup sur de moins en moins d'éléments) et la suite $s_n = \inf_{k\geq n} a_k$ est croissante. On a donc les égalités $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$ et $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$. De plus, on a l'inégalité $s_n \leq S_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En prenant la limite on obtient donc l'inégalité $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

• Supposons maintenant que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbf{R}$ existe et appartient à $\mathbf{R}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq N$ implique $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Il s'ensuit que pour $n \geq N$ on a les inégalités

$$|s_n - \ell| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |S_n - \ell| \leq \varepsilon \ .$$

En prenant la limite $n \to \infty$ on obtient donc les inégalités

$$|\liminf_{n\to\infty} a_n - \ell| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |\limsup_{n\to\infty} a_n - \ell| \leq \varepsilon \ .$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit qu'on doit avoir

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \ell = \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, alors pour tout $M > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq N$ implique $a_n \geq M$. Il s'ensuit qu'on a pour tout $n \geq N$ l'inégalité

$$s_n \geq M \ .$$

En prenant la limite $n \to \infty$ on obtient donc $\liminf_{n\to\infty} a_n \geq M$. Étant donné que M est arbitraire on en déduit qu'on doit avoir $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$. En combinant ceci avec l'inégalité $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$ on obtient donc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \ .$$

Le cas $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ étant similaire, on a donc montré que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors on a l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \ .$$

• Supposons maintenant qu'on a l'égalité $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \ell$. Si ce ℓ appartient à $\mathbf{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ tels qu'on a les implications

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |s_n - \ell| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad n \geq N_2 \Longrightarrow |S_n - \ell| < \varepsilon \ .$$

Pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$ on a donc en particulier les inégalités

$$\ell - \varepsilon < \inf_{k\geq n} a_k \leq a_n \leq \sup_{k\geq n} < \ell + \varepsilon \ ,$$

et donc l'inégalité $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Il s'ensuit qu'on a $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ comme voulu.

Si $\ell = \infty$, alors il existe pour tout $M > 0$ un $N \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq N$ implique $s_n \geq M$. Pour tout $n \geq N$ on a donc l'inégalité

$$a_n \geq \inf_{k\geq n} a_k \geq M \ ,$$

et donc $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Avec la remarque que le cas $\ell = -\infty$ est similaire on a terminé la preuve. $\boxed{CQFD}$

3.15 Lemme. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et soit* $f_n : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$, $n \in \mathbf{N}$ *une suite de fonctions mesurables. Alors* $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} f_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}} f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ *sont aussi mesurables.*

Preuve. Pour $b \in \mathbf{R}$ et $\omega \in \Omega$ il est facile de voir qu'on a l'équivalence

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} f_n(\omega) \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall n \in \mathbf{N} : f_n(\omega) \leq b \ .$$

Si on traduit cela en termes d'images réciproques, on obtient l'égalité

$$\big(\sup_{n\in\mathbf{N}} f_n\big)^{-1}([\,-\infty, b\,]) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} f_n^{-1}([\,-\infty, b\,]) \ .$$

L'ensemble $[\,-\infty, b\,]$ est un borélien dans $\overline{\mathbf{R}}$ et les f_n sont mesurables, donc le membre de droite est un ensemble mesurable dans $\mathcal{F}$. Sachant que les ensembles de la forme $[\,-\infty, b\,]$ engendrent la tribu de Borel sur $\overline{\mathbf{R}}$ [2.11], on peut appliquer [3.4] pour conclure que $\sup_{n\in\mathbf{N}} f_n$ est mesurable.

Pour $\inf_{n\in\mathbf{N}} f_n$ on procède d'une façon analogue. On a l'équivalence

$$\inf_{n\in\mathbf{N}} f_n(\omega) < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists n \in \mathbf{N} : f_n(\omega) < b \ .$$

Traduit en termes d'images réciproques on obtient l'égalité

$$\big(\inf_{n\in\mathbf{N}} f_n\big)^{-1}([\,-\infty, b\,[) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} f_n^{-1}([\,-\infty, b\,[) \ .$$

Et maintenant, $[\,-\infty, b\,[$ est un borélien et les f_n sont mesurables, donc le membre de droite est dans $\mathcal{F}$. Vu que les $[\,-\infty, b\,[$ engendrent la tribu de Borel [2.11], on peut conclure avec [3.4] que $\inf_{n\in\mathbf{N}} f_n$ est mesurable.

Pour la fonction $\limsup_{n\to\infty} f_n$ on introduit les fonctions $F_n = \sup_{k\geq n} f_k$, ce qui donne l'égalité $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} F_n$. Par l'argument précédent chaque F_n est mesurable comme sup d'une suite de fonctions mesurables. Et alors $\limsup_{n\to\infty} f_n$ est mesurable comme inf d'une suite mesurables. L'argument pour $\liminf_{n\to\infty} f_n$ est semblable et laissé au lecteur. $\boxed{CQFD}$

3.16 Corollaire. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable, soit* $f_n : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ *une suite de fonctions mesurables convergeant simplement vers une fonction* $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ *:* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$*. Alors* f *est mesurable. Si* $g, h : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ *sont mesurables, alors* $\min(g,h)$ *et* $\max(g,h)$ *sont mesurables.*

Preuve. Si $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, alors par [3.14] on a l'égalité $\liminf_{n\to\infty} f_n = f$. Mais $\liminf_{n\to\infty} f_n$ est mesurable, donc f l'est. Si on définit la suite de fonctions g_n par $g_0 = g$ et $g_n = h$ pour $n > 0$, alors $\min(g,h) = \inf_{n\in\mathbf{N}} g_n$ et $\max(g,h) = \sup_{n\in\mathbf{N}} g_n$. $\boxed{CQFD}$

3.17 Corollaire. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et soit* $f_n : \Omega \to \mathbf{K}$ *une suite de fonctions mesurables (avec* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$*,* $\overline{\mathbf{R}}$ *ou* $\mathbf{C}$*). Alors l'ensemble*

$$\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \ \textit{existe dans}\ \mathbf{K}\}$$

est mesurable.

Preuve. $\boxed{CQFD}$

→ **3.18 Exercice.** Donner une fonction non-continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pour laquelle il existe un sous-ensemble $A \subset \mathbf{R}$ tel que les restrictions $f|_A$ et $f|_{A^c}$ soient continues sur A respectivement A^c.

4. Espaces produits

4.1 Notation. Soit Ω et X deux ensembles et soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une collection de sous-ensembles de Ω et $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ une collection de sous-ensembles de X. On définit la collection $\mathcal{C} \circledast \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega \times X)$ par

$$\mathcal{C} \circledast \mathcal{D} = \{ C \times D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D} \} .$$

Autrement dit, $\mathcal{C} \circledast \mathcal{D}$ est l'ensemble de tous les produits d'un élément de $\mathcal{C}$ avec un élément de $\mathcal{D}$. Il ne faut pas confondre l'ensemble $\mathcal{C} \circledast \mathcal{D}$ avec le produit $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, car ce dernier est l'ensemble de tous les *couples* (C, D) avec $C \in \mathcal{C}$ et $D \in \mathcal{D}$.

4.2 Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(X, \mathcal{G})$ deux espaces mesurables. Sur le produit $\Omega \times X$ on définit *la tribu produit*, notée $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, comme la tribu engendrée par $\mathcal{F} \circledast \mathcal{G}$:

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{F} \circledast \mathcal{G}) .$$

→ **4.3 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(X, \mathcal{G})$ deux espaces mesurables. La tribu produit $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ est la plus petite tribu sur $\Omega \times X$ telle que les projections canoniques $\pi_\Omega : \Omega \times X \to \Omega$ et $\pi_X : \Omega \times X \to X$ (définies par $\pi_\Omega(\omega, x) = \omega$ et $\pi_X(\omega, x) = x$) sont mesurables.*

4.4 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(X, \mathcal{G})$ deux espaces mesurables et supposons que $\mathcal{F}$ est engendrée par $\mathcal{C}$ et que $\mathcal{G}$ est engendrée par $\mathcal{D}$. On suppose en plus que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ contiennent une suite (i.e., une famille dénombrable) d'éléments dont la réunion est l'espace total Ω et X respectivement. Alors la tribu produit $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ est engendrée par $\mathcal{C} \circledast \mathcal{D}$:*

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \equiv \sigma(\mathcal{C}) \otimes \sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{C} \circledast \mathcal{D}) .$$

Preuve. Par définition on a $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{F} \circledast \mathcal{G})$. Vu qu'on a l'inclusion $\mathcal{C} \circledast \mathcal{D} \subset \mathcal{F} \circledast \mathcal{G}$, on a aussi l'inclusion $\sigma(\mathcal{C} \circledast \mathcal{D}) \subset \sigma(\mathcal{F} \circledast \mathcal{G})$ [1.8]. Pour montrer l'inclusion dans l'autre sens, on va montrer qu'on a l'inclusion $\mathcal{F} \circledast \mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{C} \circledast \mathcal{D})$. Vu que le dernier est une tribu et que $\sigma(\mathcal{F} \circledast \mathcal{G})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{F} \circledast \mathcal{G}$, on aura l'autre inclusion $\sigma(\mathcal{F} \circledast \mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{C} \circledast \mathcal{D})$ [1.6.iii].

Fixons d'abord un $D \in \mathcal{D}$ et regardons l'ensemble σ_D défini par

$$\sigma_D = \{ F \subset \Omega \mid F \times D \in \sigma(\mathcal{C} \circledast \mathcal{D}) \} .$$

Il est évident qu'on a l'inclusion $\mathcal{C} \subset \sigma_D$. Le but est maintenant de montrer que σ_D est une tribu, ce qui implique l'inclusion $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma_D$. Vérifions donc les propriétés d'une tribu. Comme on a $\emptyset = \emptyset \times D$ et comme $\sigma(\mathcal{C} \circledast \mathcal{D})$ est une tribu, on a $\emptyset \in \sigma_D$. Si $C_n \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbf{N}$ est la suite telle que $\cup_{n \in \mathbf{N}} C_n = \Omega$, on a

$$\Omega \times D = \Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} C_n \Big) \times D = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (C_n \times D) .$$

Vu que chaque $C_n \times D$ appartient à $\sigma(\mathcal{C} \divideontimes \mathcal{D})$ et que ce dernier est une tribu, on en déduit que Ω appartient à σ_D. La même argumentation montre que les égalités

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n\Big) \times D = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} (F_n \times D) \qquad \text{et}$$
$$(\Omega \setminus F) \times D = (\Omega \times D) \setminus (F \times D) = (\Omega \times D) \cap \Big((\Omega \times X) \setminus (F \times D)\Big)$$

impliquent la stabilité de σ_D par réunion dénombrable et complémentaire. σ_D est donc une tribu et on a l'inclusion $\mathcal{F} \subset \sigma_D$. Ceci étant vrai pour tout $D \in \mathcal{D}$, il s'ensuit de la définition de σ_D qu'on a l'inclusion $\mathcal{F} \divideontimes \mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{C} \divideontimes \mathcal{D})$.

Fixons maintenant $F \in \mathcal{F}$ et regardons l'ensemble σ^F défini comme

$$\sigma^F = \{\, G \in \mathcal{G} \mid F \times G \in \sigma(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) \,\} \ .$$

On vient de montrer qu'on a l'inclusion $\mathcal{D} \subset \sigma^F$. Le but est de montrer que σ^F est une tribu, ce qui implique l'inclusion $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{D}) \subset \sigma^F$. Vu qu'on aura cela pour tout $F \in \mathcal{F}$, on aura montré l'inclusion $\mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{C} \divideontimes \mathcal{D})$ et la preuve sera terminée. On vérifie donc les propriétés d'une tribu, exactement comme on a fait pour σ_D. D'abord on a $\emptyset = F \times \emptyset$ et donc $\emptyset \in \sigma^F$. Si $D_n \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbf{N}$ est la suite telle que $\cup_{n\in\mathbf{N}} D_n = X$, on a

$$F \times X = F \times \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} D_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} (F \times D_n) \ .$$

Chaque $F \times D_n$ appartenant à $\sigma(\mathcal{C} \divideontimes \mathcal{D})$, on en déduit $X \in \sigma^F$. Et les égalités

$$F \times \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} G_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} (F \times G_n) \qquad \text{et}$$
$$F \times (X \setminus G) = (F \times X) \setminus (F \times G) = (F \times X) \cap \Big((\Omega \times X) \setminus (F \times G)\Big)$$

montrent que σ^F est stable par réunion dénombrable et complémentaire. σ^F est donc une tribu et la preuve est achevée. $\boxed{CQFD}$

4.5 Remarque pour les curieux. On pourrait espérer que la condition sur l'existence de suites d'éléments dont la réunion est l'espace total est superflue. L'exemple suivant montre qu'un tel espoir est vain. On prend $\Omega = X = \{0, 1\}$ un ensemble à deux éléments et on pose $\mathcal{C} = \mathcal{G} = \big\{\{0\}\big\}$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ contiennent qu'un seul élément : le sous-ensemble $\{0\} \subset \{0, 1\}$. Alors $\mathcal{C} \divideontimes \mathcal{D}$ contient un seul élément : le sous-ensemble $\{(0, 0)\} = \{0\} \times \{0\} \subset \Omega \times X$. On vérifie que les différentes tribus engendrées sont données par

$$\begin{aligned}
\Omega \times X &= \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \\
\sigma(\mathcal{C}) &= \mathcal{P}(\{0,1\}) = \sigma(\mathcal{D}) \\
\sigma(\mathcal{C} \divideontimes \mathcal{D}) &= \big\{\ \emptyset, \{(0,0)\}, \{(0,1), (1,0), (1,1)\}, \Omega \times X\ \big\} \\
\sigma(\mathcal{C} \divideontimes \sigma(\mathcal{D})) &= \big\{\ \emptyset, \{(0,0)\}, \{(0,1)\}, \{(0,0), (0,1)\}, \{(1,0), (1,1)\}, \\
&\qquad \{(0,1), (1,1), (1,0)\}, \{(0,0), (1,0), (1,1)\}, \Omega \times X\ \big\} \\
\sigma\big(\sigma(\mathcal{C}) \divideontimes \sigma(\mathcal{D})\big) &= \mathcal{P}(\Omega \times X) \ .
\end{aligned}$$

On a donc les inclusions strictes

$$\sigma(\mathcal{C} \divideontimes \mathcal{D}) \subset \sigma(\mathcal{C} \divideontimes \sigma(\mathcal{D})) \subset \sigma\big(\sigma(\mathcal{C}) \divideontimes \sigma(\mathcal{D})\big)$$

où le premier contient 4 éléments, le deuxième 8 et le troisième 16. Notons en passant que $\sigma(\mathcal{C} \divideontimes \mathcal{D})$ est un cas particulier de l'exemple donné dans [1.3] avecc le sous-ensemble $A = \{(0,0)\}$.

4.6 Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{O})$ et $(X, \mathcal{T})$ deux espaces topologiques. On munit l'espace produit $\Omega \times X$ d'une topologie $\mathcal{S}$ en disant que la collection $\mathcal{O} \divideontimes \mathcal{T}$ est une base pour $\mathcal{S}$. Autrement dit, un sous-ensemble de $\Omega \times X$ est ouvert (pour la topologie produit) s'il s'écrit comme une réunion (arbitraire) de pavés de la forme $O \times T$ avec $O \in \mathcal{O}$ et $T \in \mathcal{T}$.

→ **4.7 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{O})$ et $(X, \mathcal{T})$ deux espaces topologiques. Si $\mathfrak{B}$ est une base pour la topologie $\mathcal{O}$ et si $\mathfrak{C}$ est une base pour $\mathcal{T}$, alors $\mathfrak{B} \divideontimes \mathfrak{C}$ est une base pour la topologie produit. En particulier, si Ω et X sont à base dénombrable, alors le produit l'est aussi.*

→ **4.8 Corollaire.** *La topologie euclidienne sur $\mathbf{R}^{p+q} = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ est la topologie produit des topologies euclidiennes sur $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^q$ respectivement.*

4.9 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{O})$ et $(X, \mathcal{T})$ deux espaces topologiques et soit $(\Omega \times X, \mathcal{S})$ l'espace topologique produit. Alors on a toujours l'inclusion*

$$\mathcal{B}(\Omega) \otimes \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}(\Omega \times X) \ .$$

Si l'un des deux espaces topologiques est à base dénombrable, on a égalité entre ces deux tribus sur l'espace produit.

Preuve. La topologie produit a l'ensemble $\mathcal{O} \divideontimes \mathcal{T}$ comme base ; on a donc l'inclusion $\mathcal{O} \divideontimes \mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Mais $\mathcal{O}$ et $\mathcal{T}$ contiennent trivialement une suite d'éléments dont la réunion est l'espace total : une topologie contient déjà l'espace total et il suffit de prendre la suite constante. Selon [1.3] on a donc l'égalité

$$\mathcal{B}(\Omega) \otimes \mathcal{B}(X) \equiv \sigma(\mathcal{O}) \otimes \sigma(\mathcal{T}) \equiv \sigma\big(\,\sigma(\mathcal{O}) \divideontimes \sigma(\mathcal{T})\,\big) \overset{[1.3]}{=} \sigma(\mathcal{O} \divideontimes \mathcal{T}) \ .$$

Avec l'inclusion $\mathcal{O} \divideontimes \mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ on en déduit l'inclusion annoncée.

Supposons maintenant que l'une des deux topologies est à base dénombrable, disons $\mathcal{T}$. Soit $\mathfrak{B} = \{B_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ une base dénombrable pour $\mathcal{T}$. Si P est un ensemble ouvert dans le produit $\Omega \times X$, alors, par définition de la topologie produit, il existe un ensemble d'indices I et pour chaque $i \in I$ des ouverts $O_i \in \mathcal{O}$ et $V_i \in \mathcal{T}$ tels que

$$P = \bigcup_{i \in I} O_i \times V_i \ .$$

Mais $\mathfrak{B}$ est une base pour $\mathcal{T}$ et donc chaque V_i est une réunion d'éléments de $\mathfrak{B}$: il existe $K_i \subset \mathbf{N}$ tel que

$$V_i = \bigcup_{n\in K_i} B_n \ .$$

On a donc l'égalité

$$P = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{n\in K_i} O_i \times B_n \ .$$

Si on introduit les ensembles $I_n = \{i \in I \mid n \in K_i\}$, alors il est "évident" qu'on a l'égalité

$$P = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{i\in I_n} O_i \times B_n = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Big(\bigcup_{i\in I_n} O_i \Big) \times B_n \ .$$

Mais $\mathcal{O}$ est une topologie et donc $U_n = \cup_{i\in I_n} O_i$ est un ouvert. On a donc l'égalité

$$P = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} U_n \times B_n \ ,$$

c'est-à-dire que P est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{O} \divideontimes \mathfrak{B}$. Autrement dit, on a montré l'inclusion

$$\mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{O} \divideontimes \mathfrak{B}) \ .$$

On a donc les inclusions

$$\mathcal{B}(\Omega \times X) \equiv \sigma(\mathcal{S}) \overset{[1.6.\text{iii}]}{\subset} \sigma(\mathcal{O} \divideontimes \mathfrak{B}) \subset \sigma(\mathcal{O} \divideontimes \mathcal{T}) = \mathcal{B}(\Omega) \otimes \mathcal{B}(X) \ ,$$

où la dernière égalité est montrée ci-dessus. $\boxed{CQFD}$

→ **4.10 Proposition.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$, $(X, \mathcal{G})$ *et* $(Y, \mathcal{H})$ *trois espaces mesurables et soit* $\varphi : \Omega \to X \times Y$ *une application. On pose* $f = \pi_X \circ \varphi : \Omega \to X$ *et* $g = \pi_Y \circ \varphi : \Omega \to Y$*, de telle sorte qu'on peut écrire* $\varphi = (f, g)$*. Alors* φ *est mesurable (pour les tribus* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$*) si et seulement si* f *et* g *sont mesurables (*$\mathcal{F}$*-*$\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{F}$*-*$\mathcal{H}$ *respectivement).*

4.11 Corollaire. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et soit* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ *deux applications mesurables.*

(i) *Si l'application* $f + g : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ *est bien définie (on n'a jamais* $\infty - \infty$*), alors elle est mesurable.*

(ii) *L'application* $f \centerdot g$ *est mesurable.*

Preuve. Par [4.10] l'application $F : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}^2$ définie par $F(\omega) = (f(\omega), g(\omega))$ est mesurable.

• (i) Dire que $f + g$ est bien définie est équivalente à dire que l'image de F est contenue dans l'ensemble de définition $\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Add}}$ de l'opération addition dans $\overline{\mathbf{R}}$ [2.12]. Sur cet ensemble, l'addition $\text{Add} : \overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Add}} \to \overline{\mathbf{R}}$ est continue, donc mesurable [3.9]. De plus, on a l'égalité $f + g = \text{Add} \circ F$. Par [3.8] on peut conclure que $f + g$ est mesurable.

• (ii) On définit l'ensemble $A \subset \Omega$ par

$$A = f^{-1}(\{0\}) \cup g^{-1}(\{0\}) \ ,$$

ce qui est mesurable parce que f et g le sont. Par définition du produit tordu, l'application $f \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} g$ est identiquement nulle sur A, donc mesurable sur A. Pour $\omega \in A^c$ l'image $F(\omega)$ appartient au domaine $\overline{\mathbf{R}}^2_{\text{Mult}}$ de l'opération multiplication dans $\overline{\mathbf{R}}$ [2.12]. Comme pour l'addition, on en déduit que $f \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} g$ est mesurable, mais cette fois-ci sur A^c. Par [3.7] $f \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} g$ est donc mesurable sur Ω entier. $\boxed{CQFD}$

4.12 Corollaire. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. L'ensemble de toutes les fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbf{K}$ est stable pour les opérations addition, multiplication et multiplication par éléments de $\mathbf{K}$. Muni de ces opérations cet ensemble est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ et un anneau commutatif unitaire.*

Preuve. Si f et g sont à valeurs dans $\mathbf{R}$, la condition que $f + g$ est bien définie est automatiquement remplie. Et sur $\mathbf{R}$ le produit tordu se réduit au produit ordinaire. La stabilité dans le cas $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ se déduit donc immédiatement de [4.11] (en interprétant la multiplication par un élément de $\mathbf{R}$ comme la multiplication par la fonction constante).

Le cas $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ peut être montré de deux façons. On peut passer par le cas $\mathbf{R}$ en décomposant une fonction complexe en partie réelle et imaginaire. Si f et g sont mesurables à valeurs dans $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$, alors par [4.10] $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Re}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont mesurables à valeurs dans $\mathbf{R}$. Par [4.11] les fonctions $\mathrm{Re}(f+g) = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{Re}(g)$, $\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$, $\mathrm{Re}(f \cdot g) = \mathrm{Re}(f) \cdot \mathrm{Re}(g) - \mathrm{Im}(f) \cdot \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(f \cdot g) = \mathrm{Re}(f) \cdot \mathrm{Im}(g) + \mathrm{Im}(f) \cdot \mathrm{Re}(g)$ sont mesurables. Et donc par [4.10] $f + g$ et $f \cdot g$ sont mesurables.

On peut aussi imiter directement la preuve de [4.11]. Si f et g sont mesurables à valeurs dans $\mathbf{C}$, alors l'application $F : \Omega \to \mathbf{C}^2$ définie par $F(\omega) = (f(\omega), g(\omega))$ est mesurable. Les opérations d'addition et multiplication sont continues donc mesurables dans $\mathbf{C}$. Et donc $f + g = \mathrm{Add} \circ F$ et $f \cdot g = \mathrm{Mult} \circ F$ sont mesurables.

La vérification des axiomes d'un espace vectoriel et d'un anneau commutatif unitaire est de routine et laissée au lecteur. $\boxed{CQFD}$

→ **4.13 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et soit $f, g : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ deux applications mesurables. Alors l'ensemble*

$$A = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \le g(\omega)\}$$

est mesurable.

5. Subdivisions et fonctions étagées

5.1 Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une *subdivision de* Ω est un ensemble *fini* D d'ensembles mesurables ($D = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{F}$) qui sont mutuellement disjoints et dont la réunion est Ω :

$$\#D < \infty \qquad , \qquad \bigcup_{A \in D} A = \Omega \qquad \text{et} \qquad \forall A, B \in D : A \neq B \;\Rightarrow\; A \cap B = \emptyset \ .$$

Une *fonction étagée sur* Ω est une fonction $f : \Omega \to \mathbf{R}$ pour laquelle il existe une subdivision D de Ω telle que f est constante sur chaque élément de D :

$$\forall A \in D \; \exists c \in \mathbf{R} \; \forall x \in A : f(x) = c \ .$$

Une telle subdivision s'appelle une *subdivision adaptée à* f. On notera la valeur c prise par f sur l'élément $A \in D$ par $f\langle A\rangle$, ce qui veut donc dire que pour tout $x \in A$ on a $f(x) = f\langle A\rangle$.

5.2 Remarque. Notre définition de subdivision est un cas particulier de ce qu'on appelle une partition. Une *partition d'un ensemble* Ω est une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ dont la réunion est Ω et qui sont mutuellement disjoints :

$$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \Omega \qquad \text{et} \qquad \forall A, B \in \mathcal{C} : A \neq B \;\Rightarrow\; A \cap B = \emptyset \ .$$

Une subdivision est donc une partition finie par des ensembles mesurables.

5.3 Lemme. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et soit* $f : \Omega \to \mathbf{R}$ *une fonction. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est une fonction étagée ;*

(ii) f *est mesurable et l'image* $f(\Omega)$ *est un ensemble fini, c'est-à-dire qu'il existe* $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ *avec* $n \in \mathbf{N}^*$ *tels que* $f(\Omega) = \{c_1, \ldots, c_n\}$ *;*

(iii) *il existe* $n \in \mathbf{N}^*$ *et* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ *tels que* $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$.

Preuve. • (iii) $\Rightarrow$ (ii) : Pour $\omega \in \Omega$ la valeur $f(\omega) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$ ne peut prendre qu'une des $n!$ valeurs $c_{i_1} + \cdots + c_{i_k}$, où $i_1, \ldots, i_k$ sont définis par la condition $i \in \{i_1, \ldots, i_k\} \Leftrightarrow \omega \in A_i$. Si ω n'appartient à aucun des A_i, $k = 0$ et $f(\omega) = 0$, une valeur qui est compté parmi les $n!$ possibilités. L'image $f(\Omega)$ contient donc un nombre fini d'éléments. La mesurabilité de f est une conséquence immédiate de [3.3] et [4.11] ou [4.12].

• (ii) $\Rightarrow$ (i) : On pose $A_i = f^{-1}(\{c_i\})$ qui appartient à $\mathcal{F}$ car f est mesurable et que le singletons $\{c_i\}$ sont des fermés donc des boréliens (de $\mathbf{R}$) [1.12]. Il est évident que les A_i sont disjoints et de réunion Ω, c'est-à-dire qu'ils forment une subdivision de Ω. Finalement, f est constante c_i sur chaque A_i par définition de A_i. f est donc une fonction étagée.

• (i) $\Rightarrow$ (iii) : Soit $D = \{A_1, \ldots, A_n\}$ une subdivision de Ω adaptée à la fonction étagée f. Si on pose $c_i = f\langle A_i\rangle$, alors on a l'égalité $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$. $\boxed{CQFD}$

→ **5.4 Lemme.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et* $f, g : \Omega \to \mathbf{R}$ *deux fonctions étagées. Alors il existe une subdivision* D *de* Ω *adaptée aux deux fonctions* f *et* g*.*

→ **5.5 Lemme.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable. Si* f *et* g *sont deux fonctions étagées sur* Ω*, alors* $f + g$*,* fg*,* $|f|$*,* $\max(f, g)$*,* $\min(f, g)$ *et* αf *(*$\alpha \in \mathbf{R}$*) sont aussi des fonctions étagées sur* Ω*.*

6. Mesures

6.1 Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une fonction $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ est appelée une *mesure (sur l'espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{F})$ *ou sur la tribu* $\mathcal{F}$*)* si elle vérifie les conditions :

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;
(ii) μ est σ-additive : si, pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $A_n \in \mathcal{F}$ et si les A_n sont deux à deux disjoints ($n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \emptyset$), alors on a

$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \ .$$

Un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ où Ω est un ensemble, $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et μ une mesure sur $\mathcal{F}$ est appelé un *espace mesuré*.

6.2 Exemple (mesure de comptage, mesure de Dirac). Soit Ω un ensemble et $T \subset \Omega$ un sous-ensemble. La *mesure de comptage sur* T, notée C_T est la mesure définie sur la tribu totale $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties par la formule

$$C_T(A) = \#(A \cap T) = \text{ le nombre d'éléments de } A \cap T,\ \infty \text{ si ce n'est pas fini}$$

Dans le cas particulier où T contient un seul élément : $T = \{\omega_o\}$, la mesure de comptage $C_{\{\omega_o\}}$ porte un nom spécial : *la mesure de Dirac au point* $\omega_o \in \Omega$ et est notée δ_{ω_o}. Malgré les apparences d'évidence, il faut bien montrer que cette application $C_T : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ vérifie les conditions d'une mesure.

6.3 Proposition. *Soit* Ω *un ensemble,* $T \subset \Omega$ *un sous-ensemble et soit* $C_T : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *l'application définie par* $A \mapsto \#(A \cap T)$*. Alors* C_T *est une mesure sur* $\mathcal{P}(\Omega)$*.*

Preuve. L'ensemble vide contenant zéro éléments, il est évident que $C_T(\emptyset) = 0$. Soit donc $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints. Alors il faut montrer l'égalité

$$C_T\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} C_T(A_n) \ .$$

Pour simplifier l'écriture, on introduit les ensembles (deux à deux disjoints) $B_n = T \cap A_n$, ce qui signifie qu'il faut montrer l'égalité

$$\#\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} B_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \#B_n \ .$$

Supposons d'abord qu'il y a un $n \in \mathbf{N}$ tel que $\#B_n = \infty$, alors $\cup_{n\in\mathbf{N}} B_n$ contient aussi une infinité d'éléments : $\#(\cup_{n\in\mathbf{N}} B_n) = \infty$. D'autre part, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \#B_n$ contient un terme ∞ et donc vaut elle aussi ∞. D'où l'égalité voulue.

Supposons maintenant qu'il y a une infinité de n tels que $\#B_n > 0$. Plus précisément, supposons

$$\forall N \in \mathbf{N}\ \exists n > N : \#B_n > 0 \ . \tag{6.4}$$

On peut alors construire par récurrence une suite croissante $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que $\#B_{n_k} > 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On commence par prendre $N = 0$ dans (6.4), ce qui nous donne un $n_0 > 0$ tel que $\#B_{n_0} > 0$. Après on suppose qu'on a déjà construit $n_0 < n_1 < \cdots < n_K$ et on prend $N = n_K$ dans (6.4), ce qui nous donne un $n_{K+1} > n_K$ tel que $\#B_{n_{K+1}} > 0$. Ainsi on a construit la suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

Le fait que $\#B_{n_k} > 0$ implique l'existence d'un $\omega_k \in B_{n_k}$. Les B_n étant deux à deux disjoints, les ω_k sont tous distincts. Vu les inclusions

$$\{\omega_k \mid k \in \mathbf{N}\} \subset \bigcup_{k\in\mathbf{N}} B_{n_k} \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} B_n$$

on en déduit que

$$\infty = \#\{\omega_k \mid k \in \mathbf{N}\} \le \#(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} B_n) \ .$$

On conclut qu'on doit avoir l'égalité $\infty = \#(\cup_{n\in\mathbf{N}} B_n)$. De l'autre côté on a

$$\sum_{n=0}^{n_K} \#B_n \ge \sum_{k=0}^{K} \#B_{n_k} \ge \sum_{k=0}^{K} 1 = K+1 \ .$$

La suite des sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} \#B_n$ n'est donc pas bornée ; vu que c'est une suite croissante, on en déduit que $\sum_{n=0}^{\infty} \#B_n = \infty$. On a donc bien montré l'égalité voulue.

Il nous reste le cas où il n'y a qu'un nombre fini de n tel que $\#B_n > 0$, ce qui signifie qu'il existe $K \in \mathbf{N}$ tel que $\#B_n = 0$ pour tout $n > K$. On en déduit que $B_n = \emptyset$ pour tout $n > K$ et donc que $\sum_{n=0}^{\infty} \#B_n = \sum_{n=0}^{K} \#B_n$ et que $\cup_{n\in\mathbf{N}} B_n = \cup_{n=0}^{K} B_n$. Vu qu'on a déjà traité le cas où un des $\#B_n = \infty$, on peut dire que chaque B_n est un ensemble fini et que la réunion $\cup_{n=0}^{K} B_n$ est disjointe. Il s'ensuit qu'on a l'égalité

$$\#(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} B_n) = \#(\bigcup_{n=0}^{K} B_n) = \sum_{n=0}^{K} \#B_n = \sum_{n=0}^{K} \#B_n = \sum_{n=0}^{\infty} \#B_n \ . \qquad \boxed{CQFD}$$

6.5 Remarque pour les curieux concernant la preuve de [6.3]. Les puristes peuvent dire que cette preuve n'est pas complète, car la dernière affirmation que le nombre d'éléments dans une réunion (finie) disjointe est égale à la somme des nombres d'éléments dans les différentes ensembles nécessite une preuve. Mais pour une telle preuve il faut descendre dans les fondements de la mathématique. Et là on voit qu'il y a deux façons de procéder. On peut *définir* l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers comme l'ensemble des nombres cardinaux associé aux ensembles finis (et alors il faut définir ce que c'est un ensemble fini) et on peut ensuite *définir* l'addition de deux entiers comme le cardinal de la réunion (disjointe). Mais alors il faut démontrer que l'addition ainsi définie vérifie toutes les propriétés usuelles (commutativité, associativité etc.). Et cela n'est pas une mince affaire. Ou bien, on définit $\mathbf{N}$ par d'autres moyens, mais alors il faut *montrer* que l'addition définie dans cet ensemble ≪ abstrait ≫ $\mathbf{N}$ correspond bien avec le cardinal d'une réunion disjointe. Et ceci après avoir établi une bijection entre $\mathbf{N}$ et l'ensemble des nombres cardinaux d'ensembles finis. Et de nouveau c'est du travail.

→ **6.6 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $E \in \mathcal{F}$ un ensemble mesurable.*

(i) *L'application $\widehat{\mu}_E : \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définie par*

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad : \quad \widehat{\mu}_E(A) = \mu(A \cap E)$$

est une mesure sur $\mathcal{F}$.

(ii) *La restriction de μ à la tribu induite $\mathcal{F}_E$ est une mesure sur $(E, \mathcal{F}_E)$.*

(iii) *Si $\mathcal{G}$ est une tribu sur Ω contenue dans $\mathcal{F}$: $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, alors la restriction de μ à $\mathcal{G}$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{G})$.*

6.7 Nota Bene. Dans [6.6] on a considéré une tribu $\mathcal{F}$ et deux sous-ensembles $\mathcal{F}_E \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Dans les deux cas il s'agit d'une tribu, mais dans des sens différents. $\mathcal{F}_E$ n'est pas une tribu sur Ω (sauf dans le cas trivial $E = \Omega$), simplement parce que $\Omega \notin \mathcal{F}_E$. Par contre, $\mathcal{G}$ est, par hypothèse, une tribu sur Ω.

6.8 Corollaire. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et soit $T \subset \Omega$ un sous-ensemble arbitraire. Alors la mesure de comptage C_T est, par restriction, une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$.*

6.9 Proposition. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Alors μ a les propriétés de*

(i) *additivité : si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ sont deux à deux disjoints, alors*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \ ,$$

(ii) *croissance : si $A, B \in \mathcal{F}$ avec $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$,*

(iii) *continuité pour des suites croissantes : si* $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une suite croissante d'ensembles mesurables (* $\forall n \in \mathbf{N} : A_n \subset A_{n+1}$ *), alors*

$$\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ .$$

(iv) *sous-additivité : si* $A_1, \ldots, A_n$ *sont mesurables (pas forcément deux à deux disjoints), alors*

$$\mu\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \ ,$$

(v) *sous-*σ*-additivité : si, pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *on a* $A_n \in \mathcal{F}$ *(pas forcément deux à deux disjoints), alors on a*

$$\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\big) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \ .$$

6.10 Remarque. Si on interprète $\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ comme la limite $\lim_{n\to\infty} A_n$ (ce qui est une interprétation dangereuse, car la notion de limite d'une suite d'ensembles n'existe pas en général), alors la propriété (ii) prend la forme suggestive

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ ,$$

ce qui explique le nom de ≪ continuité ≫.

Preuve. • Pour la propriété (i) on pose $A_k = \emptyset$ pour tout $k > n$. Alors les éléments de la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont deux à deux disjoints et donc la σ-additivité d'une mesure nous donne

$$\mu\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \big) = \mu\big(\bigcup_{i\in\mathbf{N}^*} A_i \big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \ ,$$

où la dernière égalité est une conséquence du fait que $\mu(\emptyset) = 0$.

• Pour la propriété (ii) on pose $C = B \setminus A$, alors $B = A \cup C$ est une réunion disjointe, donc par (i) on a $\mu(B) = \mu(A) + \mu(C) \geq \mu(A)$, car $\mu(C) \geq 0$.

• Pour la propriété (iii) on pose $B_0 = A_0$ et pour $n > 0$: $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Le fait que la suite A_n est croissante implique que les éléments de la suite B_n sont deux à deux disjoints. Mais on a aussi l'égalité $A_n = \cup_{i=0}^{n} B_i$ (qu'on démontre facilement par récurrence) et donc $\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \cup_{i\in\mathbf{N}} B_i$. La σ-additivité de la mesure μ nous donne l'égalité

$$\begin{aligned}\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \big) = \mu\big(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i \big) &\overset{\sigma\text{-additivité}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \mu(B_i) \\ = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mu(B_i) &\overset{\text{additivité}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu\big(\bigcup_{i=0}^{n} B_i \big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ .\end{aligned}$$

• Pour la propriété (v) on pose $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus (\cup_{i=0}^{n-1} A_i)$ pour $n > 0$. Alors les B_n sont deux à deux disjoints, on a l'inclusion $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et on a $\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \cup_{n\in\mathbf{N}} B_n$. On peut donc calculer :

$$\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\big) = \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} B_n\big) \overset{\sigma\text{-additivité}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \overset{\text{croissance}}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \ .$$

• La propriété (iv) se déduit de (v) comme l'additivité se déduit de la σ-additivité. $\boxed{CQFD}$

→ **6.11 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante d'ensembles mesurables ($\forall n \in \mathbf{N} : A_n \supset A_{n+1}$). Si $\mu(\Omega) < \infty$, alors on a l'égalité*

$$\mu\big(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ .$$

→ **6.12 Exercice.** Donner un exemple d'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et d'une suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où on n'a pas l'égalité $\mu\big(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

→ **6.13 Proposition.** *Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un ensemble fini et soit $p : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une application quelconque. Alors l'application $\mu_p : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définie par*

$$\mu_p(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$$

(avec la convention que $\mu_p(\emptyset) = 0$) est une mesure sur la tribu totale $\mathcal{P}(\Omega)$.

Réciproquement, si $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ est une mesure sur la tribu totale, alors on a l'égalité $\mu = \mu_p$ avec la fonction $p(\omega) = \mu(\{\omega\})$.

6.14 Définitions. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $A \subset \Omega$ un sous-ensemble quelconque. On dit que A est μ-*négligeable* (ou simplement *négligeable* si la mesure μ est évidente) s'il existe un ensemble mesurable $B \in \mathcal{F}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

Soit P est une propriété d'éléments de Ω. On dit que P est vraie μ-*presque partout*, noté μ-p.p. (ou simplement *presque partout*, notée p.p. si la mesure μ est évidente) si l'ensemble où la propriété n'est pas vraie est μ-négligeable. Avec la définition de μ-négligeable ceci peut être formulé comme

$$\exists B \in \mathcal{F} \ : \ \mu(B^c) = 0 \quad \text{et} \quad \Big(\omega \in B \Rightarrow P(\omega) \text{ est vraie.} \Big) \tag{6.15}$$

6.16 Remarque pour les comparateurs. Certains auteurs définissent un ensemble μ-négligeable comme étant un ensemble *mesurable* de μ-mesure nulle. La définition donnée ci-dessus dit qu'un ensemble négligeable est *inclus* dans un ensemble mesurable de μ-mesure nulle. Et il n'est nullement automatique qu'un tel ensemble soit lui-même mesurable. Pour ces auteurs la notion de μ-presque partout est modifiée en conséquence : une propriété P est μ-presque partout vraie si l'ensemble où P est vraie est *mesurable* avec un complémentaire qui a une μ-mesure nulle. On a choisi de prendre la définition moins stricte parce qu'il y a des applications (importantes) où on ne peut pas garantir que l'ensemble où P est vraie est mesurable (voir [20.8]).

6.17 Nota Bene. La définition de presque partout dépend fortement de la mesure μ et peut même être contre-intuitif. Considérons par exemple un ensemble Ω, un sous-ensemble $T \subset \Omega$ et l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), C_T)$. La définition de la mesure de comptage C_T implique qu'on a l'équivalence $C_T(A) = 0 \Leftrightarrow A \cap T = \emptyset$. Il s'ensuit immédiatement qu'une propriété P est C_T-presque partout vraie si et seulement si P est vraie pour tout $\omega \in T$. Si $T = \{\omega_o\}$ ne contient qu'un seul point (i.e., C_T est la mesure de Dirac δ_{ω_o}), il suffit (et il faut) que P soit vraie au seul point ω_o pour que P soit vraie C_T-presque partout. Dans l'autre extrème, si $T = \Omega$, alors il faut (et il suffit) que P soit vraie pour tout $\omega \in \Omega$ pour que P soit vraie C_T-presque partout.

→ **6.18 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit P une propriété d'éléments de Ω. Si l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid P(\omega) \text{ vrai}\}$ est mesurable, alors P est presque partout vraie si et seulement si*

$$\mu\big(\ \{\omega \in \Omega \mid P(\omega) \text{ faux}\}\ \big) = 0 \ .$$

6.19 Notation. Dans la suite on aura souvent besoin de parler de l'égalité presque partout et (un peu moins souvent) d'une inégalité presque partout. Si f et g sont deux fonctions sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, on note ces propriétés en mettant μ-pp au-dessus le symbole de l'(in)égalité. Par exemple :

$$f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g \quad \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \quad \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = g(\omega)\} \text{ est de complémentaire } \mu\text{-négligeable}$$

$$f \overset{\mu\text{-pp}}{\leq} g \quad \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \quad \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq g(\omega)\} \text{ est de complémentaire } \mu\text{-négligeable.}$$

→ **6.20 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de sous-ensembles de Ω.*

(i) *Si les A_n sont négligeables, alors $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ et $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$, $n \in \mathbf{N}$ sont négligeables.*

(ii) *Si les A_n sont de complémentaire négligeable, alors $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ et $\bigcap_{i=0}^{n} A_i$, $n \in \mathbf{N}$ sont de complémentaire négligeable.*

7. L'intégrale de fonctions positives

7.1 Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Associé à une fonction étagée positive $f : \Omega \to \mathbf{R}_+$ on introduit le nombre $\mathcal{A}(\mu, f)$ défini par

$$\mathcal{A}(\mu, f) = \sum_{A \in D} f\langle A\rangle \centerdot \mu(A) \ ,$$

où D est une subdivision de Ω adaptée à f. On dit que $\mathcal{A}(\mu, f)$ est le *volume/aire en-dessous du graphe de f*.

7.2 Lemme. *Le nombre $\mathcal{A}(\mu, f)$ ne dépend pas de la subdivision adaptée à f choisie pour son calcul.*

Preuve. Soient $D = \{A_1, \ldots, A_n\}$ et $D' = \{B_1, \ldots, B_m\}$ deux subdivisions adaptées à f. Alors $D'' = \{A_i \cap B_j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ est aussi une subdivision adaptée à f, car f étant constante sur A_i est aussi constante (la même) sur chaque $A_i \cap B_j \subset A_i$. On peut donc faire le calcul suivant.

$$\begin{aligned}
\sum_{A \in D} f\langle A\rangle \centerdot \mu(A) &= \sum_{i=1}^{n} f\langle A_i\rangle \centerdot \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} f\langle A_i\rangle \centerdot \mu\big(\bigcup_{j=1}^{m} A_i \cap B_j\big) \\
&\overset{[6.9.\mathrm{i}]}{=} \sum_{i=1}^{n} f\langle A_i\rangle \centerdot \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) \overset{[2.17]}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\langle A_i\rangle \centerdot \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\langle A_i \cap B_j\rangle \centerdot \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f\langle A_i \cap B_j\rangle \centerdot \mu(A_i \cap B_j) \\
&\overset{[2.17]}{=} \sum_{j=1}^{m} f\langle B_j\rangle \centerdot \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \overset{[6.9.\mathrm{i}]}{=} \sum_{j=1}^{m} f\langle B_j\rangle \centerdot \mu(B_j) \\
&= \sum_{B \in D'} f\langle B\rangle \centerdot \mu(B) \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{CQFD}$

7.3 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $f, g : \Omega \to \mathbf{R}_+$ deux fonctions étagées positives, soit $E, F \in \mathcal{F}$ deux ensembles mesurables, et soit $\alpha \in \mathbf{R}_+$ un réel positif. Alors on a les propriétés suivantes.*

(i) $\mathcal{A}(\mu, \mathbf{1}_E) = \mu(E)$;
(ii) $f \le g \Rightarrow \mathcal{A}(\mu, f) \le \mathcal{A}(\mu, g)$;
(iii) $\mathcal{A}(\mu, \alpha \cdot f) = \alpha \centerdot \mathcal{A}(\mu, f)$;
(iv) $\mathcal{A}(\mu, f + g) = \mathcal{A}(\mu, f) + \mathcal{A}(\mu, g)$.

Preuve. • (i) : la subdivision $D = \{E, E^c\}$ est une subdivision adaptée à la fonction étagée $\mathbf{1}_E$, ce qui donne

$$\mathcal{A}(\mu, \mathbf{1}_E) = 0 \centerdot \mu(E^c) + 1 \centerdot \mu(E) = \mu(E) \ .$$

• (ii) : Soit D une subdivision adaptée aux fonctions f et g [5.4]. Alors on a pour tout $A \in D$: $f\langle A\rangle \leq g\langle A\rangle$, et donc

$$\mathcal{A}(\mu, f) = \sum_{A\in D} f\langle A\rangle \centerdot \mu(A) \leq \sum_{A\in D} g\langle A\rangle \centerdot \mu(A) = \mathcal{A}(\mu, g) \ .$$

• (iii) : Soit D une subdivision adaptée à f. Alors on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mu, \alpha\cdot f) &= \sum_{A\in D} (\alpha\cdot f)\langle A\rangle \centerdot \mu(A) = \sum_{A\in D} (\alpha\cdot f\langle A\rangle) \centerdot \mu(A)\\ &= \alpha \centerdot \sum_{A\in D} f\langle A\rangle \centerdot \mu(A) = \alpha \centerdot \mathcal{A}(\mu, f) \ ,\end{aligned}$$

où, pour la troisième égalité on a utilisé le fait que le produit tordu est distributif sur $\overline{\mathbf{R}}_+$ [2.17] et l'associativité dans le sens que

$$\big(\alpha\cdot f\langle A\rangle\big) \centerdot \mu(A) = \alpha \centerdot \big(f\langle A\rangle \centerdot \mu(A)\big) \ .$$

Dans $\alpha\cdot f\langle A\rangle$ on peut utiliser le produit ordinaire car ni α ni $f\langle A\rangle$ ne sont ∞. Par contre, α peut être nul et $f\langle A\rangle \centerdot \mu(A)$ peut être ∞. D'où la nécessité de changer le produit ordinaire en produit tordu pour appliquer l'associativité.

• (iv) : Si D est une subdivision de Ω adaptée aux fonctions f et g, alors D est aussi adaptée à $f+g$. Alors on calcule :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mu, f+g) &= \sum_{A\in D} (f+g)\langle A\rangle \centerdot \mu(A) = \sum_{A\in D} (f\langle A\rangle + g\langle A\rangle) \centerdot \mu(A)\\ &= \sum_{A\in D} f\langle A\rangle \centerdot \mu(A) + \sum_{A\in D} g\langle A\rangle \centerdot \mu(A)\\ &= \mathcal{A}(\mu, f) + \mathcal{A}(\mu, g) \ ,\end{aligned}$$

où pour l'avant dernière égalité on a (de nouveau) utilisé le fait que le produit tordu est distributif sur $\overline{\mathbf{R}}_+$ [2.17]. $\boxed{CQFD}$

7.4 Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction positive (éventuellement ∞). On lui associe un nombre dans $\overline{\mathbf{R}}_+$, noté $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ et appelé *l'intégrale de f sur Ω par rapport à la mesure μ*, ou *la μ-intégrale de f sur Ω* ou simplement *l'intégrale de f sur Ω* si la mesure μ est évidente, définie comme

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \sup\{\, \mathcal{A}(\mu, h) \mid h : \Omega \to \mathbf{R}_+ \text{ étagée}, \ h \leq f \,\} \ .$$

Si $E \in \mathcal{F}$ est un ensemble mesurable, on définit *l'intégrale de f sur E par rapport à la mesure μ*, notée $\int_E f\,\mathrm{d}\mu$, comme

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_E \centerdot f\,\mathrm{d}\mu \ .$$

Autrement dit, pour intégrer f sur une partie mesurable E on modifie f en la changeant en zéro en dehors de E.

7.5 Nota Bene. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction et soit $E \subset \Omega$ un ensemble mesurable. Selon [6.6.ii] le triplet $(E, \mathcal{F}_E, \mu|_{\mathcal{F}_E})$ est aussi un espace mesuré. En considérant la restriction de f à E on obtient donc l'intégrale de $f|_E$ sur E par rapport à la mesure $\mu|_{\mathcal{F}_E}$ notée comme

$$\int_E f|_E \,\mathrm{d}\mu|_{\mathcal{F}_E} \ .$$

Mais si on sait qu'il est d'habitude de ne pas noter les restrictions, alors on voit que cette intégrale s'écrit comme $\int_E f\,\mathrm{d}\mu$. Et là, on a un conflit potentiel de notation avec la définition donné ci-dessus qui dit que cela est une autre notation pour $\int_\Omega \mathbf{1}_E \cdot f\,\mathrm{d}\mu$. Heureusement ce conflit n'est pas réel, car on montre que ces deux nombres sont égaux, ce qui nous autorise à continuer à ne pas écrire les restrictions.

7.6 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction positive et soit $E \subset \Omega$ un ensemble mesurable. Alors on a l'égalité*

$$\int_\Omega \mathbf{1}_E \cdot f\,\mathrm{d}\mu \stackrel{\text{déf}}{=} \int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E f|_E\,\mathrm{d}\mu|_{\mathcal{F}_E} \ .$$

Preuve. Par [6.6.i] $(E, \mathcal{F}_E, \mu|_{\mathcal{F}_E})$ est bien un espace mesuré, donc le membre de droite est bien défini. On a donc d'un côté l'ensemble

$$I_g = \{\, \mathcal{A}(\mu, h) \mid h : \Omega \to \mathbf{R}_+ \text{ étagée, } h \leq \mathbf{1}_E \cdot f \,\}$$

et d'autre côté l'ensemble

$$I_d = \{\, \mathcal{A}(\mu|_{\mathcal{F}_E}, g) \mid g : E \to \mathbf{R}_+ \text{ étagée, } g \leq f|_E \,\} \ .$$

L'égalité à montrer est $\sup I_g = \sup I_d$, qu'on va montrer en montrant l'égalité $I_g = I_d$.

Si $h : \Omega \to \mathbf{R}_+$ est étagée et vérifie $h \leq \mathbf{1}_E \cdot f$, alors $h|_E : E \to \mathbf{R}_+$ est étagée et vérifie $h|_E \leq (\mathbf{1}_E \cdot f)|_E = f|_E$. Si D est une subdivision de Ω adaptée à h, alors $D_E = \{A \cap E \mid A \in D\}$ est une subdivision de E adaptée à $h|_E$. Et évidemment on a $(h|_E)\langle A \cap E\rangle = h\langle A\rangle$. Mais on a $0 \leq h \leq \mathbf{1}_E \cdot f$ et donc sur E^c on a $h = 0$. Il s'ensuit que $D' = D_E \cup \{E^c\}$ est aussi une subdivision de Ω adaptée à h. On a donc :

$$\mathcal{A}(\mu, h) = \sum_{A \in D'} h\langle A\rangle \cdot \mu(A) = 0 \cdot \mu(E^c) + \sum_{B \in D_E} (h|_E)\langle B\rangle \cdot \mu(B) = \mathcal{A}(\mu|_{\mathcal{F}_E}, h|_E) \ .$$

Ceci montre l'inclusion $I_g \subset I_d$.

Pour l'autre inclusion on prend une fonction étagée $g : E \to \mathbf{R}_+$ vérifiant $g \leq f|_E$ et on suppose que D est une subdivision de E adaptée à g. On définit la fonction $h : \Omega \to \mathbf{R}_+$ par

$$h(\omega) = g(\omega) \quad \text{si } \omega \in E \qquad , \qquad h(\omega) = 0 \quad \text{si } \omega \notin E.$$

Alors h est étagée vérifiant $h \leq \mathbf{1}_E \cdot f$ et $D^E = D \cup \{E^c\}$ est une subdivision de Ω adaptée à h. On peut donc faire le calcul :

$$\mathcal{A}(\mu, h) = \sum_{A \in D^E} h\langle A\rangle \cdot \mu(A) = 0 \cdot \mu(E^c) + \sum_{A \in D} g\langle A\rangle \cdot \mu(A) = \mathcal{A}(\mu|_{\mathcal{F}_E}, h|_E) \ .$$

Ce calcul montre l'inclusion $I_d \subset I_g$, ce qui termine la preuve. $\boxed{CQFD}$

7.7 Remarque. À part le fait que [7.6] résout un conflit potentiel de notation, on peut aussi l'utiliser pour montrer que beaucoup de résultats qui sont formulés en termes d'une intégrale sur l'espace total restent valables quand on considère l'intégrale sur une partie mesurable quelconque : il suffit de dire que l'intégrale sur une partie mesurable $E \subset \Omega$ est égale à l'intégrale sur E vu comme espace total.

7.8 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $f, g : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ deux fonctions positives, soit $E, F \in \mathcal{F}$ deux ensembles mesurables, et soit $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ un réel strictement positif. Alors on a les propriétés suivantes.*

(i) *si f est étagée, $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \mathcal{A}(\mu, f)$;*
(ii) *si $f \le g$ sur E, alors $\int_E f \,\mathrm{d}\mu \le \int_E g \,\mathrm{d}\mu$;*
(iii) *$\int_E \alpha \cdot f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int_E f \,\mathrm{d}\mu$;*
(iv) *$\int_E 0 \,\mathrm{d}\mu = 0$;*
(v) *si $E \subset F$, alors $\int_E f \,\mathrm{d}\mu \le \int_F f \,\mathrm{d}\mu$;*
(vi) *si $\mu(E) = 0$, alors $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$;*

Preuve. Pour une fonction positive f on introduit les ensembles $\mathcal{H}(f)$ et $\mathcal{I}(f)$ comme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f) &= \{\, h : \Omega \to \mathbf{R}_+ \mid \ h \text{ étagée}, h \le f \,\} \\ \mathcal{I}(f) &= \{\, \mathcal{A}(\mu, h) \mid h \in \mathcal{H}(f) \,\} \ . \end{aligned}$$

Avec ces ensembles on a l'égalité (par définition) $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sup \mathcal{I}(f)$.

• (i) : Si f est étagée on a $f \in \mathcal{H}(f)$ et donc $\mathcal{A}(\mu, f) \in I(f)$, ce qui implique $\mathcal{A}(\mu, f) \le \sup \mathcal{I}(f)$. D'autre côté, si $h \in \mathcal{H}(f)$, alors on a, par [7.3.iii], $\mathcal{A}(\mu, h) \le \mathcal{A}(\mu, f)$, ce qui dit que $\mathcal{A}(\mu, f)$ est un majorant de $\mathcal{I}(f)$ et donc $\sup \mathcal{I}(f) \le \mathcal{A}(\mu, f)$.

• (ii) : Si $f \le g$ sur E, alors $\mathbf{1}_E \centerdot f \le \mathbf{1}_E \centerdot g$ sur tout Ω. Si $h \in \mathcal{H}(\mathbf{1}_E \centerdot f)$, alors automatiquement $h \in \mathcal{H}(\mathbf{1}_E \centerdot g)$ et donc $\mathcal{I}(\mathbf{1}_E \centerdot f) \subset \mathcal{I}(\mathbf{1}_E \centerdot g)$, ce qui implique l'inégalité annoncée.

• (iii) : L'associativité du produit tordu nous donne l'égalité $\mathbf{1}_E \centerdot (\alpha \centerdot f) = \alpha \centerdot (\mathbf{1}_E \centerdot f)$. On peut donc sans perte de généralité supposer que $E = \Omega$, car on peut faire le calcul

$$\int_E \alpha \centerdot f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_E \centerdot (\alpha \centerdot f) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \alpha \centerdot (\mathbf{1}_E \centerdot f) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \centerdot \int_\Omega \mathbf{1}_E \centerdot f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \centerdot \int_E f \,\mathrm{d}\mu \ ,$$

ce qui montre que si on le sait pour $E = \Omega$, on le sait pour tout E.

Si $h \in \mathcal{H}(\alpha f)$, alors $\alpha^{-1} h \in \mathcal{H}(f)$ et donc $\mathcal{A}(\mu, \alpha^{-1} h) \le \sup \mathcal{I}(f)$. Par [7.3.iv] on peut réécrire cette relation comme

$$\mathcal{A}(\mu, h) \le \alpha \cdot \sup \mathcal{I}(f) \ ,$$

ce qui nous donne l'inégalité $\sup \mathcal{I}(\alpha f) \le \alpha \cdot \sup \mathcal{I}(f)$. En retournant l'argument, si $h \in \mathcal{H}(f)$, alors $\alpha h \in \mathcal{H}(\alpha f)$ et donc $\alpha \cdot \mathcal{A}(\mu, h) = \mathcal{A}(\mu, \alpha h) \le \sup \mathcal{I}(\alpha f)$, ce qui donne l'inégalité dans l'autre sens $\alpha \cdot \sup \mathcal{I}(f) \le \sup \mathcal{I}(\alpha f)$.

• (iv) : La seule fonction étagée positive inférieure ou égale à la fonction nulle est la fonction nulle. Le résultat se déduit de [7.3.iii].

• (v) : Si $E \subset F$, alors $\mathbf{1}_E \cdot f \le \mathbf{1}_F \cdot f$ sur Ω et donc par (ii) on a

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_E f \, \mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \mathbf{1}_F \cdot f \, \mathrm{d}\mu = \int_F f \, \mathrm{d}\mu \ .$$

• (vi) : Soit $h \in \mathcal{H}(\mathbf{1}_E \cdot f)$ et soit D une subdivision de Ω adaptée à h. Vu que les inégalités $0 \le h \le \mathbf{1}_E \cdot f$ impliquent que $h = 0$ sur E^c, on peut supposer que E^c appartient à D (voir la preuve de [7.6]). Si $A \in D$ est donc différent de E^c, alors $A \subset E$ par définition d'une subdivision (les éléments sont disjoints). Et donc par croissance d'une mesure [6.9.ii], on a montré l'implication

$$A \in D \ , \ A \ne E^c \qquad \Rightarrow \qquad 0 \le \mu(A) \le \mu(E) = 0 \ .$$

Avec ces préparations on calcule :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mu, h) &= \sum_{A \in D} h\langle A\rangle \cdot \mu(A) = 0 \cdot \mu(E^c) + \sum_{A \in D, A \ne E^c} h\langle A\rangle \cdot \mu(A) \\ &= \sum_{A \in D, A \ne E^c} h\langle A\rangle \cdot 0 = 0 \ . \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $h \in \mathcal{H}(\mathbf{1}_E \cdot f)$ on a $\mathcal{A}(\mu, h) = 0$, ce qui montre qu'on a $\mathcal{I}(\mathbf{1}_E \cdot f) = \{0\}$. Et donc $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup \mathcal{I}(\mathbf{1}_E \cdot f) = 0$. $\boxed{CQFD}$

7.9 Nota Bene. Dans la liste des propriétés de l'intégrale on n'a pas mentionné l'additivité, et pour cause. Il est facile de construire des exemples d'espaces mesurés et de fonctions f et g où on n'a pas $\int_\Omega (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$. Considérons par exemple l'espace $\Omega = \{0, 1\}$ avec la tribu minimale $\mathcal{F} = \{\, \emptyset, \Omega \,\}$ et la mesure $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définie par $\mu(\Omega) = 1$. Sur cet espace mesuré on considère les deux fonctions $f, g : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définies par

$$f(0) = 1 \ , \ f(1) = 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 0 \ , \ g(1) = 1 \ .$$

Vu qu'une fonction étagée est forcément constante (dans $h = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$, les A_i ne peuvent être que $\emptyset$ ou Ω), il s'ensuit immédiatement qu'on a $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu = 0$. Par contre, $f + g$ est la fonction constante 1 et on trouve $\int_\Omega (f+g) \, \mathrm{d}\mu = 1$. Et donc sur cet espace mesuré l'intégrale n'est pas additive.

→ **7.10 Exercice.** Montrer que $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ est donnée par la formule

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup\{\, \mathcal{A}(\mu, \mathbf{1}_E \cdot h) \mid \ h \text{ étagée}, \, h \le f \,\} \ .$$

→ **7.11 Exercice.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesurè, soit E et F deux ensembles mesurables disjoints et soit $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction positive. Montrer qu'on a l'égalité

$$\int_{E \cup F} f \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu + \int_F f \, \mathrm{d}\mu \ .$$

En déduire que si $f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g$, alors $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$ (voir aussi [8.10]).

8. Le théorème de convergence montone de Beppo-Levi

8.1 Théorème (de convergence monotone de Beppo-Levi). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $f_n : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$, $n \in \mathbf{N}$ *une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors la limite (simple)* $f = \lim_{n\to\infty} f_n : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *est mesurable et on a l'égalité*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \ .$$

Preuve. Par [3.15] ou [3.16] on sait déjà que $f = \lim_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} f_n$ est mesurable. De la croissance de la suite f_n et [7.8.ii] on déduit la croissance de la suite $\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$. Par [2.2] il existe donc $L \in \overline{\mathbf{R}}$ tel que

$$L = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \ . \tag{8.2}$$

On a aussi l'inégalité $f_n \le f$ pour tout n, donc $\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$, ce qui implique l'inégalité

$$L \le \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \ .$$

Il nous reste donc à montrer $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \le L$ pour terminer la preuve. Pour cela on passe par la définition de l'intégrale qui nous dit que cette inégalité est équivalente à l'énoncé

$$h : \Omega \to \mathbf{R}_+ \text{ étagée et } h \le f \qquad \Longrightarrow \qquad \int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu \le L \ ,$$

parce que $\sup A \le L \Leftrightarrow \forall a \in A : a \le L$. L'idée qu'on va employer est maintenant qu'on va fixer une fonction étagée h vérifiant $h \le f$ et qu'on va montrer l'inégalité $p \cdot \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \le L$ pour tout $p \in \,]0,1[$. Le passage à la limite à gauche $p \uparrow 1$ nous donne alors l'inégalité voulue, ce qui terminera la preuve.

Prenons donc $p \in \,]0,1[$ et posons

$$E_n = \{\omega \in \Omega \mid p \cdot h(\omega) \le f_n(\omega)\} = (p \cdot h - f_n)^{-1}([\,-\infty, 0\,]) \ ,$$

ce qui est un ensemble mesurable par [3.4], [2.11] et le fait que $p\cdot h - f_n$ est mesurable [4.11] ($p \cdot h$ prend ses valeurs dans $\mathbf{R}_+$, donc la somme $(p \cdot h) + ((-1) \cdot f_n)$ est bien définie).

Vu l'inégalité $f_n \le f_{n+1}$ il est évident qu'on a l'inclusion $E_n \subset E_{n+1}$. Mais on a aussi l'égalité $\cup_{n\in\mathbf{N}} E_n = \Omega$. Pour le voir, on prend $\omega \in \Omega$ et on distingue les deux cas : $h(\omega) = 0$ et $h(\omega) > 0$ (h est positive). Dans le premier cas on a $\omega \in E_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ parce que f_n est positive, et donc $\omega \in \cup_{n\in\mathbf{N}} E_n$. Dans le deuxième cas on a les inégalités

$$p \cdot h(\omega) < h(\omega) \le f(\omega) \ ,$$

parce que $0 < p < 1$ et $h(\omega) > 0$. Mais $f_n(\omega)$ est une suite croissante avec limite $f(\omega)$ et donc il existe $n_o \in \mathbf{N}$ tel que $f_{n_o}(\omega) > p \cdot h(\omega)$. Et alors on a

$\omega \in E_{n_o} \subset \cup_{n\in\mathbf{N}} E_n$. La conclusion est donc que tout $\omega \in \Omega$ appartient à $\cup_{n\in\mathbf{N}} E_n$, ce qui montre l'égalité $\Omega = \cup_{n\in\mathbf{N}} E_n$.

La définition de E_n dit qu'on a l'inégalité $p \cdot h \le f_n$ sur E_n, ce qui nous permet d'écrire les (in)égalités

$$p \cdot \int_{E_n} h \,\mathrm{d}\mu \overset{[7.8.\mathrm{iii}]}{=} \int_{E_n} p \cdot h \,\mathrm{d}\mu \overset{[7.8.\mathrm{ii}]}{\le} \int_{E_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \overset{[7.8.\mathrm{v}]}{\le} \int_{\Omega} f_n \,\mathrm{d}\mu \overset{(8.2)}{\le} L \ .$$

On ne garde que les extrémités, ce qui nous donne :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad : \quad p \cdot \int_{E_n} h \,\mathrm{d}\mu \le L \ .$$

Par [7.8.v] la suite $\int_{E_n} h \,\mathrm{d}\mu$ est croissante, elle admet donc une limite qui vérifie elle aussi l'inégalité

$$p \cdot \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} h \,\mathrm{d}\mu \le L \ .$$

(Attention : même dans $\overline{\mathbf{R}}$ a-t-on l'implication $a \le b \in \overline{\mathbf{R}}$ et $p \in \,]0,\infty[\; \Rightarrow pa \le pb$.) Pour en déduire $p \cdot \int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu \le L$ on choisit une subdivision D de Ω adaptée à la fonction étagée h, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu &\overset{[7.8.\mathrm{i}]}{=} \mathcal{A}_\mu(\Omega, h) = \sum_{A\in D} h\langle A\rangle \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} \mu(A) \overset{[6.9.\mathrm{iii}]}{=} \sum_{A\in D} h\langle A\rangle \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} \lim_{n\to\infty} \mu(A\cap E_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{A\in D} h\langle A\rangle \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} \mu(A\cap E_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_\mu(E_n, h) \overset{[7.8.\mathrm{i}]}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} h \,\mathrm{d}\mu \ ,\end{aligned}$$

où la quatrième égalité demande un peu d'attention : c'est une somme finie, donc on a le droit d'échanger limite et somme, mais il ne faut pas oublier de vérifier qu'on a le droit d'échanger limite et le produit tordu (ce qui est le cas).

Avec ce calcul on a terminé la preuve : pour une fonction étagée positive h vérifiant $h \le f$ et un $p \in \,]0,1[$ on a montré l'inégalité $p \cdot \int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu \le L$, donc en prenant la limite $p \uparrow 1$ on a l'inégalité $\int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu \le L$, et donc, en prenant le sup sur tous les h, on obtient l'inégalité $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \le L$. Vu qu'on avait déjà l'inégalité $L \le \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$, on a égalité. $\boxed{CQFD}$

8.3 Remarque pour les curieux. Si on regarde de plus près la preuve du théorème de Beppo-Levi, on s'aperçoit que la dernière partie est (presque) la preuve que l'application

$$\mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+ \qquad , \qquad E \mapsto \int_E h \,\mathrm{d}\mu$$

est une mesure sur $\mathcal{F}$. On n'a pas mis en évidence ce fait, car on verra plus loin [19.1] que ce résultat reste valable pour une fonction h mesurable positive quelconque, non-seulement pour une fonction *étagée* positive. Mais, comme on peut le deviner, pour montrer ce résultat plus général on a besoin du théorème de Beppo-Levi.

8.4 Exemple. Il est facile de construire des exemples de suites de fonctions positives non-croissantes pour lesquelles on ne peut pas intervertir limite et intégrale, ce qui montre que l'hypothèse de croissance dans le théorème de Beppo-Levi n'est pas superflue. Regardons par exemple l'espace $\Omega = \mathbf{N}$ muni de la tribu totale $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbf{N})$ et la mesure de comptage $\mu = C_{\mathbf{N}}$. Sur $\mathbf{N}$ on considère la suite de fonctions étagées $h_n : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ définie par

$$h_n = \frac{1}{n+1} \cdot \mathbf{1}_{\{0,\ldots,n\}} \ .$$

Il est évident qu'on a $\int_{\mathbf{N}} h_n \, \mathrm{d}C_{\mathbf{N}} = \frac{1}{n+1} \cdot C_{\mathbf{N}}(\{0,\ldots,n\}) = 1$ et que $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{N}} h_n \, \mathrm{d}C_{\mathbf{N}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbf{N}} \lim_{n\to\infty} h_n \, \mathrm{d}C_{\mathbf{N}} = 0 \ .$$

Dans cet exemple on n'a donc pas le droit d'intervertir limite et intégrale. Notons en passant que la convergence $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ est uniforme, ce qui montre que la convergence uniforme n'est pas non plus une condition suffisante pour pouvoir intervertir limite et intégrale.

8.5 Remarque. Le théorème de Beppo-Levi est crucial dans la théorie de l'intégration. Par contre, dans la pratique on a beaucoup plus souvent des suites de fonctions non-positives et/ou non-croissantes. Pour ces cas le théorème de Beppo-Levi ne s'applique pas. Le théorème pour intervertir limite et intégrale avec la condition de convergence uniforme, connu de l'intégrale de Riemann, n'est pas très pratique car, soit la convergence uniforme est difficile à établir, soit on n'a pas de convergence uniforme, soit la convergence uniforme n'est pas suffisante (voir l'exemple précédent). Le théorème de convergence dominée de Lebesgue qu'on montrera plus tard est à la fois plus général que le théorème avec la convergence uniforme et plus facile à appliquer car les conditions sont plus facile à vérifier.

8.6 Définition (rappel). Soit E un ensemble et soit $f_n : E \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ une suite de fonctions (réelles). On dit que la suite f_n *converge simplement* vers une fonction $f : E \to \mathbf{R}$ si

$$\forall x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ ,$$

ce qui veut dire

$$\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

On dit que la suite f_n *converge uniformément* vers f si elle vérifie la condition

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall x \in E \ \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

On montre que cette condition est équivalente à la condition

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geq N : \ \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ ,$$

ce qui se résume comme $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

8.7 Théorème. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et* $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *une fonction mesurable positive. Alors il existe une suite croissante de fonctions étagées positives* $h_n : \Omega \to \mathbf{R}_+$, $n \in \mathbf{N}$ *qui converge simplement vers* f : $\forall \omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} h_n(\omega) = f(\omega)$. *Si* f *est majorée, alors la convergence est uniforme.*

Preuve. On pose $B = f^{-1}(\infty)$ et, pour $k, n \in \mathbf{N}$, $A_{n,k} = f^{-1}([\,\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\,[)$. Les ensembles B et $A_{n,k}$ appartiennent à $\mathcal{F}$ parce que $\{\infty\}$ et $[\,\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\,[$ appartiennent à $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}_+)$ et f est mesurable. On pose

$$h_n = n \cdot \mathbf{1}_B + \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \cdot \mathbf{1}_{A_{n,k}} \ ,$$

qui est une fonction étagée par [5.3.iii].

Vu que $[\,\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\,[\;=\; [\,\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\,[\,\cup\, [\,\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\,[$, il est immédiat que $A_{n,k} = A_{n+1,2k} \cup A_{n+1,2k+1}$ en tant que réunion disjointe et donc que

$$\begin{aligned} \frac{k}{2^n} \cdot \mathbf{1}_{A_{n,k}} = \frac{2k}{2^{n+1}} \cdot \mathbf{1}_{A_{n+1,2k}} &+ \frac{2k}{2^{n+1}} \cdot \mathbf{1}_{A_{n+1,2k+1}} \\ &\le \frac{2k}{2^{n+1}} \cdot \mathbf{1}_{A_{n+1,2k}} + \frac{2k+1}{2^{n+1}} \cdot \mathbf{1}_{A_{n+1,2k+1}} \ . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \cdot \mathbf{1}_{A_{n,k}} &\le \sum_{k=0}^{n2^n} \Big(\frac{2k}{2^{n+1}} \cdot \mathbf{1}_{A_{n+1,2k}} + \frac{2k+1}{2^{n+1}} \cdot \mathbf{1}_{A_{n+1,2k+1}} \Big) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n2^{n+1}+1} \frac{\ell}{2^{n+1}} \cdot \mathbf{1}_{A_{n+1,\ell}} \le \sum_{\ell=0}^{(n+1)2^{n+1}} \frac{\ell}{2^{n+1}} \cdot \mathbf{1}_{A_{n+1,\ell}} \ , \end{aligned}$$

et donc que $h_n \le h_{n+1}$. Ceci montre que la suite est croissante.

Pour montrer que la limite est f, prenons $\omega \in \Omega$. Si $f(\omega) = \infty$, alors $\omega \in B$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $h_n(\omega) = n$, et donc $\lim_{n\to\infty} h_n(\omega) = f(\omega)$. Si $f(\omega) \neq \infty$, alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $f(\omega) \le N$. Fixons maintenant $n \ge N$. Il existe alors un unique $k \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{k}{2^n} \le f(\omega) < \frac{k+1}{2^n}$, c'est-à-dire $\omega \in A_{n,k}$ et $\ell \neq k \Rightarrow \omega \notin A_{n,\ell}$. Vu que $f(\omega) \le N \le n$, il s'ensuit que $k \le n2^n$. Donc $h_n(\omega) = \frac{k}{2^n}$ et $h_n(\omega) \le f(\omega) < h_n(\omega) + 2^{-n}$. Ceci étant vrai pour tout $n \ge N$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} h_n(\omega) = f(\omega)$.

Si f est majorée, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall \omega \in \Omega : f(\omega) \le N$. Il s'ensuit que pour tout $n \ge N$ et tout $\omega \in \Omega$ on a $0 \le f(\omega) - h_n(\omega) < 2^{-n}$, ce qui montre que la convergence est uniforme. $\boxed{CQFD}$

8.8 Corollaire. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *deux fonctions positives mesurables. Alors on a l'égalité*

$$\int_\Omega (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu \ .$$

Preuve. On applique [8.7] pour obtenir deux suites croissantes de fonctions étagées f_n et g_n telles que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ et $\lim_{n\to\infty} g_n = g$. Alors la suite $h_n = f_n + g_n$ est aussi une suite croissante de fonctions étagées qui vérifie $\lim_{n\to\infty} h_n = f + g$. Et on fait le calcul

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f+g)\,\mathrm{d}\mu &\overset{[8.1]}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n + g_n)\,\mathrm{d}\mu \\ &\overset{[7.3.\mathrm{iv}],\ [7.8.\mathrm{i}]}{=} \lim_{n\to\infty} \Big(\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g_n\,\mathrm{d}\mu \Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n\,\mathrm{d}\mu \\ &\overset{[8.1]}{=} \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu\ ,\end{aligned}$$

où il faut remarquer que le résultat $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ reste valable dans $\overline{\mathbf{R}}_+$. $\boxed{CQFD}$

→ **8.9 Corollaire.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $f_n : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$, $n \in \mathbf{N}$ *une suite de fonctions mesurables positives. Alors on a l'égalité*

$$\int_\Omega \sum_{n\in\mathbf{N}} f_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu\ .$$

→ **8.10 Lemme.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *deux fonctions mesurables. Si* $f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g$, *alors* $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu$.

8.11 Proposition (l'inégalité de Markov-Chebyshev). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré,* $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *une fonction mesurable positive et* $t \in\ ]0, \infty[$ *un réel strictement positif. Si on pose* $E_t = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geq t\}$, *alors* E_t *est mesurable et on a l'inégalité*

$$\mu(E_t) \leq \frac{1}{t} \cdot \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\ .$$

Preuve. Par définition de E_t on a l'inégalité $t \cdot \mathbf{1}_{E_t} \leq f$, car si $\omega \in E_t$ on a $t \leq f(\omega)$ et si $\omega \notin E_t$, alors $(t \cdot \mathbf{1}_{E_t})(\omega) = 0$. On a donc

$$t \cdot \mu(E_t) = t \cdot \int_\Omega \mathbf{1}_{E_t}\,\mathrm{d}\mu \overset{[7.8.\mathrm{iii}]}{=} \int_\Omega t \cdot \mathbf{1}_{E_t}\,\mathrm{d}\mu \overset{[7.8.\mathrm{ii}]}{\leq} \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\ .$$ $\boxed{CQFD}$

8.12 Corollaire. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *une fonction mesurable positive.*

(i) *Si* $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu < \infty$, *alors* f *est presque partout finie.*

(ii) $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = 0$ *si et seulement si* $f \overset{\mu\text{-pp}}{=} 0$.

Preuve. $\boxed{CQFD}$

8.13 Lemme. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré,* $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *une fonction positive et* $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}_+$ *un nombre positif (ou infini). Alors on a l'égalité*

$$\int_\Omega \alpha \centerdot f \, \mathrm{d}\mu = \alpha \centerdot \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \ .$$

Preuve. Pour $0 < \alpha < \infty$ ceci est [7.8.iii], car dans ce cas le produit tordu coïncide avec le produit ordinaire. Pour $\alpha = 0$, c'est [7.8.iv], mais ici le produit tordu s'impose dans le membre de droite car $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$ peut être ∞. Reste donc le cas $\alpha = \infty$. On note d'abord que la fonction $\infty \centerdot f$ est donnée par

$$(\infty \centerdot f)(\omega) = \infty \quad \text{si } f(\omega) > 0, \qquad (\infty \centerdot f)(\omega) = 0 \quad \text{si } f(\omega) = 0.$$

Si on note $E = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > 0\}$, alors on obtient le résultat $\infty \centerdot f = \infty \centerdot \mathbf{1}_E$. La mesurabilité de f implique que E est mesurable et la combinaison de [6.18] et [8.12.ii] nous donne l'équivalence

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu(E) = 0 \ .$$

Mais on a aussi

$$\int_\Omega \infty \centerdot f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_E \centerdot \infty \, \mathrm{d}\mu = \int_E \infty \, \mathrm{d}\mu \ .$$

En combinant ces résultats avec [7.8.vi] on en déduit que si $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = 0$, alors $\int_\Omega \infty \centerdot f \, \mathrm{d}\mu = 0$. Il s'ensuit qu'on a $\infty \centerdot \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \infty \centerdot f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Si $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu > 0$, on en déduit que $\mu(E) > 0$, ce qui veut dire que $\infty \centerdot \mathbf{1}_E$ n'est pas presque partout finie. Avec [8.12.i] on en déduit que $\int_\Omega \infty \centerdot \mathbf{1}_E \, \mathrm{d}\mu = \infty$ et donc $\infty \centerdot \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \infty \centerdot \mathbf{1}_E \, \mathrm{d}\mu = \infty$. $\boxed{CQFD}$

9. L'intégrale de fonctions réelles ou complexes

9.1 Définitions. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ une fonction. On lui associe deux fonctions positives f^+ et f^- définies comme

$$f^+ = \max(f, 0) \qquad \text{et} \qquad f^- = \max(-f, 0) = -\min(f, 0) \ .$$

Alors on a $f = f^+ - f^-$, une soustraction qui est bien définie car on n'a jamais $\infty - \infty$. On dit que f est *intégrable sur* $E \in \mathcal{F}$ (ou μ*-intégrable* si on doit être plus précis, ou *intégrable par rapport à la mesure* μ) si f est mesurable et si les deux intégrales $\int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu$ et $\int_E f^- \, \mathrm{d}\mu$ sont finies.

Avec la notion de μ-intégrabilité, on étend la notion d'intégrale à des fonctions μ-intégrables en définissant l'intégrale de f sur $E \in \mathcal{F}$ par rapport à la mesure μ, noté $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$, comme

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E \Big(f^+ - f^-\Big) \,\mathrm{d}\mu \stackrel{\text{déf}}{=} \int_E f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_E f^- \,\mathrm{d}\mu \ .$$

La condition d'être intégrable assure que cette différence est bien définie et appartient à $\mathbf{R}$. De plus c'est bien un extension de l'intégrale car si f est déjà positive, on a $f^+ = f$ et $f^- = 0$ et la nouvelle définition de $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ coïncide avec la définition antérieure de l'intégrale pour des fonctions positives.

Si $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est une fonction à valeurs complexes, on dit qu'elle est μ-intégrable sur $E \in \mathcal{F}$ si ses parties réelle et imaginaire sont μ-intégrables sur E. Si $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est une fonction complexe μ-intégrable sur $E \in \mathcal{F}$, on définit son intégrale par rapport à la mesure μ, toujours notée $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$, en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E \Big(\mathrm{Re}(f) + i \cdot \mathrm{Im}(f)\Big) \,\mathrm{d}\mu \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\int_E \mathrm{Re}(f) \,\mathrm{d}\mu\Big) + i \cdot \Big(\int_E \mathrm{Im}(f) \,\mathrm{d}\mu\Big) \ .$$

9.2 Nota Bene. La définition de μ-intégrabilité incorpore la condition d'être mesurable. Il n'est donc pas nécessaire de parler de fonctions mesurables et μ-intégrables, il suffit de parler de fonctions μ-intégrables, ce qui veut dire la même chose.

9.3 Une reformulation des critères. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $E \in \mathcal{F}$ un ensemble mesurable et soit $f : \Omega \to \mathbf{K}$ avec $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$ une fonction mesurable.*

(i) *f est intégrable sur Ω si et seulement si $\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$.*

(ii) *f est intégrable sur E si et seulement si $\mathbf{1}_E \centerdot f$ est intégrable sur Ω. Si c'est le cas on a l'égalité $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_E \centerdot f \,\mathrm{d}\mu$.*

Preuve. $\boxed{CQFD}$

9.4 Remarque. On peut reformuler [9.3.i] en disant que f est intégrable si et seulement si $|f|$ est intégrable, mais cette façon de dire les choses est presque sans intérêt.

9.5 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $E \subset \Omega$ un ensemble mesurable et soit $f : \Omega \to \mathbf{K}$ avec $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$ une fonction mesurable. Alors f est μ-intégrable sur E si et seulement si $f|_E$ est $\mu|_{\mathcal{F}_E}$-intégrable sur E ; si c'est le cas, on a l'égalité*

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E f|_E \,\mathrm{d}\mu|_{\mathcal{F}_E} \ .$$

9.6 Remarque. Ce résultat est l'équivalent pour les fonctions intégrables de [7.6], valable pour les fonctions positives. Les remarques [7.5] et [7.7] restent valables.

Preuve. Si on épluche la condition pour que f soit μ-intégrable sur E, on trouve que c'est le cas si et seulement si les quatre (deux dans le cas $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$) conditions

$$\int_E \mathrm{Re}(f)^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty \quad , \quad \int_E \mathrm{Re}(f)^- \,\mathrm{d}\mu < \infty \quad ,$$
$$\int_E \mathrm{Im}(f)^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty \quad , \quad \int_E \mathrm{Im}(f)^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

sont vérifiées. Selon [7.6] ces conditions sont équivalentes aux conditions

$$\int_E \mathrm{Re}(f)^+|_E \,\mathrm{d}\mu|_{\mathcal{F}_E} < \infty \quad , \quad \int_E \mathrm{Re}(f)^-|_E \,\mathrm{d}\mu|_{\mathcal{F}_E} < \infty \quad ,$$
$$\int_E \mathrm{Im}(f)^+|_E \,\mathrm{d}\mu|_{\mathcal{F}_E} < \infty \quad , \quad \int_E \mathrm{Im}(f)^-|_E \,\mathrm{d}\mu|_{\mathcal{F}_E} < \infty \ .$$

Par définition ces conditions disent que $f|_E$ est $\mu|_{\mathcal{F}_E}$-intégrable. $\boxed{CQFD}$

9.7 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $E \subset \Omega$ un ensemble mesurable et soit $f, g : \Omega \to \mathbf{K}$ deux fonctions mesurables avec $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$.*

(i) *Si f est intégrable sur Ω, si $f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g$, alors g est intégrable sur Ω et $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$.*
(ii) *Si f est intégrable sur Ω, alors f est μ-presque partout finie.*
(iii) *Si g est intégrable sur Ω et si $|f| \overset{\mu\text{-pp}}{\leq} |g|$, alors f est intégrable sur Ω.*
(iv) *Si f est intégrable sur Ω, on a l'inégalité $|\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu| \leq \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu$.*
(v) *Si $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$, si f et g sont intégrables sur Ω et si $f \overset{\mu\text{-pp}}{\leq} g$, alors $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$.*

Preuve. $\boxed{CQFD}$

9.8 Nota Bene. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ une fonction intégrable. La mesurabilité de f implique que l'ensemble

$$E = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = \pm\infty\}$$

est mesurable. Par [9.7.ii] f est presque partout finie et donc par [6.18] on a $\mu(E) = 0$. Si on regarde maintenant la fonction $g : \Omega \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(\omega) = f(\omega) \quad \text{si } f(\omega) \in \mathbf{R} \qquad \text{et} \qquad g(\omega) = 0 \quad \text{si } \omega \in E,$$

alors g est mesurable par [3.7] et $g \overset{\mu\text{-pp}}{=} f$ parce que $\mu(E) = 0$. Donc par [9.7.i] $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$.

La conclusion est que si on veut calculer la valeur de l'intégrale d'une fonction intégrable f à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, il suffit de calculer la valeur de l'intégrale de la fonction g à valeurs dans $\mathbf{R}$ obtenue à partir de f en changeant les valeurs non-finies en zéro. C'est cette conclusion qui nous amène à dire qu'il n'est pas nécessaire de considérer des fonctions intégrables à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, il suffit de considérer des fonctions intégrables à valeurs dans $\mathbf{R}$. Désormais on ne distingue donc plus que deux types de fonctions : à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$. La valeur de l'intégrale d'une fonction mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ existe toujours et est un élément de $\overline{\mathbf{R}}_+$. La valeur de l'intégrale d'une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$ (et donc a fortiori à valeurs dans $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$) n'existe que si elle est intégrable et dans ce cas elle est un élément de $\mathbf{C}$ (ou $\mathbf{R}$ si elle est à valeurs dans $\mathbf{R}$).

→ **9.9 Exercice.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ une fonction mesurable. Montrer que $\infty \cdot f$ est intégrable si et seulement si $f \overset{\mu\text{-pp}}{=} 0$.

9.10 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $f, g : \Omega \to \mathbf{C}$ deux fonctions intégrables et $\alpha \in \mathbf{C}$ un nombre complexe. Alors $f + \alpha g$ est intégrable et on a l'égalité*

$$\int_\Omega (f + \alpha g)\, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\, \mathrm{d}\mu + \alpha \cdot \int_\Omega g\, \mathrm{d}\mu \ .$$

Preuve. $\boxed{CQFD}$

9.11 Discussion. Jusqu'à maintenant il y a un aspect de l'intégrale qu'on a négligé : la dépendance du choix de la tribu. En principe le choix de la tribu est implicite dans le choix de la mesure en tant qu'application sur la tribu. Et il est évident que l'intégrale dépend du choix de la mesure. Mais on sera confronté au cas où on a deux tribus différentes et la "même" mesure. Plus précisément on a deux tribus $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur un ensemble Ω dont l'une est incluse dans l'autre : $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, et on a une mesure $\mu : \mathcal{G} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définie sur la tribu la plus grande. Par [6.6.iii] la restriction de μ à $\mathcal{F}$ est donc une mesure sur $\mathcal{F}$. Et dans l'autre sens, toute fonction f sur Ω qui est mesurable pour la tribu $\mathcal{F}$ l'est aussi pour la tribu $\mathcal{G}$ à cause de l'inclusion $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. On dispose donc de deux espaces mesurés $(\Omega, \mathcal{F}, \mu|_\mathcal{F})$ et $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$. Si maintenant $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ est une fonction positive mesurable par raport à la tribu $\mathcal{F}$, elle est aussi mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{G}$ et on peut considérer les deux intégrales

$$\int_\Omega^\mathcal{G} f\, \mathrm{d}\mu \qquad \text{et} \qquad \int_\Omega^\mathcal{F} f\, \mathrm{d}\mu|_\mathcal{F} \ ,$$

où pour encore mieux distinguer les deux intégrales, on a mis la tribu concernée en exposant. Vu que la tribu $\mathcal{G}$ est plus grande que $\mathcal{F}$, il y a aussi plus de fonctions étagées pour la tribu $\mathcal{G}$. L'ensemble des fonctions étagées en dessous de f est donc aussi plus grand pour la tribu $\mathcal{G}$. Et donc on ne peut pas exclure que le sup sur cet ensemble, ce qui donne la valeur de l'intégrale, soit aussi plus grand pour la tribu $\mathcal{G}$. Le résultat suivant montre que ce n'est pas le cas : les deux intégrales donnent la même valeur. C'est donc justifié d'écrire ces *deux* intégrales par le *même* symbole $\int_\Omega f\, \mathrm{d}\mu$.

9.12 Proposition. *Soit* $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ *un espace mesuré, soit* $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ *une autre tribu et soit* $f : \Omega \to \mathbf{K}$ *avec* $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ *ou* $\mathbf{C}$ *une application* $\mathcal{F}$*-*$\mathcal{B}(\mathbf{K})$*-mesurable.*

(i) f *est aussi* $\mathcal{G}$*-*$\mathcal{B}(\mathbf{K})$*-mesurable.*

(ii) *On a toujours l'égalité*

$$\int_\Omega^{\mathcal{G}} |f| \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega^{\mathcal{F}} |f| \,\mathrm{d}\mu|_{\mathcal{F}} \ . \tag{9.13}$$

(iii) *Si* f *est intégrable (pour l'une des deux mesures* μ *ou* $\mu|_{\mathcal{F}}$*, donc pour les deux), alors on a l'égalité*

$$\int_\Omega^{\mathcal{G}} f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega^{\mathcal{F}} f \,\mathrm{d}\mu|_{\mathcal{F}} \ . \tag{9.14}$$

Preuve. L'inclusion $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ implique immédiatement que f est aussi $\mathcal{G}$-$\mathcal{B}(\mathbf{K})$-mesurable. Le reste de la preuve se déroule en plusieurs étapes. On suppose d'abord que $f = \mathbf{1}_E$ est une fonction indicatrice d'un ensemble mesurable E (dans $\mathcal{F}$, donc dans $\mathcal{G}$). Par [7.3.i] et [7.8.i] on peut affirmer que (9.13) est vrai pour ces fonctions, car les deux membres sont égaux à $\mu(E)$. Par [7.3.iii/iv] et [7.8.i] (ou par [8.8] et [8.13]) on peut alors affirmer que (9.13) est vrai pour des fonctions étagées. Par [8.7] et le théorème de Beppo-Levi [8.1] on en déduit que (9.13) est vrai pour toute fonction mesurable positive. Vu que dans (9.13) on a mis les valeurs absolues, c'est donc vrai pour toutes les fonctions.

Pour montrer (9.14), il suffit d'appliquer la définition [9.1] d'une intégrale qui utilise la décomposition de la fonction en ses "composantes" positives. $\boxed{CQFD}$

→ **9.15 Exercice.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $\omega \in \Omega$ tel que le singleton $\{\omega\}$ est mesurable, et soit f une fonction mesurable sur Ω à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$.

(i) Montrer qu'on a toujours $\int_{\{\omega\}} |f| \,\mathrm{d}\mu = |f(\omega)| \cdot \mu(\{\omega\})$.

(ii) Montrer que si f est intégrable sur $\{\omega\}$, alors $\int_{\{\omega\}} f \,\mathrm{d}\mu = f(\omega) \cdot \mu(\{\omega\})$.

10. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue

10.1 Lemme (de Fatou). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f_n : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$*,* $n \in \mathbf{N}$ *une suite de fonctions mesurables. Alors on a l'inégalité*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \ .$$

Preuve. Posons $g_n = \inf_{k\geq n} f_n : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$, alors par [3.15] g_n et $\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} g_n$ sont mesurables. De plus, la suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante. On peut donc appliquer le théorème de Beppo-Levi [8.1] pour conclure

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu \overset{[8.1]}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \ . \tag{10.2}$$

Par définition de g_n on a en particulier l'inégalité $g_n \leq f_n$, donc par [7.8.ii] on a

$$\int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \ .$$

Le membre de gauche admet une limite (voir (10.2)), mais on ne sait pas si le membre de droite admet une limite. Par contre, un lim inf existe toujours et respecte (aussi) les inégalités larges. Il s'ensuit qu'on a l'inégalité (large)

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \overset{(10.2)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \ . \quad \boxed{CQFD}$$

10.3 Remarque. On ne peut pas améliorer l'inégalité dans le lemme de Fatou sans hypothèses supplémentaires, ni énoncer un résultat analogue pour la limite supérieure. Les exemples suivantes montrent pourquoi.

On considère l'espace $\Omega = \{0,1\}$ avec la tribu totale $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et la mesure μ définie par $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 1$. On prend la suite de fonctions $f_n : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définie par

$$f_n = \mathbf{1}_{\{0\}} \quad \text{si } n \text{ est pair} \qquad , \qquad f_n = \mathbf{1}_{\{1\}} \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Il est facile de voir que $\liminf_{n\to\infty} f_n = 0$ et $\limsup_{n\to\infty} f_n = 1$ (en tant que fonctions constantes) et que $\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors on a

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = 0 < 1 = \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = 1 < 2 = \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \ .$$

Dans les deux cas on a une inégalité stricte.

Considérons maintenant l'espace $\Omega = \mathbf{N}$ avec la tribu totale $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbf{N})$ et la mesure de comptage $\mu = C_\mathbf{N}$. On prend la suite de fonctions étagées $f_n : \mathbf{N} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définie par

$$f_n = \tfrac{1}{n+1} \cdot \mathbf{1}_{\{0,\dots,n\}} \ .$$

Il est facile de voir que $\limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n = 0$ en tant que fonction constante et que $\int_\mathbf{N} f_n \,\mathrm{d}C_\mathbf{N} = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ici on a

$$\int_\mathbf{N} \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}C_\mathbf{N} = 0 < 1 = \liminf_{n\to\infty} \int_\mathbf{N} f_n \,\mathrm{d}C_\mathbf{N}$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}C_{\mathbf{N}} = 1 > 0 = \int_{\mathbf{N}} \limsup_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}C_{\mathbf{N}} \ .$$

De nouveau on a des inégalités strictes, mais dans la variante de la lim sup l'inégalité est dans l'autre sens. D'où le fait qu'il faut abandonner l'idée d'une variante du lemme de Fatou pour la lim sup. Mais attention : tout ceci est sous l'hypothèse que les fonctions sont *positives*. Si on considère des fonctions négatives, il est facile d'obtenir un énoncé avec une lim sup.

→ **10.4 Exercice.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $f_n : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$, $n \in \mathbf{N}$ une suite de fonctions mesurables et soit $g : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ une fonction intégrable. Montrer qu'on a les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbf{N} : f_n \geq g \quad &\Longrightarrow \quad \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \\
\forall n \in \mathbf{N} : f_n \leq g \quad &\Longrightarrow \quad \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \ .
\end{aligned}$$

10.5 Théorème (de convergence dominée de Lebesgue). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions mesurables sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbf{C}$ *vérifiant les hypothèses suivantes.*

(a) *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge presque partout vers une fonction mesurable* $f : \Omega \to \mathbf{C}$.

(b) *Il existe une fonction intégrable* $g : \Omega \to \mathbf{R}_+$ *telle que* $|f_n| \overset{\mu\text{-pp}}{\leq} g$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$.

Sous ces conditions on a les propriétés suivantes.

(i) *Les fonctions* f_n *et* f *sont intégrables.*

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$.

Preuve. L'hypothèse (a) implique (par [6.14]) l'existence d'un ensemble mesurable A de complémentaire négligeable tel que

$$\omega \in A \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega) \ .$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on définit l'ensemble $B_n \subset \Omega$ par

$$B_n = \{\omega \in \Omega \mid |f_n(\omega)| \leq g(\omega)\} \ .$$

Par hypothèse B_n est de complémentaire négligeable, donc par [6.20] l'ensemble $B = \cap_{n\in\mathbf{N}} B_n$ est aussi de complémentaire négligeable. Par [4.13] les B_n sont mesurables, donc B est mesurable. Finalement on définit $C \in \mathcal{F}$ comme l'intersection $C = A \cap B$, qui est donc aussi de complémentaire négligeable [6.20].

• (i) : Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $|f_n| \overset{\mu\text{-pp}}{\leq} g$ donc f_n est intégrable par [9.7.iii]. Si ω appartient à C, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $|f_n(\omega) \leq g(\omega)$ et $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$. Par passage à la limite on a donc aussi $|f(\omega)| \leq g(\omega)$. Vu que C est de complémentaire négligeable, on a $|f| \overset{\mu\text{-pp}}{\leq} g$ et donc, de nouveau par [9.7.iii], f est intégrable.

• (ii) : Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on définit la fonction $g_n : \Omega \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ par

$$g_n = (2g - |f - f_n|\,) \cdot \mathbf{1}_C \ .$$

Les fonctions g, f et f_n étant mesurables, une simple application de [4.12], [3.3] et [3.10] permet de conclure que g_n est mesurable. Pour $\omega \in C^c$ on a $g_n(\omega) = 0$ et pour $\omega \in C$ l'inégalité triangulaire nous donne

$$g_n(\omega) = 2g(\omega) - |f(\omega) - f_n(\omega)| \geq 2g(\omega) - (|f(\omega)| + |f_n(\omega)|) \geq 0 \ .$$

Les fonctions g_n sont donc positives et on peut appliquer le lemme de Fatou [10.1] :

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \ . \tag{10.6}$$

Sur C on a $\lim_{n\to\infty} g_n = 2g$, ce qui implique (avec [3.14]) que $\liminf\limits_{n\to\infty} g_n \overset{\mu\text{-pp}}{=} 2g$. On a donc (avec [9.7.i]) l'égalité

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega 2g \,\mathrm{d}\mu \ . \tag{10.7}$$

De l'autre côté on a $|f - f_n| \leq 2g$ sur C et donc (par [9.7.v]) on a l'inégalité

$$\int_\Omega |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega 2g \,\mathrm{d}\mu < \infty \ ,$$

ce qui nous permet d'écrire (en utilisant [9.10])

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu &= \liminf_{n\to\infty} \Big(\int_\Omega 2g \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \Big) \\ &= \int_\Omega 2g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \ , \end{aligned} \tag{10.8}$$

où on a utilisé le fait que $\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n$ pour toute suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Si on combine (10.6), (10.7) et (10.8), on obtient l'inégalité

$$\int_\Omega 2g \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega 2g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \ ,$$

qu'on peut simplifier en

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq 0$$

parce que $\int_\Omega 2g \,\mathrm{d}\mu$ est finie. Mais la suite $\int_\Omega |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu$ est une suite de réels positifs, donc forcément $\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \geq 0$. Par [3.14] on en déduit le résultat annoncé.

• (iii) : La linéarité de l'intégrale [9.10] permet d'écrire

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega (f - f_n) \,\mathrm{d}\mu \ .$$

Le résultat se déduit maintenant directement de [9.7.iv] et (ii). $\boxed{CQFD}$

10.9 Nota Bene. Pour vérifier les hypothèses (a) et (b) du théorème de convergence dominée il faut trouver deux fonctions f et g sur Ω. La recherche de ces deux fonctions n'est pas aussi difficile qu'on pourrait croire. Commençons avec g. Selon [3.10] et [3.15] la fonction $h = \sup_{n\in\mathbf{N}} |f_n| : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ est mesurable et il est évident que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $|f_n| \overset{\mu\text{-pp}}{\leq} h$. Si h est intégrable, alors la fonction h peut être prise pour g. Et si h n'est pas intégrable, il est inutile de chercher une fonction g intégrable vérifiant (b), car si pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $|f_n| \overset{\mu\text{-pp}}{\leq} g$, alors on a forcément $h \overset{\mu\text{-pp}}{\leq} g$ (si $|f_n| \leq g$ sur B_n, alors $h \leq g$ sur $B = \cap_{n\in\mathbf{N}} B_n$) et donc g ne peut pas être intégrable.

Pour la recherche de f, on note d'abord que selon [3.17] l'ensemble A où la suite f_n converge :

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{ existe dans } \mathbf{C}\,\}$$

est mesurable. S'il existe une fonction f vérifiant l'hypothèse (a), alors A est forcément de complémentaire négligeable. Pour montrer que cette condition est aussi suffisante, supposons que A est de complémentaire négligeable et définissons la fonction $f : \Omega \to \mathbf{C}$ par

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \quad \text{si } \omega \in A \qquad \text{et} \qquad f(\omega) = 0 \quad \text{si } \omega \in A^c \ .$$

Selon [3.16] et [3.7] f est mesurable et, parce que A est de complémentaire négligeable, la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque partout vers f

→ **10.10 Exercice.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables qui converge presque partout vers une fonction mesurable f. Montrer que l'ensemble A défini comme

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)\,\}$$

est mesurable (même si la limite $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega)$ n'existe pas partout).

10.11 Théorème (de convergence dominée - version simplifiée pour usage courant). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbf{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :*

(a) *la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge sur Ω et*
(b) *la fonction $\sup_{n\in\mathbf{N}} |f_n|$ est intégrable.*

Alors les fonctions f_n et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ sont intégrables et on a l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \ .$$

→ **10.12 Exercice.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbf{K}$ et soit $f : \Omega \to \mathbf{K}$ une fonction telle que la suite f_n converge uniformément vers f sur Ω. Supposons finalement que $\mu(\Omega) < \infty$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie les conditions du théorème de convergence dominée (voir aussi [8.4]).

11. Unicité de mesures

11.1 Définitions. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une collection de sous-ensembles de Ω.

• On dit que $\mathcal{C}$ est un π-*système* si elle est stable par intersections finies :

$$A, B \in \mathcal{C} \qquad \Rightarrow \qquad A \cap B \in \mathcal{C} \ .$$

• On dit que $\mathcal{C}$ est un *semi-anneau* si elle est stable par intersections finies (un π-système), contient l'ensemble vide et si, pour tout $A, B \in \mathcal{C}$, la différence $A \setminus B$ est une réunion finie (éventuellement vide) d'éléments de $\mathcal{C}$ deux à deux disjoints :

$$\exists C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C} : \ \Big(\ A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \quad \text{et} \quad i \neq j \ \Rightarrow \ C_i \cap C_j = \emptyset \ \Big) \ .$$

• On dit que $\mathcal{C}$ est un *anneau* si elle est stable par réunion finie et par différence :

$$A, B \in \mathcal{C} \qquad \Rightarrow \qquad A \setminus B \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad A \cup B \in \mathcal{C} \ .$$

• Une *algèbre* est un anneau qui contient l'espace total Ω.

• On dit que $\mathcal{C}$ est un σ-*anneau* si elle est stable par différence et par réunion dénombrable :

$$A, B \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N} : A_n \in \mathcal{C} \qquad \Rightarrow \qquad A \setminus B \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{C} \ .$$

• Une σ-*algèbre* ou *tribu* [1.4], est un σ-anneau qui contient l'espace total Ω.

• On dit que $\mathcal{C}$ est un λ-*système* si elle a les trois propriétés

(i) $\Omega \in \mathcal{C}$,

(ii) stable par différence propre : si $A, B \in \mathcal{C}$ avec $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{C}$,

(iii) stable par réunion dénombrable croissante :

$$\Big(\ \forall n \in \mathbf{N} : A_n \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N} : A_n \subset A_{n+1} \ \Big) \qquad \Rightarrow \qquad \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{C} \ .$$

11.2 Remarques. • Certains auteurs rajoutent le qualificatif «de Boole» au noms semi-anneau, anneau et algèbre. Ceci pour mieux distinguer ces objets des objets de mêmes noms qu'on rencontre dans d'autres disciplines, mais aussi pour souligner la grande ressemblance qui existe avec la logique : l'intersection correspond au "et", l'union correspond au "ou" et le complémentaire correspond à la négation.

• Dans la définition d'un semi-anneau il est superflu d'exiger que l'ensemble vide appartient. Ceci est une conséquence de la condition sur la différence, car on a $\emptyset = A \setminus A$. On l'a mentionné explicitement parce que parfois la définition/ construction d'un semi-anneau ne contient pas automatiquement l'ensemble vide et il faut le rajouter "à la main."

→ **11.3 Lemme.** *On a les implications et équivalences suivantes parmi les différentes types de collections définies en [11.1] :*

$$\sigma\text{-}algèbre \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{matrix} algèbre \\ \sigma\text{-}anneau \end{matrix} \right\} \;\Rightarrow\; anneau \;\Rightarrow\; semi\text{-}anneau \;\Rightarrow\; \pi\text{-}système$$

$$\sigma\text{-}algèbre \quad\Leftrightarrow\quad (\pi\text{-}système\ et\ \lambda\text{-}système)\ .$$

Aucune des implications n'est une équivalence.

11.4 Théorème (π-λ, Dynkin). *Soit Ω un ensemble, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un π-système et $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un λ-système. Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$, alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}$.*

Preuve. On définit Λ comme l'ensemble de toutes les collections $L \subset \mathcal{P}(\Omega)$ qui sont des λ-systèmes et qui contiennent $\mathcal{C}$:

$$\Lambda = \{\, L \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid\ L \text{ un } \lambda\text{-système}, \mathcal{C} \subset L \,\}\ .$$

Λ n'est pas vide car $\mathcal{L} \in \Lambda$ et on peut parler de l'intersection

$$\lambda(\mathcal{C}) = \cap L = \bigcap_{L\in\Lambda} L \subset \mathcal{P}(\Omega)\ .$$

Comme pour une tribu on montre facilement que $\lambda(\mathcal{C})$ est un λ-système qui contient $\mathcal{C}$; c'est le plus petit λ-système contenant $\mathcal{C}$.

Le but est maintenant de montrer l'égalité $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, ce qui terminera la preuve car $\lambda(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}$ par minimalité de $\lambda(\mathcal{C})$. Vu que $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$, donc un λ-système contenant $\mathcal{C}$ [11.3], on a l'inclusion $\lambda(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$, de nouveau par minimalité de $\lambda(\mathcal{C})$. Pour montrer l'inclusion dans l'autre sens, il suffit de montrer que $\lambda(\mathcal{C})$ est un π-système, car par [11.3] $\lambda(\mathcal{C})$ sera une tribu (contenant $\mathcal{C}$) et donc par minimalité de $\sigma(\mathcal{C})$ on aura $\sigma(\mathcal{C}) \subset \lambda(\mathcal{C})$.

Pour montrer que $\lambda(\mathcal{C})$ est un π-système, il faut montrer que $\lambda(\mathcal{C})$ est stable par intersection finie. Pour cela on introduit, pour $A \in \lambda(\mathcal{C})$, la collection

$$\mathcal{G}_A = \{\, B \in \mathcal{P}(\Omega) \mid A \cap B \in \lambda(\mathcal{C}) \,\}\ .$$

On commence par montrer que $\mathcal{G}_A$ est un λ-système en vérifiant les trois propriétés.

— Il est évident que $\Omega \in \mathcal{G}_A$, car $\Omega \cap A = A \in \lambda(\mathcal{C})$.
— Si $B, C \in \mathcal{G}_A$ avec $B \subset C$, on a $(C \setminus B) \cap A = (C \cap A) \setminus (B \cap A) \in \lambda(\mathcal{C})$ car $\lambda(\mathcal{C})$ est un λ-système donc stable par différence propre. Donc $C \setminus B \in \mathcal{G}_A$.
— Si $B_n \in \mathcal{G}_A$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, avec $B_n \subset B_{n+1}$, alors $(\cup_{n\in\mathbf{N}} B_n) \cap A = \cup_{n\in\mathbf{N}}(B_n \cap A)$. Mais $\lambda(\mathcal{C})$ est un λ-système, donc stable par réunion croissante. On a donc $\cup_{n\in\mathbf{N}}(B_n \cap A) \in \lambda(\mathcal{C})$, ce qui montre que $\cup_{n\in\mathbf{N}} B_n \in \mathcal{G}_A$.

Ayant montré que $\mathcal{G}_A$ est un λ-système quand A appartient à $\lambda(\mathcal{C})$, on regarde maintenant le cas particulier d'un A appartenant à $\mathcal{C}$ même. Vu que $\mathcal{C}$ est un π-système, il s'ensuit que $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_A$. Mais $\lambda(\mathcal{C})$ est le plus petit λ-système contenant $\mathcal{C}$, donc $\lambda(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}_A$. On peut résumer ceci dans les implications

$$\Big(\quad A \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad B \in \lambda(\mathcal{C}) \quad \Big) \qquad \Rightarrow \qquad B \in \mathcal{G}_A \qquad \Rightarrow \qquad A \cap B \in \lambda(\mathcal{C}) \ .$$

On peut retourner l'argument en disant que si B appartient à $\lambda(\mathcal{C})$, alors tout $A \in \mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{G}_B$. Autrement dit, pour tout $B \in \lambda(\mathcal{C})$ on a $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_B$. $\mathcal{G}_B$ est un λ-système contenant $\mathcal{C}$ et $\lambda(\mathcal{C})$ est le plus petit λ-système contenant $\mathcal{C}$. On a donc l'inclusion $\lambda(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}_B$. Mais ceci dit qu'on a les implications

$$\Big(\quad B \in \lambda(\mathcal{C}) \quad \text{et} \quad C \in \lambda(\mathcal{C}) \quad \Big) \qquad \Rightarrow \qquad C \in \mathcal{G}_B \qquad \Rightarrow \qquad B \cap C \in \lambda(\mathcal{C}) \ .$$

Mais ceci est la stabilité par intersection finie de la collection $\lambda(\mathcal{C})$. $\boxed{CQFD}$

11.5 Définitions. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ une collection d'ensembles mesurables.

- On dit que la mesure μ est *finie* si $\mu(\Omega) < \infty$.
- On dit que μ est *σ-finie sur $\mathcal{C}$* s'il existe $A_n \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbf{N}$ tels que $\underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} A_n = \Omega$ et $\mu(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- On dit que μ est *σ-finie* si elle est σ-finie sur la tribu totale $\mathcal{F}$.

Remarquons tout de suite que si μ est σ-finie sur $\mathcal{C}$, alors elle est σ-finie (sur $\mathcal{F}$).

11.6 Nota Bene. La condition d'être σ-finie sur une collection $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ n'est pas seulement une condition sur la mesure μ, mais aussi sur la collection $\mathcal{C}$, car a priori il n'est pas donné que $\mathcal{C}$ contienne une suite d'éléments A_n de réunion l'espace total.

→ **11.7 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Alors μ est σ-finie si et seulement si il existe une suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'ensembles mesurables telle que $\underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} A_n = \Omega$ et que $\mu(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbf{N}$*

11.8 Lemme (de Poincaré). *Soit* $\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$*,* $n \geq 2$ *des ensembles mesurables tels que* $\mu(A_i) < \infty$ *pour tout* $1 \leq i \leq n$*. Alors on a la formule*

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \; - \; \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \; .$$

Preuve. Commençons par la remarque qu'on a les égalités entre fonctions

$$\mathbf{1}_{A_1 \cap \cdots \cap A_n} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} = \mathbf{1}_{A_1} \cdot \mathbf{1}_{A_2} \cdots \mathbf{1}_{A_n} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$$

pour tous les sous-ensembles $A, A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$. Il s'ensuit qu'on a l'égalité

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} &= 1 - \mathbf{1}_{A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c} = 1 - \mathbf{1}_{A_1^c} \cdot \mathbf{1}_{A_2^c} \cdots \mathbf{1}_{A_n^c} \\
&= 1 - (1 - \mathbf{1}_{A_1}) \cdot (1 - \mathbf{1}_{A_2}) \cdots (1 - \mathbf{1}_{A_n}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} \; - \; \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1}} \cdot \mathbf{1}_{A_{i_2}} \cdots \mathbf{1}_{A_{i_k}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} \; - \; \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}} \; .
\end{aligned}$$

Vu que $\mu(A_i) < \infty$, on a $\int_\Omega \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap \cdots A_{i_k}} \, \mathrm{d}\mu = \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) < \infty$. Tous les fonctions apparaissant dans le membre de droite sont donc intégrables et on a le droit d'utiliser la linéarité de l'intégrale. En prenant l'intégrale de cette égalité on obtient le résultat annoncé. $\boxed{CQFD}$

11.9 Exemples. Les cas $n = 2$ et $n = 3$ dans le lemme de Poincaré nous donnent les formules $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ et

$$\begin{aligned}
\mu(A \cup B \cup C) = \Big(\; \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) \; \Big) \\
- \Big(\; \mu(A \cap B) + \mu(A \cap C) + \mu(B \cap C) \; \Big) + \mu(A \cap B \cap C) \; .
\end{aligned}$$

11.10 Corollaire. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$*,* $n \geq 2$ *des ensembles mesurables tels que* $\mu(A_i) < \infty$ *pour tout* $1 \leq i \leq n$*. Alors on a l'égalité entre mesures*

$$\widehat{\mu}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\mu}_{A_i} \; - \; \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \widehat{\mu}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}} \; ,$$

où $\widehat{\mu}_B$ est la mesure définie par $\widehat{\mu}_B(A) = \mu(A \cap B)$ [6.6.ii].

Preuve. Prenons $A \in \mathcal{F}$ et posons $B_i = A \cap A_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors on a les égalités

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^n A_i \Big) \qquad \text{et} \qquad B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_k} = A \cap A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \ .$$

Si on applique le lemme de Poincaré [11.8] aux ensembles $B_1, \ldots, B_n$ (autorisé car $\mu(B_i) \leq \mu(A_i) < \infty$) on obtient :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n}(A) &= \mu(B_1 \cup \cdots \cup B_n) \\
&= \sum_{i=1}^n \mu(B_i) \ - \ \sum_{k=2}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mu(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_k}) \\
&= \sum_{i=1}^n \widehat{\mu}_{A_i}(A) \ - \ \sum_{k=2}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \widehat{\mu}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}(A) \ .
\end{aligned}$$

Mais ceci est l'égalité des mesures de l'énoncé. $\boxed{CQFD}$

11.11 Théorème (d'unicité de mesures). *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ un π-système qui engendre $\mathcal{F}$: $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$ et soit μ et ν deux mesures sur $\mathcal{F}$ qui coïncident sur $\mathcal{C}$. Supposons en plus que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite.*

(i) $\mu(\Omega) = \nu(\Omega) < \infty$.

(ii) μ *ou* ν *est σ-finie sur $\mathcal{C}$.*

Alors $\mu = \nu$.

11.12 Nota Bene. Il est crucial dans la condition (ii) que la mesure est σ-finie *sur le π-système $\mathcal{C}$* et pas seulement σ-finie (sur la tribu totale $\mathcal{F}$). L'exemple [19.19] montre clairement ce qui peut se passer.

Preuve. • (i) : On pose $\Lambda = \{ A \in \mathcal{F} \mid \mu(A) = \nu(A) \}$ et la stratégie est de montrer que c'est un λ-système. Vu qu'il contient le π-système $\mathcal{C}$, on peut appliquer [11.4] pour conclure que $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C}) \subset \Lambda \subset \mathcal{F}$, ce qui montre que μ et ν coïncident partout.

Par hypothèse on a $\Omega \in \Lambda$. Si $A, B \in \Lambda$ sont tels que $A \subset B$, alors $B = A \cup (B \setminus A)$ est une réunion disjointe et donc

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \overset{A,B \in \Lambda}{=} \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A) \ .$$

Ce calcul est légitime car $\mu(A) \leq \mu(B) \leq \mu(\Omega) < \infty$ et donc la soustraction est autorisée. On conclut que Λ est stable par différence propre.

Si $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante dans Λ, alors on peut faire le calcul

$$\mu(\cup_{n \in \mathbf{N}} A_n) \overset{[6.9.\text{iii}]}{=} \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) \overset{A_n \in \Lambda}{=} \lim_{n \to \infty} \nu(A_n) \overset{[6.9.\text{iii}]}{=} \nu(\cup_{n \in \mathbf{N}} A_n) \ .$$

Λ est donc aussi stable par réunion dénombrable croissante. C'est donc un λ-système.

• (ii) : Soit $A_n \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbf{N}$ tels que $\mu(A_n) < \infty$ et $\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \Omega$. On va utiliser les A_n et le cas (i) pour montrer que $\mu = \nu$. Pour cela on prend d'abord $B \in \mathcal{C}$ tel que $\mu(B) < \infty$. Alors les applications $\widehat{\mu}_B, \widehat{\nu}_B : \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définies par

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad : \quad \widehat{\mu}_B(A) = \mu(A \cap B) \quad , \quad \widehat{\nu}_B(A) = \nu(A \cap B)$$

sont des mesures [6.6.ii]. Vu que $\mathcal{C}$ est un π-système (stable par intersection finie), $\widehat{\mu}_B$ et $\widehat{\nu}_B$ coïncident sur $\mathcal{C}$. Mais on a aussi $\widehat{\mu}_B(\Omega) = \mu(B) = \nu(B) = \widehat{\mu}_B(\Omega)$, et donc par (i) on a $\widehat{\mu}_B = \widehat{\nu}_B$.

Prenons maintenant $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ des éléments de la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et posons $B = A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$. Alors $B \subset A_{i_1}$ et donc $\mu(B) \leq \mu(A_{i_1}) < \infty$. Mais $\mathcal{C}$ est un π-système, donc B est un élément de $\mathcal{C}$ vérifiant $\mu(B) < \infty$. On a donc l'égalité

$$\widehat{\mu}_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}} = \widehat{\nu}_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}}$$

pour toute suite $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ d'éléments de la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Si on applique maintenant [11.10] on obtient l'égalité

$$\widehat{\mu}_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = \widehat{\nu}_{A_1\cup\cdots\cup A_n} \tag{11.13}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Si on pose $B_n = \cup_{i=1}^n A_i$, $n \in \mathbf{N}^*$, alors c'est une suite croissante de réunion l'espace total : $\cup_{n\in\mathbf{N}^*} B_n = \Omega$. On peut donc faire le calcul :

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} (A \cap B_n)\Big) \overset{[6.9.\text{iii}]}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap B_n) = \lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}_{B_n}(A) \\
&\overset{(11.13)}{=} \lim_{n\to\infty} \widehat{\nu}_{B_n}(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap B_n) \overset{[6.9.\text{iii}]}{=} \nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} (A \cap B_n)\Big) = \nu(A) \ ,
\end{aligned}$$

valable pour tout $A \in \mathcal{F}$. $\boxed{CQFD}$

12. La mesure produit

12.1 Définition. Soit Ω et X deux ensembles et soit $E \subset \Omega \times X$ un sous-ensemble du produit. Pour un élément $\omega \in \Omega$ l'ensemble E_ω défini par

$$E_\omega = \{x \in X \mid (\omega, x) \in E\} \subset X$$

est appelé *la section de E en ω*. De même pour tout $x \in X$ on définit la section E_x de E en x comme

$$E_x = \{\omega \in \Omega \mid (\omega, x) \in E\} \subset \Omega \ .$$

12.2 Lemme. *Prendre une section commute avec les opérations ensemblistes. Plus précisément et en particulier, si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque (pas forcément dénombrable) de sous-ensembles du produit $\Omega \times X$, alors on a pour tout $\omega \in \Omega$ les égalités*

(i) $\big(\bigcup_{i\in I} E_i\big)_\omega = \bigcup_{i\in I} (E_i)_\omega$;

(ii) $\big(\bigcap_{i\in I} E_i\big)_\omega = \bigcap_{i\in I} (E_i)_\omega$;

(iii) $(E_i \setminus E_j)_\omega = \big((E_i)_\omega\big) \setminus \big((E_j)_\omega\big)$.

Les mêmes formules restent valables si on prend des sections par rapport à un élément $x \in X$.

Preuve. C'est un exercice élémentaire en manipulations ensemblistes :

$$\begin{aligned}\big(\bigcup_{i\in I} E_i\big)_\omega &= \{x \in X \mid (\omega, x) \in \bigcup_{i\in I} E_i\} = \{x \in X \mid \exists i \in I : (\omega, x) \in E_i\} \\ &= \{x \in X \mid \exists i \in I : x \in (E_i)_\omega\} = \bigcup_{i\in I} (E_i)_\omega \ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(\bigcap_{i\in I} E_i\big)_\omega &= \{x \in X \mid (\omega, x) \in \bigcap_{i\in I} E_i\} = \{x \in X \mid \forall i \in I : (\omega, x) \in E_i\} \\ &= \{x \in X \mid \forall i \in I : x \in (E_i)_\omega\} = \bigcap_{i\in I} (E_i)_\omega \ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_i \setminus E_j)_\omega &= \{x \in X \mid (\omega, x) \in E_i \setminus E_j\} \\ &= \{x \in X \mid (\omega, x) \in E_i \ \& \ (\omega, x) \notin E_j\} \\ &= \{x \in X \mid x \in (E_i)_\omega \ \& \ x \notin (E_j)_\omega\} = \big((E_i)_\omega\big) \setminus \big((E_j)_\omega\big) \ . \boxed{CQFD}\end{aligned}$$

12.3 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(X, \mathcal{G})$ deux espaces mesurables. Alors les sections d'ensembles mesurables $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ sont mesurables au sens*

$$\forall E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} : \Big(\ \forall \omega \in \Omega : E_\omega \in \mathcal{G} \quad et \quad \forall x \in X : E_x \in \mathcal{F} \ \Big) \ .$$

Preuve. Pour les sections en ω on fixe $\omega \in \Omega$ et on pose

$$\mathcal{H} = \{E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \mid E_\omega \in \mathcal{G}\} \ .$$

L'idée de la preuve est de montrer que $\mathcal{H}$ est une tribu qui contient les pavés dans $\mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}$. Vu que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ est la plus petite tribu qui contient $\mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}$, on aura montré le résultat voulu.

Pour $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{G}$ on calcule

$$\begin{aligned}(F \times G)_\omega &= \{x \in X \mid (\omega, x) \in F \times G\} \\ &= \{x \in X \mid \omega \in F \ \& \ x \in G\} = \begin{cases} \emptyset & \omega \notin F \ , \\ G & \omega \in F \ . \end{cases}\end{aligned}$$

Dans les deux cas $(F \times G)_\omega$ appartient à $\mathcal{G}$, ce qui montre que $F \times G$ appartient à $\mathcal{H}$. Ceci montre donc que $\mathcal{H}$ contient $\mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}$.

Pour montrer que $\mathcal{H}$ est une tribu, on vérifie les propriétés. Il est évident que $\emptyset_\omega = \emptyset$ et donc $\emptyset \in \mathcal{H}$. Si E_n appartient à $\mathcal{H}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors par définition chaque $(E_n)_\omega$ appartient à $\mathcal{G}$ qui est une tribu. Leur réunion appartient donc aussi à $\mathcal{G}$. Mais on peut appliquer [12.2.i] pour obtenir

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (E_n)_\omega = \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n \Big)_\omega \ .$$

Il s'ensuit que $\big(\cup_{n\in\mathbf{N}} E_n\big)_\omega$ appartient à $\mathcal{H}$. On termine avec le complémentaire. Si E appartient à $\mathcal{H}$, alors par hypothèse E_ω appartient à la tribu $\mathcal{G}$, donc $(E_\omega)^c$ lui appartient aussi. Mais par [12.2.iii] on obtient

$$(E^c)_\omega \equiv \big((\Omega \times X) \setminus E\big)_\omega = (\Omega \times X)_\omega \setminus E_\omega = X \setminus E_\omega = (E_\omega)^c \ .$$

Il s'ensuit que E^c appartient à $\mathcal{H}$, ce qui termine la vérification des trois propriétés d'une tribu (pour $\mathcal{H}$). La preuve pour les sections en $x \in X$ est (évidemment) similaire. $\boxed{CQFD}$

→ **12.4 Lemme.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$, $(X, \mathcal{G})$ *et* $(Y, \mathcal{H})$ *trois espaces mesurables et supposons que* $f : \Omega \times X \to Y$ *soit une application mesurable.*

(i) *Pour tout* $\omega \in \Omega$ *l'application* $f_\omega : X \to Y$, $x \mapsto f(\omega, x)$ *est mesurable.*
(ii) *Pour tout* $x \in X$ *l'application* $f^x : \Omega \to Y$, $\omega \mapsto f(\omega, x)$ *est mesurable.*

12.5 Notation. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit f une fonction mesurable sur Ω. Par analogie avec l'intégrale de Riemann on introduit, dans la notation de la valeur de l'intégrale de f sur Ω, une variable muette, dite *variable d'intégration*, et on écrit

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega) = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \ .$$

Comme dans l'intégrale de Riemann, le symbole utilisé pour la variable d'intégration (ci-dessus ω ou x) n'a presque pas d'importance.

L'utilité de la variable d'intégration devient évidente en présence de plusieurs espaces mesurés. Soit par exemple $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(X, \mathcal{G})$ deux espaces mesurables et soit f une fonction sur le produit $\Omega \times X$. Avec une variable d'intégration on peut facilement définir deux nouvelles fonctions F et G sur Ω et X respectivement par

$$F(\omega) = \int_X f(\omega, x)\,\mathrm{d}\nu(x) \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_\Omega f(\omega, x)\,\mathrm{d}\mu(\omega) \ .$$

Dans la fonction F on prend l'intégrale sur l'espace X et on considère la variable dans Ω comme un paramètre, tandis que la situation pour G est le contraire. Sans l'utilisation d'une variable d'intégration on serait obligé d'introduire, pour $\omega \in \Omega$ et $x \in X$, les fonctions f_ω sur X et f^x sur Ω définies par

$$f_\omega(x) = f(\omega, x) \qquad \text{et} \qquad f^x(\omega) = f(\omega, x) \ ,$$

et d'écrire

$$F(\omega) = \int_X f_\omega \,\mathrm{d}\nu \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_\Omega f^x \,\mathrm{d}\mu \ .$$

L'utilisation d'une variable d'intégration évite donc l'introduction de ces nouvelles fonctions "partielles" et rend en même temps les formules plus lisibles (car la mémoire est moins chargée avec des notations superflues comme les fonctions f_ω ou f^x).

12.6 Proposition. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* $(X, \mathcal{G})$ *deux espaces mesurables.*

(i) *Si* ν *est une mesure* σ*-finie sur* X*, alors pour tout* $E \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ *l'application* $h_E : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *définie par*

$$h_E(\omega) = \int_X \mathbf{1}_E(\omega, x)\,\mathrm{d}\nu(x) \tag{12.7}$$

est mesurable.

(ii) *Si* μ *est une mesure* σ*-finie sur* Ω*, alors pour tout* $E \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ *l'application* $h'_E : X \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *définie par*

$$h'_E(x) = \int_\Omega \mathbf{1}_E(\omega, x)\,\mathrm{d}\mu(\omega) \tag{12.8}$$

est mesurable.

Preuve. Il est évident que les preuves de (i) et (ii) sont similaires vu la symétrie des énoncés. On se contente donc de traiter seulement le cas (i). On commence avec un calcul simple : pour $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{G}$ on a

$$\begin{aligned} h_{F\times G}(\omega) &= \int_X \mathbf{1}_{F\times G}(\omega, x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_X \mathbf{1}_F(\omega)\cdot \mathbf{1}_G(x)\,\mathrm{d}\nu(x) \\ &\overset{[8.13]}{=} \mathbf{1}_F(\omega) \cdot \int_X \mathbf{1}_G(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \mathbf{1}_F(\omega) \cdot \nu(G) \ , \end{aligned}$$

c'est-à-dire $h_{F\times G} = \mathbf{1}_G \cdot \nu(G)$, ce qui est une application mesurable. (Nota Bene : ceci n'est une fonction étagée que si $\nu(G) < \infty$.) On a donc montré que h_E est mesurable dans le cas où $E = F \times G$ est un pavé. Pour montrer que toutes les h_E sont mesurables on introduit l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \mid \ h_E \text{ est mesurable}\} \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \ ,$$

et le but sera de montrer l'égalité $\mathcal{H} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. On vient de montrer que $\mathcal{H}$ contient le π-système $\mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}$, donc, selon le théorème de Dynkin [11.4], il suffit de montrer que $\mathcal{H}$ est un λ-système pour conclure qu'on a l'inclusion

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \equiv \sigma(\mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}) \overset{[11.4]}{\subset} \mathcal{H} \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \ ,$$

ce qui montre l'égalité voulue.

Pour montrer que $\mathcal{H}$ est un λ-système, on réécrit d'abord la définition de h_E. Pour $\omega \in \Omega$ fixe, on a les équivalences

$$\mathbf{1}_E(\omega,x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\omega,x) \in E \quad \Leftrightarrow \quad x \in E_\omega \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{1}_{E_\omega}(x) = 1 \ .$$

On peut donc faire le calcul

$$h_E(\omega) = \int_X \mathbf{1}_E(\omega,x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_X \mathbf{1}_{E_\omega}(x)\,\mathrm{d}\nu(x) \overset{[7.8.\mathrm{i}],\,[7.3.\mathrm{i}]}{=} \nu(E_\omega) \ .$$

Avec ce résultat on vérifie les trois propriétés d'un λ-système.

• L'espace total $\Omega \times X$ appartient à $\mathcal{H}$ car il appartient à $\mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}$.

• Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{H}$, on peut utiliser la continuité pour des suites croissantes d'une mesure [6.9.iii] pour faire le calcul

$$h_{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n}(\omega) = \nu\big(\big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\big)_\omega\big) = \nu\big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (A_n)_\omega\big) = \lim_{n\to\infty} \nu((A_n)_\omega) = \lim_{n\to\infty} h_{A_n}(\omega) \ ,$$

où pour la troisième égalité on a utilisé le fait que la suite $(A_n)_\omega$ est croissante (car $A \subset B \Rightarrow A_\omega \subset B_\omega$). Ce calcul se résume comme

$$h_{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n} = \lim_{n\to\infty} h_{A_n} \ .$$

Par hypothèse les h_{A_n} sont mesurables, donc leur limite est aussi mesurable [3.16]. Ainsi on a montré que $\mathcal{H}$ est stable par réunion dénombrable croissante.

• Soit finalement $A, B \in \mathcal{H}$ tels que $A \subset B$. Alors on a la réunion disjointe $B = A \cup (B \setminus A)$ et on peut faire le calcul

$$\begin{aligned} h_B(\omega) &= \nu(B_\omega) = \nu(A_\omega \cup (B\setminus A)_\omega) = \nu(A_\omega) + \nu((B\setminus A)_\omega) \\ &= h_A(\omega) + h_{B\setminus A}(\omega) \ , \end{aligned}$$

ce qu'on peut résumer comme $h_B = h_A + h_{B\setminus A}$. De là on voudrait conclure qu'on a $h_{B\setminus A} = h_B - h_A$ et donc que $h_{B\setminus A}$ est mesurable comme différence de deux applications mesurables. Malheureusement une telle conclusion n'est pas justifiée en général car h_A et h_B peuvent prendre la valeur ∞ et $\infty - \infty$ n'est pas défini. C'est ici qu'on va utiliser le fait que ν est σ-finie. On note d'abord que **si** ν est une mesure **finie**, alors la conclusion est justifiée, parce que dans ce cas on a les inégalités $\nu(A) \le \nu(B) \le \nu(X) < \infty$ [6.9.ii], ce qui montre que la différence est bien définie. Autrement dit, si ν est une mesure finie, alors $\mathcal{H}$ est un λ-système et on peut conclure avec [11.4] que h_E est mesurable pour tout $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.

Si ν est σ-finie, alors il existe ([11.7]) une suite croissante $C_n \in \mathcal{G}$, $n \in \mathbf{N}$ telle que $\cup_{n\in\mathbf{N}} C_n = X$ et $\nu(C_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On introduit maintenant les applications $\nu_n \equiv \widehat{\nu}_{C_n} : \mathcal{G} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ comme

$$\nu_n(G) = \nu(G \cap C_n) \ .$$

Selon [6.6.ii] ce sont des mesures qui sont en plus finies : $\nu_n(X) = \nu(C_n) < \infty$. Le raisonnement précédent montre donc que les applications

$$h^n_E : \omega \mapsto \nu_n(E_\omega) = \int_X \mathbf{1}_E(\omega,x)\,\mathrm{d}\nu_n(x)$$

sont mesurables pour tous les $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Et maintenant :

$$h_E(\omega) = \nu(E_\omega) = \nu\big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (E_\omega \cap C_n)\big) \overset{[6.9.\mathrm{iii}]}{=} \lim_{n\to\infty} \nu(E_\omega \cap C_n) = \lim_{n\to\infty} h^n_E(\omega) \ ,$$

ce qui dit que h_E est la limite de la suite h^n_E. Mais ces derniers sont mesurables, donc h_E est elle aussi mesurable. $\boxed{CQFD}$

12.9 Remarque pour les curieux concernant la preuve de [12.6]. Au lieu de réécrire la définition de h_E, on aurait pu procéder, dans la vérification des propriétés d'un λ-système, directement avec la formule (12.6) comme suit. Si A_n est une suite croissante d'ensembles mesurables, alors $\mathbf{1}_{A_n}$ est une suite croissante de fonctions positives mesurables [3.3]. De nouveau par la croissance de la suite A_n on a en plus $\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n}$. Selon [12.4] les applications $x \mapsto \mathbf{1}_{A_n}(\omega, x)$ sont mesurables. On peut donc appliquer le théorème de Beppo-Levi et faire le calcul

$$\begin{aligned} h_{\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n}(\omega) &= \int_X \mathbf{1}_{\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n}(\omega, x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_X \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(\omega, x)\,\mathrm{d}\nu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X \mathbf{1}_{A_n}(\omega, x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \lim_{n\to\infty} h_{A_n}(\omega)\ . \end{aligned}$$

Pour $h_{B\setminus A}$ on peut faire un calcul analogue, mais le problème ne disparaît pas pour autant. On a bien $\mathbf{1}_{B\setminus A} = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A$, mais si ces fonctions ne sont pas intégrables (n'ont pas une intégrale finie), on ne peut pas appliquer la linéarité de l'intégrale et dire que l'intégrale d'une différence est la différence des intégrales.

→ **12.10 Exercice.** Montrer que dans la preuve de [12.6] on peut aussi écrire

$$\nu_n(E_\omega) = \int_X \mathbf{1}_E(\omega, x) \cdot \mathbf{1}_{C_n}(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_{C_n} \mathbf{1}_E(\omega, x)\,\mathrm{d}\nu(x)\ .$$

12.11 Proposition. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $(X, \mathcal{G}, \nu)$ deux espaces mesurés.*

(i) *Si ν est σ-finie, alors l'application $\xi : \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définie par*

$$\xi(E) = \int_\Omega \Big(\int_X \mathbf{1}_E(\omega, x)\ \mathrm{d}\nu(x) \Big)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$$

est une mesure vérifiant $\xi(F \times G) = \mu(F) \cdot \nu(G)$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$.

(ii) *Si μ est σ-finie, alors l'application $\rho : \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définie par*

$$\rho(E) = \int_X \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_E(\omega, x)\ \mathrm{d}\mu(\omega) \Big)\,\mathrm{d}\nu(x)$$

est une mesure vérifiant $\rho(F \times G) = \mu(F) \cdot \nu(G)$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$.

Preuve. Comme dans la preuve de [12.6] les preuves de (i) et (ii) sont similaires ; traitons ici le cas (ii). Pour $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{G}$ on a (voir la preuve de [12.6]) :

$$\begin{aligned} \rho(F \times G) &= \int_X \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_{F\times G}(\omega, x)\ \mathrm{d}\mu(\omega) \Big)\,\mathrm{d}\nu(x) \\ &= \int_X \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_F(\omega) \cdot \mathbf{1}_G(x)\ \mathrm{d}\mu(\omega) \Big)\,\mathrm{d}\nu(x) \\ &= \int_X \mathbf{1}_G(x) \cdot \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_F(\omega)\ \mathrm{d}\mu(\omega) \Big)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_X \mathbf{1}_G(x) \cdot \mu(F)\,\mathrm{d}\nu(x) \\ &= \mu(F) \cdot \int_X \mathbf{1}_G(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \mu(F) \cdot \nu(G)\ , \end{aligned}$$

ce qui montre la dernière assertion.

Pour montrer que ρ définisse une mesure, il faut vérifier deux choses : $\rho(\emptyset) = 0$ et la σ-additivité. On commence avec le premier :

$$\rho(\emptyset) = \rho(\emptyset \times \emptyset) = \mu(\emptyset) \centerdot \nu(\emptyset) = 0 \ .$$

Pour la σ-additivité on suppose que les $E_n \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, $n \in \mathbf{N}$ sont deux à deux disjoints et on calcule :

$$\rho\big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n\big) = \int_X \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n}(\omega, x) \ \mathrm{d}\mu(\omega) \Big) \,\mathrm{d}\nu(x)$$

si les E_n sont deux à deux disjoints, alors $\mathbf{1}_{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n} = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{E_n}$ et donc

$$= \int_X \Big(\int_\Omega \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{E_n}(\omega, x) \ \mathrm{d}\mu(\omega) \Big) \,\mathrm{d}\nu(x)$$

selon [12.4] les applications $\omega \mapsto \mathbf{1}_{E_n}(\omega, x)$ sont mesurables, donc par [8.9]

$$= \int_X \Big(\sum_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega \mathbf{1}_{E_n}(\omega, x) \ \mathrm{d}\mu(\omega) \Big) \,\mathrm{d}\nu(x)$$

selon [12.6] l'application $x \mapsto \int_\Omega \mathbf{1}_{E_n}(\omega, x)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$ est mesurable, donc de nouveau par [8.9]

$$= \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_X \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_{E_n}(\omega, x) \ \mathrm{d}\mu(\omega) \Big) \,\mathrm{d}\nu(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \rho(E_n) \ .$$

Ainsi ρ vérifie les conditions d'une mesure. $\boxed{CQFD}$

12.12 Corollaire. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $(X, \mathcal{G}, \nu)$ deux espaces mesurés tels que μ et ν sont σ-finies. Alors il existe une unique mesure, notée $\mu \otimes \nu$, sur $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ telle que*

$$(\mu \otimes \nu)(F \times G) = \mu(F) \centerdot \nu(G) \ .$$

Cette mesure est, elle aussi, σ-finie et peut être définie au choix par

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_\Omega \Big(\int_X \mathbf{1}_E(\omega, x) \ \mathrm{d}\nu(x) \Big) \,\mathrm{d}\mu(\omega)$$

$$\textit{ou} \qquad (\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_E(\omega, x) \ \mathrm{d}\mu(\omega) \Big) \,\mathrm{d}\nu(x)$$

pour $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.

Preuve. Dans [12.11] on a montré que les deux formules définissent une mesure sur $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ qui vérifie la condition donnée. Par conséquent des telles mesures existent. Pour montrer l'unicité on utilise le fait que μ et ν sont σ-finies, ce qui implique qu'il existe deux suites croissantes $A_n \in \mathcal{F}$ et $B_n \in \mathcal{G}$ telles que $\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \Omega$, $\cup_{n\in\mathbf{N}} B_n = X$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\mu(A_n) < \infty$ et $\nu(B_n) < \infty$ [11.7]. La suite $C_n = A_n \times B_n \in \mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}$ est croissante et pour montrer qu'on a $\cup_{n\in\mathbf{N}} C_n = \Omega \times X$ on raisonne comme suit. Pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$ il existe $M \in \mathbf{N}$ tel que $\omega \in A_M$ et

$N \in \mathbf{N}$ tel que $x \in B_N$. La croissance des suites montre alors que (ω, x) appartient à C_k pour tout $k \geq \max(M, N)$.

Si ξ et ρ sont deux mesures qui vérifient la condition

$$\xi(F \times G) = \rho(F \times G) = \mu(F) \centerdot \nu(G)$$

pour tout $F \times G \in \mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}$, alors ξ et ρ sont σ-finies sur le π-système $\mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}$ car

$$\xi(C_n) = \rho(C_n) = \mu(A_n) \centerdot \nu(B_n) < \infty \ .$$

Les mesures ξ et ρ coïncident donc sur le π-système $\mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}$ qui engendre $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ et elles sont σ-finies sur ce même π-système. Par le théorème d'unicité [11.11] on peut conclure que $\xi = \rho$. $\boxed{CQFD}$

13. Le théorème de Fubini

13.1 Théorème (Fubini-Tonelli). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $(X, \mathcal{G}, \nu)$ deux espaces mesurés tels que μ et ν soient σ-finies. Soit $f : \Omega \times X \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable pour la tribu produit $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ sur $\Omega \times X$ (et la tribu de Borel sur $\overline{\mathbf{R}}_+$ bien sûr). Alors les deux applications $F : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ et $G : X \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définies par*

$$F(\omega) = \int_X f(\omega, x)\,\mathrm{d}\nu(x) \qquad \textit{et} \qquad G(x) = \int_\Omega f(\omega, x)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$$

sont mesurables et on a les égalités

$$\begin{aligned}\int_{\Omega \times X} f\,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) &= \int_\Omega \Big(\int_X f(\omega, x)\ \mathrm{d}\nu(x) \Big)\,\mathrm{d}\mu(\omega) \equiv \int_\Omega F\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_X \Big(\int_\Omega f(\omega, x)\ \mathrm{d}\mu(\omega) \Big)\,\mathrm{d}\nu(x) \equiv \int_X G\,\mathrm{d}\nu \ .\end{aligned}$$

Preuve. Comme pour [12.6] et [12.11] la symétrie de l'énoncé fait que les preuves pour F et pour G (aussi bien pour la mesurabilité que pour l'intégrale) sont similaires. On ne traite ici que le cas de F. Le schéma de la preuve est : (i) f une fonction indicatrice, (ii) f une fonction étagée positive, (iii) f une fonction mesurable positive.

• (i) : Si f est une fonction indicatrice $f = \mathbf{1}_E$, $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, alors on a montré dans [12.6] que l'application F est mesurable et dans [12.11] ou [12.12] on a montré qu'on a dans ce cas l'égalité

$$\int_{\Omega \times X} \mathbf{1}_E\,\mathrm{d}\mu \otimes \nu = (\mu \otimes \nu)(E) = \int_\Omega F\,\mathrm{d}\mu \ .$$

On a donc montré le théorème dans le cas (i).

• (ii) : Si f est une fonction étagée positive, alors il existe $c_i \in [0,\infty[$ et $A_i \in \mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$, $1 \le i \le n$ tels que $f = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$ [5.3]. Selon [12.4] les applications $x \mapsto \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}(\omega, x)$ sont mesurables, donc on peut appliquer [8.13] et [8.8] pour obtenir

$$F(\omega) = \int_X \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}(\omega,x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \sum_{i=1}^n c_i \centerdot \int_X \mathbf{1}_{A_i}(\omega,x)\,\mathrm{d}\nu(x)\ .$$

Par le cas (i) ceci est une combinaison linéaire de fonctions mesurables positives, donc par [4.11] c'est une fonction mesurable. Pour l'intégrale on peut donc (de nouveau) appliquer [8.13] et [8.8] et calculer :

$$\begin{aligned}\int_\Omega F\,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n c_i \centerdot \int_X \mathbf{1}_{A_i}(\omega,x)\ \mathrm{d}\nu(x) \Big)\,\mathrm{d}\mu(\omega)\\ &= \sum_{i=1}^n c_i \centerdot \int_\Omega \Big(\int_X \mathbf{1}_{A_i}(\omega,x)\ \mathrm{d}\nu(x) \Big)\,\mathrm{d}\mu(\omega)\\ &\overset{\text{par le cas (i)}}{=} \sum_{i=1}^n c_i \centerdot \int_{\Omega\times X} \mathbf{1}_{A_i}\,\mathrm{d}\mu\otimes\nu \overset{[8.13],\,[8.8]}{=} \int_{\Omega\times X} f\,\mathrm{d}\mu\otimes\nu\ .\end{aligned}$$

Le théorème est donc aussi montré dans le cas (ii).

• (iii) : Si f est une fonction mesurable positive quelconque, alors par [8.7] il existe une suite croissante de fonctions étagées positives h_n telle que $f = \lim_{n\to\infty} h_n$. Selon [12.4] les applications $x \mapsto h_n(\omega,x)$ sont mesurables (et forment évidemment une suite croissante de fonctions étagées positives). On peut donc appliquer le théorème de Beppo-Levi [8.1] :

$$F(\omega) = \int_X \lim_{n\to\infty} h_n(\omega,x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_X h_n(\omega,x)\,\mathrm{d}\nu(x)\ .$$

Par le cas (ii) ceci est la limite d'une suite de fonctions mesurables et donc par [3.16] F est mesurable. Pour l'intégrale on peut donc (de nouveau) appliquer [8.1] :

$$\begin{aligned}\int_\Omega F\,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \Big(\lim_{n\to\infty} \int_X h_n(\omega,x)\ \mathrm{d}\nu(x) \Big)\,\mathrm{d}\mu(\omega)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Big(\int_X h_n(\omega,x)\ \mathrm{d}\nu(x) \Big)\,\mathrm{d}\mu(\omega)\\ &\overset{\text{par le cas (ii)}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\times X} h_n\,\mathrm{d}\mu\otimes\nu \overset{[8.1]}{=} \int_{\Omega\times X} f\,\mathrm{d}\mu\otimes\nu\ .\end{aligned}$$

Ainsi on a montré le théorème dans le cas général. $\boxed{CQFD}$

13.2 Théorème (Fubini). *Soit* $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ *et* $(X,\mathcal{G},\nu)$ *deux espaces mesurés tels que* μ *et* ν *soient* σ*-finies. Soit* $f : \Omega\times X \to \mathbf{K}$ *avec* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\overline{\mathbf{R}}$ *ou* $\mathbf{C}$ *une fonction mesurable pour la tribu produit* $\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$ *sur* $\Omega\times X$.

(i) *La fonction* f *est* $\mu\otimes\nu$*-intégrable si et seulement si l'une des deux intégrales répétées*

$$\int_\Omega \Big(\int_X |f(\omega,x)|\ \mathrm{d}\nu(x)\Big)\mathrm{d}\mu(\omega) \qquad \textit{ou} \qquad \int_X \Big(\int_\Omega |f(\omega,x)|\ \mathrm{d}\mu(\omega)\Big)\mathrm{d}\nu(x)$$

(et donc par [13.1] les deux) est finie.

(ii) *Si f est $\mu\otimes\nu$-intégrable, alors la fonction $f_\omega : X \to \mathbf{K}$ définie par $f_\omega(x) = f(\omega,x)$ est ν-intégrable pour μ-presque tout ω. C'est-à-dire qu'il existe un ensemble mesurable $A \subset \Omega$ tel que $\mu(A^c) = 0$ et tel que*

$$A = \{\omega \in \Omega \mid f_\omega \text{ est } \nu\text{-intégrable sur } X\} \ .$$

De plus, la fonction $F : \Omega \to \mathbf{K}$ définie par

$$F(\omega) = \int_X f(\omega,x)\,\mathrm{d}\nu(x) \quad \text{si } \omega \in A, \qquad F(\omega) = 0 \quad \text{si } \omega \in A^c$$

est μ-intégrable.

(ii)^{bis} *Si f est $\mu\otimes\nu$-intégrable, alors la fonction $f^x : \Omega \to \mathbf{K}$ définie par $f^x(\omega) = f(\omega,x)$ est μ-intégrable pour ν-presque tout x. C'est-à-dire qu'il existe un ensemble mesurable $B \subset X$ tel que $\mu(B^c) = 0$ et tel que*

$$B = \{x \in X \mid f^x \text{ est } \mu\text{-intégrable sur } \Omega\} \ .$$

De plus, la fonction $G : X \to \mathbf{K}$ définie par

$$G(x) = \int_\Omega f(\omega,x)\,\mathrm{d}\mu(\omega) \quad \text{si } x \in B, \qquad G(x) = 0 \quad \text{si } x \in B^c$$

est ν-intégrable.

(iii) *Si f est $\mu\otimes\nu$-intégrable, alors on a les égalités*

$$\int_{\Omega\times X} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_\Omega F\,\mathrm{d}\mu = \int_X G\,\mathrm{d}\nu \ .$$

Preuve. • (i) : Si $f : \Omega\times X \to \mathbf{K}$ est mesurable, alors $|f| : \Omega\times X \to \overline{\mathbf{R}}_+$ est une fonction mesurable positive [3.10]. Par [13.1] on a donc les égalités

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times X} |f|\,\mathrm{d}\mu\otimes\nu &= \int_\Omega \Big(\int_X |f(\omega,x)|\,\mathrm{d}\nu(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu(\omega)\\ &= \int_X \Big(\int_\Omega |f(\omega,x)|\,\mathrm{d}\mu(\omega)\Big)\,\mathrm{d}\nu(x) \ .\end{aligned}$$

La fonction f est $\mu\otimes\nu$-intégrable si le premier de ces trois termes est fini, ce qui est donc, à cause des égalités, le cas si le deuxième ou troisième est fini, ce qui montre (i).

• (ii) + $\frac{1}{2}$(iii) : Si f est $\mu\otimes\nu$-intégrable, alors, comme on vient de voir,

$$\int_\Omega \Big(\int_X |f(\omega,x)|\,\mathrm{d}\nu(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu(\omega) < \infty \ .$$

Avec [8.12] et le fait que l'application $\omega \mapsto \int_X |f(\omega,x)|\,\mathrm{d}\nu(x)$ est mesurable [13.1], on en déduit que l'ensemble A défini comme

$$A = \{\omega\in\Omega \mid \int_X |f(\omega,x)|\,\mathrm{d}\nu(x) < \infty\} \tag{13.3}$$

est mesurable et vérifie $\mu(A^c) = 0$. Mais avec la définition des fonctions f_ω on peut réécrire cela comme

$$A = \{\omega \in \Omega \mid f_\omega \text{ est } \nu\text{-intégrable sur } X\} \ .$$

On a donc montré que f_ω est ν-intégrable pour μ-presque tout ω.

Maintenant on distingue les cas $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ (ce qui inclut le cas $\mathbf{K} = \mathbf{R}$) et $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et dans un premier temps on ne considère que le cas $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$. On sépare f en ses parties positive et négative $f = f^+ - f^-$ et on définit les fonctions $\Phi^\pm : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ par

$$\Phi^\pm(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_X f^\pm(\omega, x)\, \mathrm{d}\nu(x) \stackrel{f^\pm \le |f|}{\le} \int_X |f(\omega, x)|\, \mathrm{d}\nu(x) \ .$$

Il s'ensuit que $\Phi^\pm(\omega)$ est finie pour $\omega \in A$. Par définition de l'intégrale d'une fonction intégrable, on peut donc écrire la définition de F comme :

$$F(\omega) = \Phi^+(\omega) - \Phi^-(\omega) \quad \text{si } \omega \in A, \qquad F(\omega) = 0 \quad \text{si } \omega \in A^c.$$

Les fonctions $f^\pm$ sont mesurables positives, donc par [13.1] les fonctions $\Phi^\pm$ sont mesurables positives. Il s'ensuit que F est la différence de deux fonctions mesurables (positives) finies sur A, c'est-à-dire que F est mesurable sur A. Avec [3.7] il s'ensuit que F est mesurable sur Ω. On peut raccourcir la formule pour F en utilisant le produit tordu :

$$F(\omega) = \Phi^+(\omega) \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} \mathbf{1}_A(\omega) - \Phi^-(\omega) \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} \mathbf{1}_A(\omega) \ . \tag{13.4}$$

Par définition de A, chaque terme $\Phi^\pm \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} \mathbf{1}_A$ est une fonction mesurable positive *finie* sur Ω et on en déduit de nouveau que F est mesurable sur Ω. Mais attention : le produit tordu n'est pas (en général) distributif, donc on ne peut pas (en général) mettre la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ en facteur.

Pour l'intégrabilité de F on remarque qu'on a l'inégalité pour tout $\omega \in \Omega$:

$$|F(\omega)| \le \Phi^+(\omega) + \Phi^-(\omega)$$

Après on note que (toujours par [13.1]) on a l'égalité

$$\int_\Omega \Phi^\pm\, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega \times X} f^\pm\, \mathrm{d}\mu \otimes \nu \ , \tag{13.5}$$

et donc qu'on a

$$\int_\Omega |F|\, \mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \Phi^+\, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega \Phi^-\, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega \times X} |f|\, \mathrm{d}\mu \otimes \nu < \infty \ ,$$

ce qui montre que F est μ-intégrable.

Finalement on note que (13.4) donne la décomposition de F en ses parties positive et négative, et donc qu'on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega F\, \mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \Phi^+ \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} \mathbf{1}_A\, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega \Phi^- \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} \mathbf{1}_A\, \mathrm{d}\mu \stackrel{[8.10]}{=} \int_\Omega \Phi^+\, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega \Phi^-\, \mathrm{d}\mu \\ &\stackrel{(13.5)}{=} \int_{\Omega \times X} f\, \mathrm{d}\mu \otimes \nu \ , \end{aligned}$$

ce qui montre l'égalité entre l'intégrale double et l'une de deux intégrales répétées.

Pour traiter le cas $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ on peut procéder de deux façons. On peut remarquer que l'argument donné ci-dessus pour le cas $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ s'applique sans modifications majeures aux parties réelles et imaginaires de f, ce qui montrera le cas des fonctions complexes. Ou bien on peut remarquer qu'on a les inégalités

$$|\mathrm{Re}f| \leq |f| \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{Im}f| \leq |f| \ .$$

Il s'ensuit que si f est $\mu\otimes\nu$-intégrable, alors $\mathrm{Re}f$ et $\mathrm{Im}f$ le sont aussi. On peut donc appliquer le résultat du cas $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ aux fonctions $\mathrm{Re}f$ et $\mathrm{Im}f$ et dire que l'intégrale d'une fonction complexe se calcule en séparant les parties réelle et imaginaire.

• $(\mathrm{ii})^{bis} + \frac{1}{2}(\mathrm{iii})$: La preuve de $(\mathrm{ii})^{bis}$ et la preuve de l'égalité entre l'intégrale double et l'autre intégrale répétée est similaire à la preuve précédente par symétrie des énoncés. $\boxed{CQFD}$

13.6 Abus de notation très utile. L'intégrale $\int_X f(\omega, x)\,\mathrm{d}\nu(x)$ n'est pas toujours définie, ce qui nous oblige à introduire la fonction F. Mais l'usage veut qu'on prétende (si f est $\mu\otimes\nu$-intégrable) que cette intégrale existe partout, que cela définisse une fonction μ-intégrable et qu'on ait l'égalité

$$\int_{\Omega\times X} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_\Omega \Big(\int_X f(\omega, x)\ \mathrm{d}\nu(x)\Big)\mathrm{d}\mu(\omega)\ .$$

Pour l'intégrale répétée dans l'autre sens la situation est similaire. La situation est donc (légèrement) différente du cas des fonctions positives, où l'intégrale sur l'une des deux facteurs est toujours définie et mesurable. Là, l'égalité entre l'intégrale double et les intégrales répétées est "parfaite". Pour une fonction mesurable quelconque on suivra l'usage et on se passe de la fonction F, malgré le fait que ce qu'on écrit n'a pas forcément de sens. Avec cet abus de notation on énonce le théorème de Fubini souvent sous une forme un peu abrégé comme suit.

13.7 Théorème (Fubini - version simplifiée pour usage courant). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *et* $(X, \mathcal{G}, \nu)$ *deux espaces mesurés tels que* μ *et* ν *sont* σ*-finies. Soit* $f : \Omega\times X \to \mathbf{K}$ *avec* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\overline{\mathbf{R}}$ *ou* $\mathbf{C}$ *une fonction mesurable.*

Alors f *est* $\mu\otimes\nu$*-intégrable si et seulement si l'une des deux intégrales répétées*

$$\int_\Omega \Big(\int_X |f(\omega, x)|\ \mathrm{d}\nu(x)\Big)\mathrm{d}\mu(\omega) \qquad \textit{ou} \qquad \int_X \Big(\int_\Omega |f(\omega, x)|\ \mathrm{d}\mu(\omega)\Big)\mathrm{d}\nu(x)$$

est finie. Si c'est le cas on a les égalités

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times X} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \int_\Omega \Big(\int_X f(\omega, x)\ \mathrm{d}\nu(x)\Big)\mathrm{d}\mu(\omega)\\ &= \int_X \Big(\int_\Omega f(\omega, x)\ \mathrm{d}\mu(\omega)\Big)\mathrm{d}\nu(x)\ .\end{aligned}$$

14. Intégrales multiples

14.1 Discussion. Le théorème de Fubini est un théorème qui dit comment on peut calculer l'intégrale sur un espace produit par l'intermédiaire d'intégrales répétées. Mais on peut l'interpréter d'une toute autre façon sans faire allusion à l'intégrale sur le produit. Si on fait abstraction des précautions données dans [13.2.ii], on peut formuler le théorème de Fubini comme suit sans parler de la mesure produit.

> *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $(X, \mathcal{G}, \nu)$ deux espaces mesurés et soit $f : \Omega \times X \to \mathbf{C}$ une application mesurable par rapport à la tribu produit. Si l'une des deux intégrales répétées*
>
> $$\int_\Omega \Bigl(\int_X |f(\omega, x)| \ \mathrm{d}\nu(x) \Bigr) \mathrm{d}\mu(\omega) \qquad \textit{ou} \qquad \int_X \Bigl(\int_\Omega |f(\omega, x)| \ \mathrm{d}\mu(\omega) \Bigr) \mathrm{d}\nu(x)$$
>
> *est finie, alors on a l'égalité sans les valeurs absolues*
>
> $$\int_\Omega \Bigl(\int_X f(\omega, x) \ \mathrm{d}\nu(x) \Bigr) \mathrm{d}\mu(\omega) = \int_X \Bigl(\int_\Omega f(\omega, x) \ \mathrm{d}\mu(\omega) \Bigr) \mathrm{d}\nu(x) \ .$$

Formulé ainsi, le théorème de Fubini donne une condition suffisante pour qu'on puisse intervertir deux intégrales répétées. Et si on avait un triple produit ? Imaginons qu'on a trois espaces mesurés $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $(X, \mathcal{G}, \nu)$ et $(Y, \mathcal{H}, \pi)$ et qu'on a une fonction mesurable $f : \Omega \times X \times Y \to \mathbf{C}$. A-t-on, par exemple, l'égalité

$$\begin{aligned} (14.2) \quad & \int_\Omega \Bigl(\int_X \Bigl(\int_Y f(\omega, x, y) \ \mathrm{d}\pi(y) \Bigr) \mathrm{d}\nu(x) \Bigr) \mathrm{d}\mu(\omega) \\ & \qquad = \int_Y \Bigl(\int_X \Bigl(\int_\Omega f(\omega, x, y) \ \mathrm{d}\mu(\omega) \Bigr) \mathrm{d}\nu(x) \Bigr) \mathrm{d}\pi(y) \ ? \end{aligned}$$

On peut tenter de le déduire du théorème de Fubini (en oubliant les détails de mesurabilité et définie presque partout), qui nécessite quand même le passage par l'intégrale sur un produit. Voici un calcul suggestif.

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \Bigl(\int_X \Bigl(\int_Y f(\omega, x, y) \ \mathrm{d}\pi(y) \Bigr) \mathrm{d}\nu(x) \Bigr) \mathrm{d}\mu(\omega) \\ \text{Fubini avec } \nu \text{ et } \pi : \quad & = \int_\Omega \Bigl(\int_{X \times Y} f(\omega, x, y) \ \mathrm{d}(\nu \otimes \pi)(x, y) \Bigr) \mathrm{d}\mu(\omega) \\ \text{Fubini avec } \mu \text{ et } \nu \otimes \pi : \quad & = \int_{\Omega \times (X \times Y)} f(\omega, x, y) \, \mathrm{d}(\mu \otimes (\nu \otimes \pi))(\omega, (x, y)) \\ ? \quad & = \int_{(\Omega \times X) \times Y} f(\omega, x, y) \, \mathrm{d}((\mu \otimes \nu) \otimes \pi)((\omega, x), y) \\ \text{Fubini avec } \mu \otimes \nu \text{ et } \pi : \quad & = \int_Y \Bigl(\int_{\Omega \times X} f(\omega, x, y) \ \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(\omega, x) \Bigr) \mathrm{d}\pi(y) \\ \text{Fubini avec } \mu \text{ et } \nu : \quad & = \int_Y \Bigl(\int_X \Bigl(\int_\Omega f(\omega, x, y) \ \mathrm{d}\mu(\omega) \Bigr) \mathrm{d}\nu(x) \Bigr) \mathrm{d}\pi(y) \ . \end{aligned}$$

Pour obtenir la quatrième ligne on n'a pas appliqué le théorème de Fubini, mais on a simplement déplacé des parenthèses. La grande question est : a-t-on le droit ? Regardons d'abord l'espace sur lequel on calcule l'intégrale. Avant on a $\Omega\times(X\times Y)$ et après on a $(\Omega\times X)\times Y$. Et officiellement ces deux espaces ne sont pas les mêmes ! Pour tous les deux les éléments sont des couples : pour le premier c'est un couple dont la première composante est un élément de Ω et dont la deuxième composante est un couple appartenant au produit $X \times Y$ et pour le deuxième c'est un couple dont la première composante est un couple appartenant au produit $\Omega \times X$ et la deuxième composante un élément de Y. Néanmoins, tout le monde s'accorde sur le fait que ces deux espaces sont les mêmes et que ses éléments sont des triplets (ω, x, y). Signalons quand même que les égalités

$$\Omega \times (X \times Y) = (\Omega \times X) \times Y = \Omega \times X \times Y$$

reposent sur le fait qu'on *identifie* $(\omega,(x,y))$ avec $((\omega,x),y)$ et (ω,x,y).

Acceptons cela et passons à l'autre endroit où on a déplacé les parenthèses : de $\mu\otimes(\nu\otimes\pi)$ vers $(\mu\otimes\nu)\otimes\pi$. Et là, les choses deviennent plus sérieuses. Pour obtenir la mesure $\mu\otimes(\nu\otimes\pi)$ sur l'espace $\Omega\times X\times Y$ on commence avec la construction de la mesure $\nu\otimes\pi$, définie sur la tribu produit $\mathcal{G}\otimes\mathcal{H}$. Et après on construit la mesure $\mu\otimes(\nu\otimes\pi)$ qui est définie sur la tribu produit $\mathcal{F}\otimes(\mathcal{G}\otimes\mathcal{H})$. De la même manière on obtient la mesure $(\mu\otimes\nu)\otimes\pi$ comme une mesure définie sur la tribu $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{G})\otimes\mathcal{H}$. Il y a donc deux questions qui s'imposent : les tribus $\mathcal{F}\otimes(\mathcal{G}\otimes\mathcal{H})$ et $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{G})\otimes\mathcal{H}$ sont elles les mêmes, et si oui, les deux mesures $\mu\otimes(\nu\otimes\pi)$ et $(\mu\otimes\nu)\otimes\pi$ coïncident-elles sur cette tribu ?

14.3 Proposition. *Soit* $(\Omega_i,\mathcal{F}_i,\mu_i)$, $i=1,\dots,n$ *des espaces mesurés.*

(i) *La tribu* $\sigma(\mathcal{F}_1 \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_n)$ *sur le produit* $\Omega_1\times\cdots\times\Omega_n$ *qui est engendrée par*

$$\mathcal{F}_1 \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_n = \{A_1\times\cdots\times A_n, \mid \forall i=1,\dots,n : A_i\in\mathcal{F}_i\}$$

et qu'on note $\mathcal{F}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{F}_n$ *sans parenthèses, est égale à la tribu obtenue en prenant des produits partiels successifs en plaçant des parenthèses. Par exemple, on a les égalités*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{F}_n &= \mathcal{F}_1\otimes(\mathcal{F}_2\otimes\cdots\otimes\mathcal{F}_n)\\ &= \big((\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2)\otimes\mathcal{F}_3\otimes\cdots\otimes\mathcal{F}_{n-1}\big)\otimes\mathcal{F}_n\\ &= \big((\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2)\otimes(\mathcal{F}_3\otimes\cdots\otimes\mathcal{F}_{n-1})\big)\otimes\mathcal{F}_n\ .\end{aligned}$$

(ii) *Si, pour tout* $i=1,\dots,n$, *la mesure* μ_i *est* σ*-finie sur* Ω_i, *alors il existe une unique mesure* σ*-finie sur le produit* $\Omega_1\times\cdots\times\Omega_n$ *muni de la tribu* $\mathcal{F}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{F}_n$, *qu'on note* $\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n$ *sans parenthèses, qui vérifie, pour tout* $A_1\in\mathcal{F}_1,\dots,A_n\in\mathcal{F}_n$, *la condition*

(14.4) $$(\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n)(A_1\times\cdots\times A_n) = \mu_1(A_1)\cdot\cdots\cdot\mu_n(A_n)\ .$$

De plus, cette mesure est égale à la mesure obtenue en prenant des produits partiels successifs en plaçant des parenthèses. Par exemple, on a les égalités

$$\begin{aligned}\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n &= \mu_1\otimes(\mu_2\otimes\cdots\otimes\mu_n)\\ &= \big((\mu_1\otimes\mu_2)\otimes\mu_3\otimes\cdots\otimes\mu_{n-1}\big)\otimes\mu_n\\ &= \big((\mu_1\otimes\mu_2)\otimes(\mu_3\otimes\cdots\otimes\mu_{n-1})\big)\otimes\mu_n\ .\end{aligned}$$

Preuve. • (i) : L'idée de la preuve est de montrer que toutes les tribus obtenues en prenant des produits partiels successifs en plaçant des parenthèses sont engendrées par $\mathcal{F}_1 \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_n$. On fait cela par récurrence sur le nombre de facteurs n en utilisant [4.4] et l'identification de l'espace obtenu en prenant des produits partiels successifs en plaçant des parenthèses avec l'espace produit sans parenthèses.

Pour $n = 2$ il n'y a rien à faire car c'est la définition et il n'y a qu'une seule façon de placer des parenthèses. Supposons donc qu'on a montré le résultat pour tout produit d'au plus n tribus et essayons de le montrer pour un produit de $n+1$ tribus. Si on ne regarde que les parenthèses extérieures, un tel produit s'écrit comme $X \otimes Y$ où X et Y sont des tribus obtenues en prenant des produits partiels successifs en plaçant des parenthèses, X avec les $j \leq n$ premières tribus $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_j$ et Y avec les $n + 1 - j \leq n$ dernières tribus $\mathcal{F}_{j+1}, \ldots, \mathcal{F}_{n+1}$. Par exemple, dans

$$(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \otimes (\mathcal{F}_3 \otimes (\mathcal{F}_4 \otimes \mathcal{F}_5))$$

$X = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ et $Y = \mathcal{F}_3 \otimes (\mathcal{F}_4 \otimes \mathcal{F}_5)$. Par hypothèse de récurrence on a les égalités

$$X = \sigma(\mathcal{F}_1 \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_j) \qquad \text{et} \qquad Y = \sigma(\mathcal{F}_{j+1} \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_{n+1}) \ .$$

Il nous reste donc à montrer l'égalité

$$\sigma(\mathcal{F}_1 \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_j) \otimes \sigma(\mathcal{F}_{j+1} \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_{n+1}) = \sigma(\mathcal{F}_1 \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_{n+1}) \ . \tag{14.5}$$

Avec la convention d'identifier les produits

$$(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_j) \times (\Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_{n+1}) \qquad \text{et} \qquad \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{n+1}$$

on a l'égalité

$$(\mathcal{F}_1 \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_j) \divideontimes (\mathcal{F}_{j+1} \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_{n+1}) = \mathcal{F}_1 \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_{n+1} \ .$$

Mais $\mathcal{F}_1 \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_j$ et $\mathcal{F}_{j+1} \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_{n+1}$ contiennent l'espace total ($\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_j$ et $\Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_{n+1}$ respectivement), donc certainement une suite dont la réunion est l'espace total. On peut donc appliquer [4.4] et conclure qu'on a l'égalité (14.5).

• (ii) : Commençons par l'unicité qui se démontre comme dans le cas $n = 2$. Soit donc ν et ρ deux mesures sur $\mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n$ vérifiant (14.4). L'égalité

$$(A_1 \times \cdots \times A_n) \cap (B_1 \times \cdots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n)$$

montre que la collection $\mathcal{F}_1 \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_n$ est un π-système. De plus, (14.4) montre que ν et ρ coïncident sur ce π-système. Si μ_i est σ-finie, alors il existe une suite croissante $A_{i,k} \in \mathcal{F}_i$ telle que $\cup_{k \in \mathbf{N}} A_{i,k} = \Omega_i$ et $\mu_i(A_{i,k}) < \infty$. Alors la suite

$$B_k = A_{1,k} \times \cdots \times A_{n,k} \in \mathcal{F}_1 \divideontimes \cdots \divideontimes \mathcal{F}_n$$

est croissante et vérifie $\cup_{k \in \mathbf{N}} B_k = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$. De plus (de nouveau par (14.4)) on a $\rho(B_k) < \infty$. La mesure ρ est donc σ-finie sur le π-système. Les hypothèses de [11.11] sont donc vérifiées et on peut conclure que $\nu = \rho$.

Pour l'existence on montre, par récurrence sur n, que les mesures obtenues en prenant des produits partiels successifs en plaçant des parenthèses vérifient toutes

(14.4). Pour $n = 2$ c'est le résultat [12.12]. Supposons donc qu'on a montré le résultat pour tout produit d'au plus n mesures et essayons de le montrer pour un produit de $n+1$ mesures. Si on ne regarde que les parenthèses extérieures, un tel produit s'écrit comme $\nu \otimes \rho$ où ν et ρ sont des mesures obtenues en prenant des produits partiels successifs en plaçant des parenthèses, ν avec les $j \leq n$ premières mesures $\mu_1, \ldots, \mu_j$ et ρ avec les $n+1-j \leq n$ dernières mesures $\mu_{j+1}, \ldots, \mu_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence ν et ρ sont σ-finies et on a les égalités

$$\nu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_j \qquad \text{et} \qquad \rho = \mu_{j+1} \otimes \cdots \otimes \mu_{n+1} \ ,$$

ainsi que les égalités

$$\begin{aligned} \nu(A_1 \times \cdots \times A_j) &= \mu_1(A_1) \mathbin{\blacksquare} \cdots \mathbin{\blacksquare} \mu_j(A_j) \qquad \text{et} \\ \rho(A_{j+1} \times \cdots \times A_{n+1}) &= \mu_{j+1}(A_{j+1}) \mathbin{\blacksquare} \cdots \mathbin{\blacksquare} \mu_{n+1}(A_{n+1}) \ . \end{aligned}$$

De nouveau par [12.12] la mesure $\nu \otimes \rho$ est σ-finie et vérifie (grâce à l'associativité du produit tordu $\blacksquare$)

$$(\mu \otimes \rho)(A_1 \times \cdots \times A_{n+1}) = \mu_1(A_1) \mathbin{\blacksquare} \cdots \mathbin{\blacksquare} \mu_{n+1}(A_{n+1}) \ .$$

Ainsi s'achève la récurrence et la preuve est terminée. $\boxed{CQFD}$

14.6 Discussion. Avec [14.3] on a montré que le calcul qu'on a fait dans [14.1] est entièrement justifié si μ, ν et π sont σ-finies et on obtient l'égalité (14.2) : si on itère l'intégration d'une fonction de trois variables de deux façons différentes on obtient le même résultat. Mais ... on a négligé les "détails" de mesurabilité et définie presque partout.

La généralisation correcte du théorème de Fubini-Tonelli [13.1] dit que, si on itère des intégrations (d'une fonction *positive*) sur un produit d'espaces mesurés dans n'importe quel ordre (d'abord sur $\Omega_{\tau(1)}$, ensuite sur $\Omega_{\tau(2)}$ etc. avec τ une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$), alors les résultats intermédiaires sont des fonctions mesurables sur le produit des espaces restants. Ce qui veut dire qu'on peut poursuivre l'itération. Et le résultat final de l'itération donne l'intégrale sur l'espace produit.

Pour le théorème de Fubini avec une fonction quelconque la situation est plus délicate car il faut tenir compte du fait que les résultats intermédiaires ne sont pas forcément définis partout. La première partie dit, comme dans [13.2], que pour tester si une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbf{K}$ est intégrable, il suffit d'itérer l'intégration de la valeur absolue de la fonction dans un ordre quelconque et de voir si le résultat est fini. La généralisation du théorème de Fubini-Tonelli garantit qu'une telle itération est autorisée et ne dépend pas de l'ordre choisi. Ensuite, pour calculer l'intégrale de la fonction sur le produit, on itère l'intégration dans un ordre quelconque. À chaque étape on obtient une fonction sur le produit des espaces restants qui n'est définie que presque partout. On doit la compléter (par exemple en la définissant zéro là où elle n'est pas définie) en une fonction mesurable sur le produit restant complet. Et on peut poursuivre l'itération pour obtenir à la fin la valeur de l'intégrale de la fonction sur l'espace produit total.

Les preuves de ces deux généralisations s'obtiennent par un simple argument de récurrence sur le nombre de facteurs dans le produit à partir des théorèmes fondamentaux [13.1] et [13.2], mais elles sont assez longues à écrire. On les laisse aux bons soins du lecteur courageux.

14.7 Théorème (Fubini-Tonelli bis). *Soit* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$, $i = 1, \ldots, n$ *des espaces mesurés tels que la mesure* μ_i *est* σ*-finie sur* Ω_i*, soit* $f : \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *une fonction positive et mesurable pour la tribu* $\mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n$*, soit* τ *une permutation de l'ensemble* $\{1, \ldots, n\}$ *et soit* $1 \leq k < n$.

(i) *L'application* $F : \Omega_{\tau(k+1)} \times \cdots \times \Omega_{\tau(n)} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *définie par*

$$F(\omega_{\tau(k+1)}, \ldots, \omega_{\tau(n)}) = \int_{\Omega_{\tau(k)}} \Big(\cdots \Big(\int_{\Omega_{\tau(1)}} f(\omega_1, \ldots, \omega_n) \, \mathrm{d}\mu_{\tau(1)}(\omega_{\tau(1)}) \Big) \cdots \Big) \mathrm{d}\mu_{\tau(k)}(\omega_{\tau(k)})$$

est mesurable pour la tribu $\mathcal{F}_{\tau(k+1)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{\tau(n)}$.

(ii) *On a l'égalité*

$$\int_{\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n) = \int_{\Omega_{\tau(n)}} \Big(\cdots \Big(\int_{\Omega_{\tau(1)}} f(\omega_1, \ldots, \omega_n) \, \mathrm{d}\mu_{\tau(1)}(\omega_{\tau(1)}) \Big) \cdots \Big) \mathrm{d}\mu_{\tau(n)}(\omega_{\tau(n)}) \; .$$

14.8 Théorème (Fubini bis). *Soit* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$, $i = 1, \ldots, n$ *des espaces mesurés tels que la mesure* μ_i *est* σ*-finie sur* Ω_i*, soit* $f : \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n \to \mathbf{K}$ *avec* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$*,* $\overline{\mathbf{R}}$ *ou* $\mathbf{C}$ *une fonction mesurable pour la tribu* $\mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n$.

(i) f *est* $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$*-intégrable si et seulement s'il existe une permutation* τ *de l'ensemble* $\{1, \ldots, n\}$ *tel que l'intégrale itérée*

$$\int_{\Omega_{\tau(n)}} \Big(\cdots \Big(\int_{\Omega_{\tau(1)}} |f(\omega_1, \ldots, \omega_n)| \, \mathrm{d}\mu_{\tau(1)}(\omega_{\tau(1)}) \Big) \cdots \Big) \mathrm{d}\mu_{\tau(n)}(\omega_{\tau(n)})$$

est finie.

(ii) *Supposons que* f *est* $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$*-intégrable et soit* τ *une permutation de l'ensemble* $\{1, \ldots, n\}$*. Nota Bene : la suite de ce point doit être lu par récurrence en* k *en commençant par* $k = 0$.

Pour $\mu_{\tau(k+1)} \otimes \cdots \otimes \mu_{\tau(n)}$*-presque tout point* $(\omega_{\tau(k+1)}, \ldots, \omega_{\tau(n)})$ *dans* $\Omega_{\tau(k+1)} \times \cdots \times \Omega_{\tau(n)}$ *la fonction* $F : \Omega_{\tau(k)} \to \mathbf{K}$ *définie par*

$$F(\omega_{\tau(k)}) = \int_{\Omega_{\tau(k-1)}} \Big(\cdots \Big(\int_{\Omega_{\tau(1)}} f(\omega_1, \ldots, \omega_n) \, \mathrm{d}\mu_{\tau(1)}(\omega_{\tau(1)}) \Big) \cdots \Big) \mathrm{d}\mu_{\tau(k-1)}(\omega_{\tau(k-1)})$$

est $\mu_{\tau(k)}$-intégrable. La fonction qui associe à $(\omega_{\tau(k+1)}, \ldots, \omega_{\tau(n)})$ l'intégrale de F par rapport à la mesure $\mu_{\tau(k)}$ si F est $\mu_{\tau(k)}$-intégrable et zéro dans le cas contraire sera noté, mais c'est un abus de notation, par

$$\int_{\Omega_{\tau(k)}} \Big(\cdots \Big(\int_{\Omega_{\tau(1)}} f(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, \mathrm{d}\mu(\omega_{\tau(1)}) \Big) \cdots \Big) \mathrm{d}\mu(\omega_{\tau(k)}) \ .$$

Cette fonction sur l'espace $\Omega_{\tau(k+1)} \times \cdots \times \Omega_{\tau(n)}$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ est $\mu_{\tau(k+1)} \otimes \cdots \otimes \mu_{\tau(n)}$-intégrable.

(iii) *Si f est $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$-intégrable et si τ est une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, alors on a (avec le même abus de notation que signalé dans (ii)) l'égalité*

$$\int_{\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n) =$$
$$\int_{\Omega_{\tau(n)}} \Big(\cdots \Big(\int_{\Omega_{\tau(1)}} f(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, \mathrm{d}\mu_{\tau(1)}(\omega_{\tau(1)}) \Big) \cdots \Big) \mathrm{d}\mu_{\tau(n)}(\omega_{\tau(n)}) \ .$$

15. Évaluation, mesures de comptage et séries

→ **15.1 Lemme.** *Soit Ω un ensemble et $T \subset \Omega$ un sous-ensemble. La mesure de comptage C_T est σ-finie sur la tribu totale $\mathcal{P}(\Omega)$ si et seulement si T est dénombrable (fini ou infini).*

15.2 Remarque. La même chose n'est plus vraie si on remplace la tribu totale $\mathcal{P}(\Omega)$ par une tribu arbitraire $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sur Ω. Il reste vrai que si C_T est σ-finie sur $\mathcal{F}$, alors T est dénombrable. Mais il est possible que T soit dénombrable sans que C_T soit σ-finie sur $\mathcal{F}$; cela dépend du fait si $\mathcal{F}$ contient suffisamment d'éléments. Le cas extrême est illustré par $\Omega = T = \mathbf{N}$ muni de la tribu minimale $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$. Ici C_T ne peut pas être σ-finie sur $\mathcal{F}$, car, à part l'ensemble vide, $\mathcal{F}$ ne contient aucun élément avec une C_T-mesure finie.

→ **15.3 Lemme.** *Soit Ω un ensemble, $T \subset \Omega$ un sous-ensemble et considérons l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), C_T)$.*

(i) *Toute fonction à valeurs dans n'importe quel espace mesurable est mesurable.*

(ii) *Un sous-ensemble $A \subset \Omega$ est C_T-négligeable si et seulement si $A \cap T = \emptyset$. En particulier dans le cas $T = \Omega$, le seul ensemble C_Ω-négligeable est l'ensemble vide $\emptyset$.*

15.4 Proposition. *Soit I un ensemble dénombrable (fini ou infini) et considérons l'espace mesuré $(I, \mathcal{P}(I), C_I)$. Alors on a les propriétés suivantes.*

(i) *Pour toute fonction positive $f : I \to \overline{\mathbf{R}}_+$ on a*

$$\int_I f \, \mathrm{d}C_I = \sum_{i \in I} f(i) \ ,$$

indépendamment de l'ordre qu'on met sur I pour l'énumérer.

(ii) *Une fonction $f : I \to \mathbf{K}$ avec $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$ est C_I-intégrable si et seulement si $\sum_{i\in I} |f(i)|$ est finie. Si c'est le cas on a*

$$\int_I f \, \mathrm{d}C_I = \sum_{i \in I} f(i) \ ,$$

indépendamment de l'ordre qu'on met sur I pour l'énumérer.

Preuve. • (i) : Soit $i_1, \dots, i_n \in I$ des éléments distincts et soit $g_n : I \to \overline{\mathbf{R}}_+$ la fonction définie par

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} f \centerdot \mathbf{1}_{\{i_k\}} = \sum_{k=1}^{n} f(i_k) \centerdot \mathbf{1}_{\{i_k\}} \ .$$

Alors on peut faire le calcul

$$\int_I g_n \, \mathrm{d}C_I = \sum_{k=1}^{n} f(i_k) \centerdot \int_I \mathbf{1}_{\{i_k\}} \, \mathrm{d}C_I = \sum_{k=1}^{n} f(i_k) \ ,$$

où la première égalité est une conséquence de [8.8] et [8.13] et la deuxième égalité est une conséquence de [7.3.i] et le fait que $C_I(\{i_k\}) = 1$.

Si I est l'ensemble fini $I = \{i_1, \dots, i_n\}$, alors $g_n = f$ et on a établi le résultat. Supposons donc que I est infini et choisissons un ordre pour énumérer I comme $I = \{i_k \mid k \in \mathbf{N}\}$. Alors la suite des fonctions g_n, $n \in \mathbf{N}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives et $\lim_{n\to\infty} g_n = f$. Par le théorème de Beppo-Levi [8.1] et le résultat précédent on peut donc faire le calcul

$$\int_i f \, \mathrm{d}C_I = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \, \mathrm{d}C_I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(i_k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(i_k) \ .$$

Vu que le membre de gauche ne dépend pas de l'ordre choisi, on a établi le résultat annoncé.

• (ii) : Si f est C_I-intégrable, alors $\sum_{i\in I} |f(i)| < \infty$ par (ii), ce qui implique que pour tout $i \in I$ on doit avoir $|f(i)| < \infty$. On en déduit que $f \centerdot \mathbf{1}_{\{i\}} = f(i) \cdot \mathbf{1}_{\{i\}}$ est C_I-intégrable et que (avec [9.10]) $\int_I f(i) \cdot \mathbf{1}_{\{i\}} \, \mathrm{d}C_I = f(i)$.

Soit maintenant $i_1, \dots, i_n \in I$ des éléments distincts et posons

$$g_n = \sum_{k=1}^{N} f(i_k) \cdot \mathbf{1}_{\{i_k\}} \ .$$

Chaque terme étant C_I-intégrable, on peut appliquer de nouveau [9.10] pour obtenir

$$\int_I g_n \,\mathrm{d}C_I = \sum_{k=1}^{n} f(i_k) \ .$$

Si I est l'ensemble fini $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$, alors $g_n = f$ et on a établi le résultat. Supposons donc que I est infini et choisissons un ordre pour énumérer I comme $I = \{\omega_k \mid k \in \mathbf{N}\}$. En considérant la suite des fonctions g_n, $n \in \mathbf{N}$ on vérifie aisément que $|g_n| \le |f|$ et que $\lim_{n\to\infty} g_n = f$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue [10.5] (avec $A = B = I$) pour obtenir

$$\int_I f \,\mathrm{d}C_I = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}C_I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(i_k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(i_k) \ .$$

On a donc établi le résultat annoncé, de nouveau parce que le membre de gauche ne dépend pas de l'ordre choisi. $\boxed{CQFD}$

15.5 Corollaire. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, soit $T \subset \Omega$ un ensemble dénombrable (fini ou infini) et soit C_T la mesure de comptage sur $\mathcal{F}$. Alors on a les propriétés suivantes.*

(i) *Pour toute fonction mesurable positive $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ on a*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}C_T = \sum_{\omega\in T} f(\omega) \ ,$$

indépendamment de l'ordre qu'on met sur T pour l'énumérer.

(ii) *Une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est C_T-intégrable si et seulement si $\sum_{\omega\in T} |f(\omega)|$ est finie. Si c'est le cas on a*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}C_T = \sum_{\omega\in T} f(\omega) \ ,$$

indépendamment de l'ordre qu'on met sur T pour l'énumérer.

Preuve. Soit f une fonction positive ou intégrable selon le cas. En utilisant des résultats précédents on peut établir les égalités suivantes (en mettant les tribus concernées comme dans [9.12]) :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega^{\mathcal{F}} f \,\mathrm{d}C_T &\overset{[9.12]}{=} \int_\Omega^{\mathcal{P}(\Omega)} f \,\mathrm{d}C_T \overset{[8.10] \text{ ou } [9.7.\text{i}]}{=} \int_\Omega^{\mathcal{P}(\Omega)} f \centerdot \mathbf{1}_T \,\mathrm{d}C_T \\
&\overset{\text{déf. ou } [9.3.\text{ii}]}{=} \int_T^{\mathcal{P}(\Omega)} f \,\mathrm{d}C_T \overset{[7.6] \text{ ou } [9.5]}{=} \int_T^{\mathcal{P}(T)} f|_T \,\mathrm{d}C_T|_{\mathcal{P}(T)} \\
&\overset{[15.4]}{=} \sum_{\omega\in T} f(\omega) \ ,
\end{aligned}$$

où pour la deuxième égalité on a utilisé le fait que $T \in \mathcal{P}(\Omega)$, que $C_T(T^c) = 0$ par définition de mesure de comptage, et donc que $f \overset{C_T\text{-pp}}{=} f \centerdot \mathbf{1}_T$. $\boxed{CQFD}$

15.6 Corollaire. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, $\omega \in \Omega$ un élément arbitraire et soit δ_ω la mesure de Dirac au point ω. Alors une fonction mesurable f sur Ω est δ_ω-intégrable si et seulement si $|f(\omega)| < \infty$ et dans ce cas on a l'égalité*

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\delta_\omega = f(\omega) \ .$$

→ **15.7 Corollaire (changement d'ordre de sommation).** *Soit $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une bijection et soit $\sum_{n=0}^\infty a_n$ une série (réelle ou complexe) absolument convergente. Alors*

$$\sum_{n=0}^\infty a_n = \sum_{n=0}^\infty a_{\phi(n)} \ .$$

15.8 Discussion. Si on regarde les résultats [15.4], on voit que l'intégrale sur $\mathbf{N}$ avec la mesure de comptage reproduit une série et qu'une fonction $C_{\mathbf{N}}$-intégrable correspond avec une série absolument convergente. Cette approche d'une série absolument convergente a comme bonus que l'ordre de sommation est sans importance [15.7]. Dans le contexte de séries comme limite de sommes partielles, ce résultat est beaucoup moins évident. Remarquons en passant qu'on peut remplacer $\overline{\mathbf{R}}$ par $\mathbf{R}$ pour les séries absolument convergentes : si $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ est finie, alors forcément chaque a_n doit être fini.

15.9 Lemme. *Soit I et T deux ensembles dénombrables (finis ou infinis) et considérons les espaces mesurés $(I, \mathcal{P}(I), C_I)$ et $(T, \mathcal{P}(T), C_T)$, ainsi que l'espace produit $I \times T$. Alors la tribu produit est la tribu maximale :*

$$\mathcal{P}(I) \otimes \mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(I \times T)$$

et la mesure produit est la mesure de comptage sur l'espace total :

$$C_I \otimes C_T = C_{I \times T} \ .$$

Preuve. Le produit $I \times T$ étant dénombrable, chaque sous-ensemble $E \subset I \times T$ est aussi dénombrable, donc réunion dénombrable de singletons $\{(i,t)\}$. Mais un singleton $\{(i,t)\} = \{i\} \times \{t\}$ appartient à l'ensemble $\mathcal{P}(I) \divideontimes \mathcal{P}(T)$ et donc à la tribu produit $\mathcal{P}(I) \otimes \mathcal{P}(T)$. Les propriétés d'une tribu impliquent maintenant que E comme réunion dénombrable de tels singletons appartient aussi à la tribu produit. On a donc l'inclusion $\mathcal{P}(I \times T) \subset \mathcal{P}(I) \otimes \mathcal{P}(T)$. L'autre inclusion étant évidente, on a égalité. Pour l'égalité des mesures, il est évident qu'on a l'égalité

$$(C_I \otimes C_T)(\{(i,t)\} = C_I(\{i\}) \centerdot C_T(\{t\}) = 1 \centerdot 1 = 1 = C_{I \times T}(\{(i,t)\} \ .$$

Un sous-ensemble $E \subset I \times T$ étant une réunion dénombrable disjointe de singletons, la σ-additivité de mesures nous donne immédiatement l'égalité annoncée. $\boxed{CQFD}$

→ **15.10 Corollaire.** *Soit $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{nm}$ une série double à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$. On a toujours les égalités*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{nm}| \Big) = \sum_{(n,m)\in\mathbf{N}^2} |a_{nm}| = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| \Big) \ .$$

Si un de ces trois termes est fini (donc les trois), alors on a les égalités

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\Big) = \sum_{(n,m)\in\mathbf{N}^2} a_{nm} \ .$$

Dans les deux cas, la somme simple $(n, m) \in \mathbf{N}^2$ utilise une énumération arbitraire de $\mathbf{N}^2$ (bijection $\mathbf{N} \to \mathbf{N}^2$).

→ **15.11 Exercice.** Énoncer les théorèmes de Fubini-Tonelli et de Fubini dans le cas où l'espace mesuré $(X, \mathcal{G}, \nu)$ est l'espace $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), C_{\mathbf{N}})$: les entiers naturels avec la mesure de comptage. Comparer le résultat avec [8.9].

→ **15.12 Exercice.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f_n : \Omega \to \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, une suite de fonctions mesurables. Énoncer le théorème de convergence dominée [10.5] pour la suite des sommes partielles $s_n = \sum_{i=0}^{n} f_i$. Comparer le résultat avec le résultat de [15.11].

16. Existence de mesures

16.1 Proposition. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et soit $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une application. Si μ vérifie les trois conditions*

(i) *$\mu(\emptyset) = 0$,*

(ii) *μ est additive : $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ sont deux à deux disjoints, alors*

$$\mu\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \ \big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \ ,$$

(iii) *μ est continue pour des suites croissantes : si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante d'ensembles mesurables ($\forall n \in \mathbf{N} : A_n \subset A_{n+1}$), alors*

$$\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \ \big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ ,$$

alors μ est une mesure sur $\mathcal{F}$.

Preuve. Ce qu'il faut montrer est la σ-additivité de μ. Soit donc $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints. On pose $A_n = \cup_{i=0}^n B_i$, alors A_n est une suite croissante vérifiant $\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \cup_{i\in\mathbf{N}} B_i$. On a donc

$$\begin{aligned}\mu\big(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i\ \big) = \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\ \big) &\overset{\text{continuité}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \\ = \lim_{n\to\infty} \mu\big(\bigcup_{i=0}^{n} B_i\ \big) &\overset{\text{additivité}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mu(B_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(B_i)\ . \quad \boxed{CQFD}\end{aligned}$$

16.2 Définition. Soit Ω un ensemble. Une application $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ est appelé une *mesure extérieure sur* Ω si elle vérifie les conditions :

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) μ^* est croissante : $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu^*(A) \le \mu^*(B)$,

(iii) μ^* est sous-σ-additive : si pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $A_n \subset \Omega$, alors on a

$$\mu^*\big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\big) \le \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(A_n)\ .$$

16.3 Construction d'une mesure extérieure. Soit Ω un ensemble, soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une collection de sous-ensembles et soit $\theta : \mathcal{C} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une application. Les seules conditions qu'on impose sont que $\emptyset$ appartient à $\mathcal{C}$ et que $\theta(\emptyset) = 0$. Associée à ces données on construit une mesure extérieure μ^* sur Ω. L'idée de la construction est de recouvrir un sous-ensemble $A \subset \Omega$ par des éléments C_n de $\mathcal{C}$ et de calculer la somme $\sum \theta(C_n)$. La valeur de $\mu^*(A)$ sera la plus petite valeur de cette somme. Plus précisément :

$$\mu^*(A) = \inf \Big\{ \sum_{n\in\mathbf{N}} \theta(C_n) \mid \forall n : C_n \in \mathcal{C} \text{ et } A \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} C_n \Big\}\ ,$$

où on convient que l'inf prend la valeur ∞ s'il n'existe pas de suite $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ qui recouvre A.

Pour montrer que μ^* est bien une mesure extérieure sur Ω, on vérifie les trois conditions.

— L'inclusion évidente $\emptyset \subset \cup_{n\in\mathbf{N}} \emptyset$ est une recouvrement particulier du sous-ensemble $\emptyset \subset \Omega$ par des éléments $A_n = \emptyset \in \mathcal{C}$. D'où $\mu^*(\emptyset) \le \sum_{n\in\mathbf{N}} \theta(\emptyset) = 0$. Vu que $\mu^*(A)$ est toujours positive, il s'ensuit qu'on a bien $\mu^*(\emptyset) = 0$.

— Si $A \subset B$ et $B \subset \cup_{n\in\mathbf{N}} C_n$, alors on a aussi $A \subset \cup_{n\in\mathbf{N}} C_n$. Il s'ensuit qu'on a l'inclusion

$$\begin{aligned}&\Big\{ \sum_{n\in\mathbf{N}} \theta(C_n) \mid \forall n : C_n \in \mathcal{C} \text{ et } A \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} C_n \Big\} \\ &\qquad\qquad \subset \quad \Big\{ \sum_{n\in\mathbf{N}} \theta(C_n) \mid \forall n : C_n \in \mathcal{C} \text{ et } B \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} C_n \Big\}\ ,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
— Soit maintenant A_n une suite de sous-ensembles de Ω. Si l'une des $\mu^*(A_n) = \infty$, alors l'inégalité voulue est automatiquement vérifiée. Supposons donc que $\mu^*(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Par définition de l'inf il existe des $C_{n,i}$ dans $\mathcal{C}$ tels que

$$A_n \subset \bigcup_{i\in\mathbf{N}} C_{n,i} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in\mathbf{N}} \theta(C_{n,i}) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \ .$$

On a donc l'inclusion $\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n \subset \cup_{n,i\in\mathbf{N}} C_{n,i}$. La famille $(n,i) \in \mathbf{N}^2$ étant dénombrable on a donc l'inégalité $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n) \leq \sum_{n,i\in\mathbf{N}} \theta(C_{n,i})$. Par [15.10] on a donc

$$\begin{aligned} \mu^*(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n) &\leq \sum_{n,i\in\mathbf{N}} \theta(C_{n,i}) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \sum_{i\in\mathbf{N}} \theta(C_{n,i}) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbf{N}} \Big(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\Big) = \varepsilon + \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu^*(A_n) \ . \end{aligned}$$

Étant donné que ε était arbitraire, on en déduit l'inégalité voulue.

16.4 Remarque. Le nom "mesure extérieure" vient de cette construction. On dispose d'une collection $\mathcal{C}$ de sous-ensembles pour lesquelles on prétend savoir la mesure. Pour approcher la "mesure" d'un sous-ensemble B quelconque, on approche B par une réunion dénombrable d'éléments C_n, $n \in \mathbf{N}$, de $\mathcal{C}$ dans le sens que leur réunion soit plus grande que B et on dit que $\sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(C_n)$ est une approximation de la mesure de B. Le fait que l'approximation de B se fait par un ensemble plus grande, c'est-à-dire par l'extérieur, explique le nom de "mesure extérieure".

On pourrait aussi définir une mesure *intérieure* en prenant des réunions dénombrables qui sont *incluses* dans B, mais une telle notion est nettement moins fructueuse que celle d'une mesure extérieure (voir [17.19]).

16.5 Définition. Soit Ω un ensemble et $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une mesure extérieure. On dit qu'un sous-ensemble $A \subset \Omega$ est *μ^*-mesurable* si

$$\forall B \subset \Omega : \mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \ .$$

En toutes lettres : si on utilise A pour couper un sous-ensemble quelconque B en deux comme $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$, alors la valeur de μ^* de B est la somme des valeurs des deux parties. On note la collection de tous les sous-ensembles μ^*-mesurables par $\mathcal{M}(\mu^*)$.

→ **16.6 Lemme.** *Soit Ω un ensemble et $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une mesure extérieure.*

(i) *μ^* est sous-additive :*

$$A_1, \ldots, A_n \subset \Omega \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i) \ .$$

(ii) $A \subset \Omega$ *appartient à* $\mathcal{M}(\mu^*)$ *si et seulement si* A *vérifie la condition*

$$\forall B \subset \Omega : \mu^*(B) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \ .$$

16.7 Théorème. *Soit* Ω *un ensemble et* $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *une mesure extérieure sur* Ω*. Alors la collection* $\mathcal{M}(\mu^*)$ *de tous les ensembles* μ^**-mesurables est une tribu et la restriction de* μ^* *à* $\mathcal{M}(\mu^*)$ *est une mesure.*

Preuve. La preuve du fait que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu se fait en plusieurs étapes.

• (i) L'ensemble vide appartient à $\mathcal{M}(\mu^*)$. Pour tout $B \subset \Omega$ on a :

$$\mu^*(B) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(B) = \mu^*(\emptyset \cap B) + \mu^*(\Omega \setminus \emptyset \cap B) \ ,$$

ce qui montre $\emptyset \in \mathcal{M}(\mu^*)$.

• (ii) Stabilité par complémentaire. Soit $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$ arbitraire, alors on a pour tout $B \subset \Omega$:

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) = \mu^*((A^c) \cap B) + \mu^*((A^c)^c \cap B) \ ,$$

ce qui montre que A^c appartient à $\mathcal{M}(\mu^*)$.

• Stabilité par intersection finie. Soit A et B dans $\mathcal{M}(\mu^*)$ et soit $C \subset \Omega$ arbitraire. Alors on a :

$$\begin{array}{rr} C \subset \Omega \ , \ A \in \mathcal{M}(\mu^*): & \mu^*(C) = \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C) \\ A \cap C \subset \Omega \ , \ B \in \mathcal{M}(\mu^*): & \mu^*(A \cap C) = \mu^*(B \cap A \cap C) + \mu^*(B^c \cap A \cap C) \\ A^c \cap C \subset \Omega \ , \ B \in \mathcal{M}(\mu^*): & \mu^*(A^c \cap C) = \mu^*(B \cap A^c \cap C) + \mu^*(B^c \cap A^c \cap C) \end{array}$$

Mais on a toujours l'égalité

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \ .$$

DESSIN

En prenant l'intersection avec C et en appliquant [16.6.i] on obtient l'inégalité

$$\mu^*((A \cap B)^c \cap C) \leq \mu^*(A \cap B^c \cap C) + \mu^*(A^c \cap B \cap C) + \mu^*(A^c \cap B^c \cap C) \ .$$

Si on combine cette inégalité avec les trois égalités ci-dessus, on obtient l'inégalité

$$\mu^*(C) \geq \mu^*((A \cap B) \cap C) + \mu^*((A \cap B)^c \cap C) \ .$$

Par [16.6.ii] on a $A \cap B \in \mathcal{M}(\mu^*)$. Par récurrence (et l'associativité de l'intersection) on montre que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est stable par intersection finie.

• Stabilité par réunion finie. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des sous-ensembles de Ω, alors on a l'égalité

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Big(\bigcap_{i=1}^n A_i^c \Big)^c \ .$$

La stabilité de $\mathcal{M}(\mu^*)$ par complémentaire et intersection finie montre alors que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est aussi stable par réunion finie.

• Stabilité par différence. Soit $A, B \in \mathcal{M}(\mu^*)$, alors $A \setminus B = A \cap B^c$, ce qui appartient à $\mathcal{M}(\mu^*)$ par stabilité par intersection finie et complémentaire.

• Stabilité par réunion dénombrable. Soit $A_n \in \mathcal{M}(\mu^*)$, $n \in \mathbf{N}$ une suite d'ensembles μ^*-mesurables et soit $A = \cup_{i\in\mathbf{N}} A_i$. On définit la suite B_n comme

$$B_0 = A_0 \qquad \text{et} \qquad B_n = A_n \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

On montre facilement par récurrence qu'on a

$$\bigcup_{n=0}^{N} B_n = \bigcup_{i=0}^{N} A_i \qquad \text{et (donc)} \qquad \bigcup_{n\in\mathbf{N}} B_n = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i \equiv A\ .$$

De plus, les B_n sont deux à deux disjoints : si $\omega \in B_n = A_n \setminus (\cup_{i=0}^{n-1} B_i)$, alors ω n'appartient à aucun B_i avec $i < n$. Et finalement, les B_n sont μ^*-mesurables car $\mathcal{M}(\mu^*)$ est stable par réunion finie et différence.

Soit maintenant $C \subset \Omega$ arbitraire. Pour $N \in \mathbf{N}$ on constate que $C \cap (\cup_{n=0}^{N+1} B_n)$ est un sous-ensemble de Ω et que B_{N+1} est dans $\mathcal{M}(\mu^*)$. On a donc

$$\begin{aligned}\mu^*(C \cap \Big(\bigcup_{n=0}^{N+1} B_n\Big)) &= \mu^*(C \cap \Big(\bigcup_{n=0}^{N+1} B_n\Big) \cap B_{N+1}) + \mu^*(C \cap \Big(\bigcup_{n=0}^{N+1} B_n\Big) \cap B_{N+1}^c) \\ &= \mu^*(C \cap B_{N+1}) + \mu^*(C \cap \Big(\bigcup_{n=0}^{N} B_n\Big))\ ,\end{aligned}$$

où la deuxième égalité est une conséquence du fait que les B_n sont deux à deux disjoints. On en déduit par récurrence qu'on a pour tout $N \in \mathbf{N}$ l'égalité

$$\mu^*(C \cap \Big(\bigcup_{n=0}^{N} B_n\Big)) = \sum_{n=0}^{N} \mu^*(C \cap B_n)\ .$$

On a maintenant les outils pour montrer que A est μ^*-mesurable. Pour $N \in \mathbf{N}$ on a l'inclusion $\cup_{n=0}^{N} B_n \subset A$ et donc par croissance d'une mesure extérieure on a l'inégalité

$$\mu^*(C \cap \Big(\bigcup_{n=0}^{N} B_n\Big)^c\ ) \geq \mu^*(C \cap A^c)\ .$$

Étant donné que $\overset{N}{\underset{n=0}{\cup}} B_n$ est μ^*-mesurable on peut donc faire le calcul :

$$\begin{aligned}\mu^*(C) &= \mu^*(C \cap \Big(\bigcup_{n=0}^{N} B_n\Big)^c\ ) + \mu^*(C \cap \Big(\bigcup_{n=0}^{N} B_n\Big)) \\ &\geq \mu^*(C \cap A^c) + \sum_{n=0}^{N} \mu^*(C \cap B_n)\ .\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $N \in \mathbf{N}$, on en déduit qu'on doit avoir

$$\mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap A^c) + \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu^*(C \cap B_n)\ . \tag{16.8}$$

Mais $C \cap A = C \cap (\cup_{n\in\mathbf{N}} B_n) = \cup_{n\in\mathbf{N}}(C \cap B_n)$ et donc par sous-σ-additivité d'une mesure extérieure on a

$$\mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap A^c) + \mu^*(C \cap A) \ .$$

Par [16.6.ii] on a $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$. Ainsi on a vérifié que $\mathcal{M}(\mu^*)$ possède les trois propriétés d'une tribu.

• μ^* une mesure sur $\mathcal{M}(\mu^*)$. On sait déjà que $\mu^*(\emptyset) = 0$, donc il suffit de vérifier la σ-additivité. Soit donc $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments dans $\mathcal{M}(\mu^*)$ deux à deux disjoints et notons $A = \cup_{n\in\mathbf{N}} A_n$. Alors l'inégalité (16.8) appliquée avec $C = A$ nous donne l'inégalité

$$\mu^*(A) \geq \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu^*(A_n) \ ,$$

car les A_n étant disjoints, on a $B_n = A_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. La sous-σ-additivité d'une mesure extérieure donnant l'inégalité dans l'autre sens, on a montré que μ^* est bien σ-additive sur $\mathcal{M}(\mu^*)$. $\boxed{CQFD}$

16.9 Définition. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un semi-anneau. Une application $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ est appelée une *pré-mesure sur* $\mathcal{C}$ si elle vérifie les trois conditions suivantes.

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) additivité sur $\mathcal{C}$: si $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ sont deux à deux disjoints et si $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} C_i$ appartient aussi à $\mathcal{C}$, alors on a l'égalité

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) \ .$$

(iii) sous-σ-additivité sur $\mathcal{C}$: si C et C_n, $n \in \mathbf{N}$ sont des éléments de $\mathcal{C}$ tels que $C \subset \underset{n\in\mathbf{N}}{\cup} C_n$, alors on a l'inégalité

$$\mu(C) \leq \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(C_n) \ .$$

16.10 Remarques. • La définition de sous-σ-additivité est légèrement différente des définitions données dans [6.9.v] et [16.2.iii]. Ici on ne dispose pas de la stabilité par réunion dénombrable. Par contre, dans les deux cas cités on dispose de la croissance ; on aurait donc pu définir la sous-σ-additivité comme ici. Une même "simplification" n'est pas possible pour l'additivité, car on veut vraiment une égalité. On est donc obligé de rajouter la condition que la réunion appartient elle aussi à $\mathcal{C}$.

• La définition d'une pré-mesure a un sens pour n'importe quelle collection de sous-ensembles de Ω. Mais cette notion n'a d'intérêt que si on l'applique à un semi-anneau, comme le montre le théorème suivant.

16.11 Théorème (de prolongement). *Soit Ω un ensemble, soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un semi-anneau et soit $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une pré-mesure. Alors μ se prolonge en une mesure $\mu : \sigma(\mathcal{C}) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ sur la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.*

16.12 Terminologie. Le fait que la pré-mesure μ se prolonge sur $\sigma(\mathcal{C})$ veut dire qu'il existe une mesure sur $\sigma(\mathcal{C})$ qui coïncide avec la pré-mesure μ sur $\mathcal{C}$. Par abus de notation habituel on note cette mesure par le *même* symbole μ. Officiellement on devrait dire qu'il existe une mesure $\widehat{\mu}$ sur $\sigma(\mathcal{C})$ telle que la restriction de $\widehat{\mu}$ à la collection $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$ est la pré-mesure μ : $\widehat{\mu}|_{\mathcal{C}} = \mu$.

Preuve. L'idée de la preuve est comme suit. On applique la construction [16.3] à la collection $\mathcal{C}$ et l'application $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbf{R}}_+$. On obtient ainsi une mesure extérieure $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbf{R}}_+$. Ensuite on montre que la tribu $\mathcal{M}(\mu^*)$ [16.7] contient $\mathcal{C}$, ce qui impliquerait (par [1.6.iii]) qu'on a l'inclusion $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}(\mu^*)$. Et on termine avec la preuve que $\mu^*(C) = \mu(C)$ pour tout $C \in \mathcal{C}$. Par [6.6.iii] la restriction de μ^* à $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}(\mu^*)$ est une mesure. Par l'argument précédent elle prolonge μ. Par abus de notation (expliqué ci-dessus) on note cette restriction par le même symbole : $\mu = \mu^*|_{\sigma(\mathcal{C})}$, qui est donc le prolongement souhaité.

• Pour montrer que $\mathcal{M}(\mu^*)$ contient $\mathcal{C}$, il suffit (par [16.6.ii]) de montrer pour tout $C \in \mathcal{C}$ et tout $B \subset \Omega$ l'inégalité

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C^c \cap B) \ .$$

Si par hasard $\mu^*(B) = \infty$, l'inégalité est automatiquement vraie. Si au contraire $\mu^*(B) < \infty$, alors par définition de la borne inférieure, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une suite $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $B \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} C_n$ et

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(C_n) < \mu^*(B) + \varepsilon \ . \tag{16.13}$$

Étant évident qu'on a l'inclusion $C \cap B \subset \cup_{n\in\mathbf{N}}(C \cap C_n)$, la stabilité de $\mathcal{C}$ par intersection (finie) et la définition de μ^* nous donne l'inégalité

$$\mu^*(C \cap B) \leq \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(C \cap C_n) \ . \tag{16.14}$$

Un argument similaire ne s'applique pas à $\mu^*(C^c \cap B)$ car $\mathcal{C}$ n'est pas réputé être stable par complémentaire. Par contre, $C^c \cap C_n = C_n \setminus C$ est la réunion d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{C}$ par définition d'un semi-anneau :

$$\exists k_n \in \mathbf{N} \ \exists C_{n,1}, \ldots, C_{n,k_n} \in \mathcal{C} \ : \ C_n \setminus C = \bigcup_{i=1}^{k_n} C_{n,i} \ .$$

On a donc l'inclusion

$$C^c \cap B \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} (C^c \cap C_n) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{i=1}^{k_n} C_{n,i} \ .$$

La collection $\{C_{n,i} \mid n \in \mathbf{N}, 1 \le i \le k_n\}$ est donc un recouvrement dénombrable de $C^c \cap B$ par des éléments de $\mathcal{C}$. La définition de μ^* nous fournit alors l'inégalité

$$\mu^*(C^c \cap B) \le \sum_{n\in\mathbf{N}} \sum_{i=1}^{k_n} \mu(C_{n,i}) \ , \tag{16.15}$$

où on a utilisé la bijection $(n,i) \mapsto (i-1) + \sum_{j=0}^{n-1} k_j$ entre l'ensemble dénombrable $\{(n,i) \mid n \in \mathbf{N}, 1 \le i \le k_n\}$ et $\mathbf{N}$ pour énumérer le recouvrement dénombrable (on commence avec les $C_{0,i}$, $i = 1, \dots, k_0$, on poursuit avec les $C_{1,i}$ etc.). Si on prend la somme de (16.14) et (16.15) on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C^c \cap B) &\le \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(C \cap C_n) + \sum_{n\in\mathbf{N}} \sum_{i=1}^{k_n} \mu(C_{n,i}) \\ &= \sum_{n\in\mathbf{N}} \Big(\mu(C \cap C_n) + \sum_{i=1}^{k_n} \mu(C_{n,i}) \Big) \ , \end{aligned} \tag{16.16}$$

où on peut voir la (dernière) égalité comme une conséquence de [8.8] et [15.4.ii]. Maintenant on note que la réunion finie

$$C_n = (C \cap C_n) \cup (C^c \cap C_n) = (C \cap C_n) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{k_n} C_{n,i} \Big)$$

est une réunion disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$ (de nouveau par les propriétés d'un semi-anneau). L'additivité de μ nous donne alors l'égalité

$$\mu(C_n) = \mu(C \cap C_n) + \sum_{i=1}^{k_n} \mu(C_{n,i}) \ .$$

Si on combine ceci avec (16.16) et (16.13), on obtient l'inégalité

$$\mu^*(C \cap B) + \mu^*(C^c \cap B) < \mu^*(B) + \varepsilon \ .$$

Mais $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, il s'ensuit qu'on a l'inégalité voulue

$$\mu^*(B) \ge \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C^c \cap B) \ .$$

Ainsi on a montré que $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}(\mu^*)$, ce qui termine la première étape.

• Pour montrer qu'on a l'égalité $\mu^*(C) = \mu(C)$ pour tout $C \in \mathcal{C}$, on fixe $C \in \mathcal{C}$. Si on pose $C_0 = C$ et $C_n = \emptyset$ pour $n > 0$, on a évidemment $C \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} C_n$ et donc par la définition de μ^* on a l'inégalité

$$\mu^*(C) \le \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(C_n) = \mu(C) \ .$$

Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, soit $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $C \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} C_n$. Alors par sous-$\sigma$-additivité de μ on a l'inégalité

$$\mu(C) \le \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(C_n) \ .$$

$\mu(C)$ est donc un minorant de toutes les possibilités pour la valeur de $\sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(C_n)$ figurant dans la définition de $\mu^*(C)$. D'où $\mu(C) \le \mu^*(C)$. $\boxed{CQFD}$

16.17 Remarque pour les curieux. Quand on regarde bien la preuve de [16.11], on voit qu'on peut prolonger la pré-mesure μ non seulement sur la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendré par $\mathcal{C}$, mais aussi sur la tribu plus grande $\mathcal{M}(\mu^*)$. La question se pose donc de savoir s'il y a un lien entre ces deux tribus $\sigma(\mathcal{C})$ et $\mathcal{M}(\mu^*)$. Dans [24.16] on montrera que, sous l'hypothèse que μ est σ-finie sur $\mathcal{C}$, la réponse est positive : $\mathcal{M}(\mu^*)$ est la μ-complétion de $\sigma(\mathcal{C})$, ce qui veut dire à peu près qu'on rajoute tous les sous-ensembles de Ω qui sont inclus dans un élément de $\sigma(\mathcal{C})$ de μ-mesure nulle.

16.18 Application. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $(X, \mathcal{G}, \nu)$ deux espaces mesurés arbitraires. Alors il existe une mesure $\rho : \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ telle que pour tout $F \in \mathcal{F}$ et tout $G \in \mathcal{G}$ on a l'égalité*

$$\rho(F \times G) = \mu(F) \centerdot \nu(G) \ .$$

Preuve. L'idée de la preuve est de montrer que $\mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}$ est une semi-anneau et que l'application $\Phi : F \times G \mapsto \mu(F) \centerdot \nu(G)$ est une pré-mesure sur ce semi-anneau. L'existence de ρ serait alors une conséquence immédiate de [16.11].

• Soit $F_1 \times G_1$ et $F_2 \times G_2$ deux éléments de $\mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}$. Alors on a les égalités

$$\begin{aligned} &(F_1 \times G_1) \cap (F_2 \times G_2) = (F_1 \cap G_1) \times (F_2 \cap G_2) \qquad \text{et} \\ &\qquad (F_1 \times G_1) \setminus (F_2 \times G_2) = (F_1 \setminus F_2) \times G_1 \cup (F_1 \cap F_2) \times (G_1 \setminus G_2) \ . \end{aligned}$$

DESSIN

La réunion dans la deuxième égalité étant disjointe, ces égalités montrent que $\mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}$ est un semi-anneau (car on a évidemment $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}$).

• Pour montrer l'additivité de Φ, soit $F \times G, F_i \times G_i \in \mathcal{F} \divideontimes \mathcal{G}$ tels que $F \times G = \cup_{i=1}^n F_i \times G_i$ est une réunion disjointe. Alors on a

$$\begin{aligned} \mu(F) \centerdot \nu(G) &= \mu(F) \centerdot \int_X \mathbf{1}_G \,\mathrm{d}\nu = \int_X \mu(F) \centerdot \mathbf{1}_G(x) \,\mathrm{d}\nu(x) \\ &= \int_X \Big(\mathbf{1}_G(x) \centerdot \int_\Omega \mathbf{1}_F(\omega)\ \mathrm{d}\mu(\omega)\Big)\mathrm{d}\nu(x) \\ &= \int_X \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_G(x) \cdot \mathbf{1}_F(\omega)\ \mathrm{d}\mu(\omega)\Big)\mathrm{d}\nu(x) \\ &= \int_X \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_{F\times G}(\omega, x)\ \mathrm{d}\mu(\omega)\Big)\mathrm{d}\nu(x) \ . \qquad (16.19) \end{aligned}$$

Vu que la réunion $F \times G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i \times G_i$ est disjointe, on a l'égalité

$$\mathbf{1}_{F\times G} = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{F_i \times G_i} \ .$$

La formule [16.19] étant vraie aussi quand on remplace $F \times G$ par $F_i \times G_i$, on peut donc faire le calcul

$$\begin{aligned}
\mu(F) \centerdot \nu(G) &= \int_X \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_{F\times G}(\omega, x)\ \mathrm{d}\mu(\omega)\Big)\mathrm{d}\nu(x) \\
&= \int_X \Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{F_i\times G_i}(\omega, x)\ \mathrm{d}\mu(\omega)\Big)\mathrm{d}\nu(x) \\
&\overset{[8.8]}{=} \sum_{i=1}^n \int_X \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_{F_i\times G_i}(\omega, x)\ \mathrm{d}\mu(\omega)\Big)\mathrm{d}\nu(x) \\
&= \sum_{i=1}^n \mu(F_i) \centerdot \nu(G_i)\ .
\end{aligned}$$

• Pour la sous-σ-additivité de Φ on procède de la même façon. Si on a l'inclusion $F \times G \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n \times G_n$, alors on a l'inégalité

$$\mathbf{1}_{F\times G} \le \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{F_n\times G_n}\ ,$$

ce qui permet de faire le calcul

$$\begin{aligned}
\mu(F) \centerdot \nu(G) &= \int_X \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_{F\times G}(\omega, x)\ \mathrm{d}\mu(\omega)\Big)\mathrm{d}\nu(x) \\
&\overset{[7.8.\mathrm{ii}]}{\le} \int_X \Big(\int_\Omega \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{F_n\times G_n}(\omega, x)\ \mathrm{d}\mu(\omega)\Big)\mathrm{d}\nu(x) \\
&\overset{[8.9]}{=} \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_X \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_{F_n\times G_n}(\omega, x)\ \mathrm{d}\mu(\omega)\Big)\mathrm{d}\nu(x) \\
&= \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(F_n) \centerdot \nu(G_n)\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{CQFD}$

17. Mesures sur **R** et la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$

17.1 Proposition. *Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction monotone. Si $N \subset I$ désigne l'ensemble des points où f n'est pas continue, alors N contient au plus une infinité dénombrable d'éléments.*

Preuve. On fait la preuve dans le cas où f est croissante. Le cas f décroissante est complètement similaire.

Dans un premier temps on suppose que $I = [a, b]$ est un intervalle fermé et borné et on pose $\Delta = f(b) - f(a)$. Si $\Delta = 0$, la croissance de f implique que f doit être constante, et donc continue partout et le résultat est montré. Dorénavant on suppose que $\Delta > 0$. Pour chaque point $x \in [a, b]$ on considère les valeurs

$$G_x = \lim_{t \uparrow x} f(t) \qquad \text{et} \qquad D_x = \lim_{t \downarrow x} f(t) \ ,$$

les limites à gauche et à droite de f au point x. Ces limites existent toujours à cause de la croissance de f. Pour $x = a$ on pose $G_a = f(a)$ et pour $x = b$ on pose $D_b = f(b)$. La fonction f est continue au point $x \in [a, b]$ si et seulement si $G_x = D_x$, c'est-à-dire qu'on a l'égalité

$$N = \{x \in [a, b] \mid G_x < D_x\} \ .$$

Soit maintenant $n \in \mathbf{N}^*$ un entier strictement positif et supposons qu'il existent n points distincts $x_1 < \cdots < x_n$ dans $[a, b]$ tels que

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad : \quad D_{x_i} - G_{x_i} > \Delta/n \ .$$

La croissance de f implique les inégalités

$$f(a) \leq G_{x_1} \leq D_{x_1} \leq G_{x_2} \leq D_{x_2} \leq \cdots \leq D_{x_n} \leq f(b) \ .$$

On a donc l'égalité

$$f(b) - f(a) = \big(G_{x_1} - f(a)\big) + \sum_{i=1}^{n} \big(D_{x_i} - G_{x_i}\big) + \sum_{i=1}^{n-1} \big(G_{x_{i+1}} - D_{x_i}\big) + \big(f(b) - D_{x_n}\big) \ .$$

Vu que tous les termes dans cette somme sont positifs, on en déduit l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} \big(D_{x_i} - G_{x_i}\big) \leq \Delta \ ,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse sur les points x_i qui nous donne l'inégalité contraire

$$\sum_{i=1}^{n} \big(D_{x_i} - G_{x_i}\big) > \sum_{i=1}^{n} \Delta/n = \Delta \ .$$

Il est donc impossible qu'il existe n tels points. Si on définit l'ensemble N_n comme

$$N_n = \{x \in [a, b] \mid D_x - G_x > \Delta/n\} \ ,$$

alors le raisonnement précédent dit que N_n contient moins que n éléments ; en particulier N_n contient un nombre fini d'éléments. Maintenant on constate que l'ensemble N s'écrit comme

$$\begin{aligned} N &= \{x \in [a, b] \mid f \text{ n'est pas continue en } x\} = \{x \in [a, b] \mid D_x - G_x > 0\} \\ &= \{x \in [a, b] \mid \exists n \in \mathbf{N}^* : D_x - G_x > \Delta/n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \ . \end{aligned}$$

L'ensemble N est donc la réunion dénombrable d'ensemble finis, donc N contient au plus un nombre dénombrable d'éléments.

Si I n'est pas un intervalle fermé et borné, il s'écrit quand même comme une réunion dénombrable de tels intervalles. Par exemple $]a,b] = \cup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n},b]$ ou $\mathbf{R} = \cup_{n=1}^{\infty}[-n,n]$. Si $I = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ est l'écriture de l'intervalle I comme une réunion dénombrable d'intervalles fermés et bornés I_n, alors le raisonnement précédent montre que l'intersection $N \cap I_n$ contient au plus un nombre dénombrable d'éléments. Donc

$$N = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} N \cap I_n$$

contient au plus un nombre dénombrable d'éléments comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. $\boxed{CQFD}$

17.2 Proposition/Définition. *Soit $\mathcal{P}a(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ la collection des pavés semi-ouverts à gauche :*

$$\mathcal{P}a(\mathbf{R}^d) = \Big\{ \prod_{i=1}^{d} \,]a_i, b_i\,] \mid \forall 1 \le i \le d : a_i, b_i \in \mathbf{R}, a_i \le b_i \Big\} \ .$$

Alors $\mathcal{P}a(\mathbf{R}^d)$ est un semi-anneau et en particulier un π-système.

Preuve. Pour montrer que $\mathcal{P}a(\mathbf{R}^d)$ est un semi-anneau on vérifie les conditions. L'ensemble vide appartient à $\mathcal{P}a(\mathbf{R}^d)$ car $\emptyset = \prod_{i=1}^{d}\,]a,a\,]$. Si on a deux intervalles semi-ouverts à gauche $]a,b\,]$ et $]a',b'\,]$, alors leurs intersection est donnée par

$$]a,b\,] \cap\,]a',b'\,] = \,]\max(a,a'),\min(b,b')\,] \ ,$$

qui est de nouveau un intervalle semi-ouvert à gauche. Il s'ensuit que $\mathcal{P}a(\mathbf{R})$ est stable par intersection. Le cas $d > 1$ s'en déduit immédiatement avec la formule

$$\Big(\prod_{i=1}^{d} A_i\Big) \cap \Big(\prod_{i=1}^{d} B_i\Big) = \prod_{i=1}^{d}(A_i \cap B_i) \ ,$$

valable pour des sous-ensembles $A_i, B_i \subset \mathbf{R}$ quelconques.

Pour la différence on procède par récurrence sur d. Pour $d = 1$, prenons deux intervalles $]a,b\,]$ et $]a',b'\,]$ pour lesquelles on a les égalités

$$]a,b\,] \setminus\,]a',b'\,] = \begin{cases}]\max(a,b'),b\,] & \text{si } a' \le a, \\ ]a,\min(a',b)\,] & \text{si } b \le b', \\ ]a,a'\,] \cup\,]b',b\,] & \text{si } a < a' \le b' < b. \end{cases}$$

On en déduit que la différence de deux éléments de $\mathcal{P}a(\mathbf{R})$ est dans tous les cas une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{P}a(\mathbf{R})$. Supposons donc que c'est vrai en dimension d (c'est-à-dire que la différence de deux éléments de $\mathcal{P}a(\mathbf{R}^d)$ est une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{P}a(\mathbf{R}^d)$) et regardons deux éléments $A, A' \in \mathcal{P}a(\mathbf{R}^{d+1})$. Alors il existe $B, B' \in \mathcal{P}a(\mathbf{R}^d)$ et $]a,b\,],]a',b'\,] \in \mathcal{P}a(\mathbf{R})$ tels que

$$A = B \times\,]a,b\,] \qquad \text{et} \qquad A' = B' \times\,]a',b'\,] \ .$$

En toute généralité on a l'égalité

$$(X \times Y) \setminus (X' \times Y') = (X \setminus X') \times Y \cup (X \cap X') \times (Y \setminus Y') \quad \text{une réunion disjointe,}$$

DESSIN

ce qui donne

$$A \setminus A' = (B \setminus B') \times \,]a,b] \cup (B \cap B') \setminus (\,]a,b] \setminus \,]a',b']) \quad \text{une réunion disjointe.}$$

Par l'hypothèse de récurrence $B \setminus B'$ est une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{P}a(\mathbf{R}^d)$ et $]a,b] \setminus \,]a',b']$ est une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{P}a(\mathbf{R})$. Il s'ensuit que $A \setminus A'$ est une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{P}a(\mathbf{R}^{d+1})$. Ainsi s'achève la preuve par récurrence, ce qui termine la preuve que $\mathcal{P}a(\mathbf{R}^d)$ est une semi-anneau. $\boxed{CQFD}$

17.3 Théorème. *Soit* $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *une fonction croissante admettant des limites à droite :* $\forall x_o \in \mathbf{R} : \lim_{x \downarrow x_o} f(x) = f(x_o)$. *Soit* $\mathcal{C} = \mathcal{P}a(\mathbf{R})$ *le semi-anneau des intervalles semi-ouverts à gauche [17.2]. Alors la fonction* $\lambda_F : \mathcal{C} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *définie par*

$$\lambda_F(\,]a,b]) = F(b) - F(a)$$

est une pré-mesure sur $\mathcal{P}a(\mathbf{R})$.

Preuve. • Pour montrer l'additivité de λ_F, on suppose que $]a,b] = \cup_{i=1}^n \,]a_i,b_i]$ est une réunion disjointe et on montre l'égalité $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n \big(F(b_i) - F(a_i)\big)$, ce qu'on fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$ la formule est évidente. Supposons donc qu'elle est vraie au rang n et soit $]a,b] = \cup_{i=1}^{n+1} \,]a_i,b_i]$ une réunion disjointe. Par hypothèse $b \in \,]a,b] = \cup_{i=1}^{n+1} \,]a_i,b_i]$, donc il existe $1 \leq j \leq n+1$ tel que $b \in \,]a_j,b_j]$. Mais $]a_j,b_j] \subset \,]a,b]$ donc forcément $b = b_j$. On a donc la réunion disjointe

$$]a,b] = \big(\bigcup_{1 \leq i \leq n+1, i \neq j}]a_i,b_i] \big) \cup \,]a_j,b] \ .$$

On en déduit l'égalité

$$]a,a_j] = \bigcup_{1 \leq i \leq n+1, i \neq j}]a_i,b_i] \ .$$

Mais ceci est une réunion disjointe de n éléments, donc par hypothèse de récurrence on a

$$F(a_j) - F(a) = \sum_{1 \leq i \leq n+1, i \neq j} \big(F(b_i) - F(a_i)\big) \ .$$

On a donc

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(b_j) - F(a_j) + F(a_j - F(a) \\ &= \big(F(b_j) - F(a_j)\big) + \sum_{1 \leq i \leq n+1, i \neq j} \big(F(b_i) - F(a_i)\big) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n+1} \big(F(b_i) - F(a_i)\big) \ . \end{aligned}$$

• Avant de montrer la sous-σ-additivité de λ_F on montre d'abord la sous-additivité :

$$]a,b] \subset \bigcup_{i=1}^n]a_i,b_i] \qquad \Longrightarrow \qquad F(b)-F(a) \le \sum_{i=1}^n \big(F(b_i)-F(a_i)\big) \ .$$

Pour cela on définit l'ensemble K comme l'ensemble des extrémités des intervalles concernés :

$$K = \{a, b, a_i, b_i \mid i = 1, \ldots, n\} \ .$$

L'ensemble K contient $k \le 2n+2$ éléments : $K = \{c_j \mid 1 \le j \le k\}$. On suppose que les c_j sont mis dans l'ordre : $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$. Par construction il existe $d_o, f_o, d_i, f_i \in \{1, \ldots, k\}$ avec $i = 1, \ldots, n$ (d pour début et f pour fin) tels que

$$a = c_{d_o} \qquad , \qquad b = c_{f_o} \qquad , \qquad a_i = c_{d_i} \qquad \text{et} \qquad b_i = c_{f_i} \ .$$

Il est évident qu'on a $d_o < f_o$ et $d_i < f_i$ pour tout $1 \le i \le n$. On a donc les égalités

(17.4) $$]a,b] = \bigcup_{d_o \le j < f_o}]c_j, c_{j+1}] \qquad \text{et} \qquad]a_i,b_i] = \bigcup_{d_i \le j < f_i}]c_j, c_{j+1}] \ .$$

Pour simplifier les notations, on note pour $p, q \in \mathbf{N}$ l'ensemble $\{i \in \mathbf{N} \mid p \le i < q\}$ par $[\![p, q [\![$. On veut maintenant montrer que pour tout j vérifiant $j_o \le j < \ell_o$ il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $j_i \le j < \ell_i$. Ceci veut dire en particulier que tout intervalle $]c_j, c_{j+1}]$ figurant dans la réunion de $]a,b]$ est inclus dans un intervalle $]a_i, b_i]$. Si on pense à l'inclusion $]a,b] \subset \cup_{i=1}^n]a_i,b_i]$, ceci paraît évident, mais donnons une preuve rigoureuse. Des inclusions

$$]c_j, c_{j+1}] \subset]a,b] \subset \bigcup_{i=1}^n]a_i, b_i]$$

on déduit qu'il existe $1 \le i \le n$ tel que $c_{j+1} \in]a_i, b_i]$. De (17.4) on déduit l'existence d'un $k \in [\![d_i, f_i [\![$ tel que $c_{j+1} \in]c_k, c_{k+1}]$. Vu que les c_j forment une suite strictement croissante, il s'ensuit que $c_{j+1} = c_{k+1}$ et donc $j = k$. Ainsi on a montré l'inclusion

(17.5) $$[\![d_o, f_o [\![\subset \bigcup_{i=1}^n [\![d_i, f_i [\![\ .$$

Par la croissance de F (qui implique qu'on a toujours $F(c_{j+1}) - F(c_j) \ge 0$) on peut donc faire le calcul :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{j \in [\![d_o, f_o [\![} \big(F(c_{j+1}) - F(c_j)\big) \le \sum_{j \in \bigcup_{i=1}^n [\![d_i, f_i [\![} \big(F(c_{j+1}) - F(c_j)\big) \\ &\le \sum_{i=1}^n \sum_{j \in [\![d_i, f_i [\![} \big(F(c_{j+1}) - F(c_j)\big) = \sum_{i=1}^n \big(F(b_i) - F(a_i)\big) \ , \end{aligned}$$

où la première inégalité est une conséquence du fait que l'inclusion (17.5) peut ne pas être une égalité et où la deuxième inégalité est une conséquence du fait qu'on ne peut pas affirmer que la réunion dans (17.5) est disjointe : un $j \in [\![d_o, f_o [\![$ peut appartenir à plusieurs $[\![d_i, f_i [\![$.

• Pour la sous-σ-additivité on suppose qu'on a l'inclusion $]\,a, b\,] \subset \cup_{n\in\mathbf{N}} \,]\,a_n, b_n\,]$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$ arbitraire. L'idée de la preuve est de choisir, par un argument de compacité, un nombre $N \in \mathbf{N}$ (qui dépendra de ε) tel qu'on aura

$$F(b) - F(a) \le 2\varepsilon + \sum_{n=0}^{N} \big(F(b_n) - F(a_n)\big) \ .$$

On aura donc aussi l'inégalité

$$F(b) - F(a) \le 2\varepsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \big(F(b_n) - F(a_n)\big) \ .$$

Vu que $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on aura montré la sous-σ-additivité.

Pour trouver ce N, on commence à invoquer la continuité à droite de F en a :

$$\exists \delta_a > 0 \ \forall a \le x < a + \delta_a : 0 \le F(x) - F(a) < \varepsilon \ ,$$

où on a aussi utilisé la croissance de F pour remplacer l'inégalité $|F(x) - F(a)| < \varepsilon$ par $0 \le F(x) - F(a) < \varepsilon$. De la même manière on invoque la continuité à droite de F en b_n :

$$\exists \delta_{b_n} > 0 \ \forall b_n \le x < b_n + \delta_{b_n} : 0 \le F(x) - F(b_n) < 2^{-n-1} \cdot \varepsilon \ .$$

On choisit maintenant $a' \in \,]\,a, b\,] \cap [\,a, a + \delta_a\,[$ et on constate qu'on a les inclusions

$$[\,a', b\,] \subset \,]\,a, b\,] \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \,]\,a_n, b_n\,] \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \,]\,a_n, b_n + \tfrac{1}{2}\delta_{b_n}\,[\ .$$

L'intervalle fermé $[\,a', b\,]$ (un compact) est donc inclus dans une réunion d'intervalles ouverts (les $]\,a_n, b_n + \frac{1}{2}\delta_{b_n}\,[$). On peut donc extraire de ce recouvrement un recouvrement *fini*, c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel qu'on a l'inclusion

$$[\,a', b\,] \subset \bigcup_{n=0}^{N} \,]\,a_n, b_n + \tfrac{1}{2}\delta_{b_n}\,[\ .$$

On a donc de surcroît l'inclusion

$$]\,a', b\,] \subset \bigcup_{n=0}^{N} \,]\,a_n, b_n + \tfrac{1}{2}\delta_{b_n}\,] \ ,$$

ce qui permet avec la sous-additivité montré ci-dessus de faire le calcul :

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &< \varepsilon + F(b) - F(a') \\
&\le \varepsilon + \sum_{n=0}^{N} \big(F(b_n + \tfrac{1}{2}\delta_{b_n}) - F((a_n)\big) \\
&< \varepsilon + \sum_{n=0}^{N} \big(F(b_n) + 2^{-n-1} \cdot \varepsilon - F((a_n)\big) \\
&< \varepsilon + \varepsilon \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \ + \sum_{n=0}^{N} \big(F(b_n) - F((a_n)\big) \\
&= 2\varepsilon + \sum_{n=0}^{N} \big(F(b_n) - F((a_n)\big) \ .
\end{aligned}$$

On a donc trouvé le N voulu, ce qui termine la preuve. $\boxed{CQFD}$

17.6 Remarque. • Si on regarde bien la preuve de [17.3], on s'aperçoit que pour montrer l'additivité de λ_F on n'utilise aucune des hypothèses sur F, que pour montrer la sous-additivité on utilise la croissance de F et que pour montrer la sous-σ-additivité on a besoin de la croissance (car on utilise la sous-additivité) et de la continuité à droite de F.

→ **17.7 Exercice.** Donner un exemple d'une fonction $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pour laquelle la sous-additivité de λ_F n'est pas vraie en général et donner un exemple d'une fonction croissante $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que la sous-σ-additivité de λ_F n'est pas vraie en général.

17.8 Définition. Soit $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction croissante admettant des limites à droite et soit $\lambda_F : \mathcal{P}a(\mathbf{R}) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ la pré-mesure définie en [17.3]. Le prolongement de cette pré-mesure en une mesure $\lambda_F : \sigma(\mathcal{P}a(\mathbf{R})) = \mathcal{B}(\mathbf{R})$ [16.11] est appelé *la mesure de Stieltjes associée à la fonction F.*

17.9 Proposition. *Soit $F, G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fonction croissantes admettant des limites à droite et soit λ_F et λ_G les mesures de Stieltjes sur $\mathbf{R}$ associées. Alors $\lambda_F = \lambda_G$ si et seulement si il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $G = F + c$.*

De plus, pour tout $a, b \in \mathbf{R}$ on a $\lambda_F(\,]a, b]\,) < \infty$. En particulier λ_F est σ-finie sur le π-système $\mathcal{P}a(\mathbf{R})$ des intervalles semi-ouverts à gauche.

Réciproquement, si μ est une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ telle que $\mu(\,]a, b]\,) < \infty$ pour tout $a, b \in \mathbf{R}$, alors la fonction $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \mu(\,]0, x]\,) & x \geq 0 \\ -\mu(\,]x, 0]\,) & x \leq 0 \end{cases}$$

est croissante admettant des limites à droites et on a l'égalité $\mu = \lambda_F$.

Preuve. $\boxed{CQFD}$

17.10 Exemple. Soit $E : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction "partie entière" : $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x ; elle est croissante admettant des limites à droite. Si on réfléchit un peu, on s'aperçoit vite qu'on a la formule

$$\lambda_E(\,]a, b]) = \#(\,]a, b] \cap \mathbf{Z})$$

le nombre d'entiers (relatifs) contenu dans l'intervalle $]a, b]$. En invoquant le théorème sur l'unicité de mesures [11.11] avec le π-système $\mathcal{P}a(\mathbf{R})$ d'intervalles semi-ouverts à gauche on démontre que la mesure de Stieltjes associée à la fonction E est la mesure de comptage sur les entiers relatifs :

$$\lambda_E = C_{\mathbf{Z}}\ .$$

→ **17.11 Exercice.** Soit $F, G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fonctions croissantes admettant des limites à droite et soit $a, b \in \mathbf{R}_+$ deux nombres positifs. Montrer que la fonction $H = a \cdot F + b \cdot G$ est aussi croissante admettant des limites à droite et qu'on a l'égalité (entre mesures)

$$\lambda_H = a \centerdot \lambda_F + b \centerdot \lambda_G \ .$$

17.12 Proposition/Définition. *Il existe une unique mesure sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$, notée λ^d et appelée* la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$*, qui reproduit le volume d'un pavé semi-ouvert à gauche :*

$$\lambda^d\Big(\prod_{i=1}^{d} \,]\, a_i, b_i \,]\Big) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i) \qquad \textit{pour tout } a_i, b_i \in \mathbf{R} \textit{ avec } a_i < b_i.$$

La mesure de Lebesgue est σ-finie sur le π-système $\mathcal{P}a(\mathbf{R}^d)$ des pavés semi-ouverts à gauche.

Preuve. $\boxed{CQFD}$

17.13 Corollaire. $\lambda^p \otimes \lambda^q = \lambda^{p+q}$.

Preuve. $\boxed{CQFD}$

→ **17.14 Lemme.** *Pour tout $A = \prod_{i=1}^{d} \,]\, a_i, b_i \,] \subset \mathbf{R}^d$ (avec $a_i \le b_i$) on a les égalités*

$$\lambda^d\Big(\prod_{i=1}^{d} \,]\, a_i, b_i \,[\, \Big) = \lambda^d\Big(\prod_{i=1}^{d} \,]\, a_i, b_i \,]\, \Big) = \lambda^d\Big(\prod_{i=1}^{d} \,[\, a_i, b_i \,]\, \Big) \ ,$$

c'est-à-dire $\lambda^d(A^\circ) = \lambda^d(A) = \lambda^d(\overline{A}\,)$.

→ **17.15 Corollaire.** *Si $A \subset \mathbf{R}^d$ est dénombrable, alors $\lambda^d(A) = 0$.*

17.16 Exemple (l'ensemble de Cantor). L'ensemble de Cantor C, un sous ensemble de l'intervalle $[\,0, 1\,] \subset \mathbf{R}$, est le plus fameux exemple d'un ensemble (fermé) de mesure de Lebesgue nulle qui n'est pas dénombrable. Il sert souvent comme contre-exemple pour des généralisations hâtives. La définition/construction de C est récursive. On construit par récurrence une suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en commençant par $A_0 = [\,0, 1\,]$ telle que A_n est une réunion disjointe de 2^n intervalles fermés. Si on connaît A_n, on construit A_{n+1} comme suit. Chaque intervalle fermé $[a,b]$ dans A_n est coupé en trois parts égales, et on enlève la partie (ouverte) au milieu. A_{n+1} est la réunion des morceaux restants. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
A_0 &= [0,1] \\
A_1 &= [\tfrac{0}{3},\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},\tfrac{3}{3}] \\
A_2 &= [\tfrac{0}{3^2},\tfrac{1}{3^2}] \cup [\tfrac{2}{3^2},\tfrac{3}{3^2}] \cup [\tfrac{6}{3^2},\tfrac{7}{3^2}] \cup [\tfrac{8}{3^2},\tfrac{9}{3^2}] \\
A_3 &= [\tfrac{0}{3^3},\tfrac{1}{3^3}] \cup [\tfrac{2}{3^3},\tfrac{3}{3^3}] \cup [\tfrac{6}{3^3},\tfrac{7}{3^3}] \cup [\tfrac{8}{3^3},\tfrac{9}{3^3}] \cup [\tfrac{18}{3^3},\tfrac{19}{3^3}] \\
&\qquad \cup [\tfrac{20}{3^3},\tfrac{21}{3^3}] \cup [\tfrac{24}{3^3},\tfrac{25}{3^3}] \cup [\tfrac{26}{3^3},\tfrac{27}{3^3}] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

DESSIN

L'ensemble de Cantor C est l'intersection (limite) des A_n : $C = \cap_{n\in\mathbf{N}} A_n$. Par construction on a $\lambda^1(A_{n+1}) = \frac{2}{3}\cdot\lambda^1(A_n)$ et $\lambda^1(A_0) = 1$. Par [6.11] on en déduit que $\lambda^1(C) = \lim_{n\to\infty}\lambda^1(A_n) = \lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n = 0$.

Pour voir que C contient un nombre non-dénombrable d'éléments, on considère l'ensemble T des suites à valeurs dans l'ensemble à trois éléments $\{0,1,2\}$:

$$T = \{(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \mid \forall n\in\mathbf{N} : a_n \in \{0,1,2\}\} .$$

Sur T on définit l'application $S : T \to [0,1]$ par

$$S((a_n)_{n\in\mathbf{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n+1}} .$$

L'application S est surjective ; elle est presque une bijection : on interprète la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in T$ comme le développement ternaire du nombre $S((a_n)_{n\in\mathbf{N}}) \in [0,1]$. Mais comme pour le développement décimal, il y a des doublures dans ces suites ternaires. Par exemple les deux suites $(0,2,2,2,2,\dots)$ et $(1,0,0,0,0,\dots)$ représentent le nombre $1/3$. Plus généralement, si à partir d'un certain rang la suite est constante égale à 2, son image par S (le nombre dans $[0,1]$ représenté par la suite) est le même que l'image de l'élément qu'on obtient en augmentant de 1 le dernier terme non-égale à 2 et en mettant que des 0 après.

Il n'est pas très difficile de voir qu'on a les égalités

$$\begin{aligned}
[0,\tfrac{1}{3}] &= S\big(\ \{(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in T \mid a_0 = 0\}\ \big) \\
[\tfrac{2}{3},1] &= S\big(\ \{(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in T \mid a_0 = 2\}\ \big) \\
[0,\tfrac{1}{3^2}] &= S\big(\ \{(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in T \mid a_0 = a_1 = 0\}\ \big) \\
[\tfrac{2}{3^2},\tfrac{1}{3}] &= S\big(\ \{(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in T \mid a_0 = 0, a_1 = 2\}\ \big) \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Inspiré par cette observation, on peut montrer par récurrence qu'on a l'égalité

$$A_n = S\big(\ \{(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in T \mid \forall 0 \le i < n : a_i \ne 1\}\ \big) .$$

On en déduit (mais ce n'est pas une évidence !) que C est l'image par S de l'ensemble D définie comme

$$D = \{ (a_n)_{n\in \mathbf{N}} \in T \mid \forall n \in \mathbf{N} : a_n \neq 1 \} ,$$

c'est-à-dire l'ensemble de toutes les suites à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 2\}$. De plus, on peut montrer que S est injective sur D, ce qui montre que C et D ont le même nombre d'éléments. Vu que D contient un nombre non-dénombrable d'éléments, la même chose est vraie pour C.

→ **17.17 Exercice (développement ternaire).** Soit $S : T \to [\,0,1\,]$ l'application définie dans [17.16] et soient $A_n \subset [\,0,1\,]$, $n \in \mathbf{N}$ et $D \subset T$ les ensembles définis dans [17.16].

(i) Montrer que S est surjective.

(ii) Soit $T' \subset T$ l'ensemble des suites qui n'ont pas une queue constante 2 :

$$T' = \{ (a_n)_{n\in \mathbf{N}} \in T \mid \forall N \in \mathbf{N}\ \exists n \geq N : a_n \neq 2 \} .$$

Montrer que S est injective sur T' et que $S(T') = [\,0,1\,[$.

(iii) Montrer que le complémentaire $T \setminus T'$ est dénombrable en l'écrivant comme une réunion dénombrable d'ensembles finis.

(iv) Montrer par récurrence l'égalité

$$A_n = S\big(\ \{ (a_n)_{n\in \mathbf{N}} \in T \mid \forall 0 \leq i < n : a_i \neq 1 \}\ \big) .$$

(v) Montrer qu'on a l'égalité $C = S(D)$.

(vi) Montrer que S est injective sur D.

17.18 Exemple (l'ensemble de Cantor modifié). Si on regarde la construction de l'ensemble de Cantor, on voit qu'on commence avec un intervalle, on enlève une partie au milieu, c'est-à-dire qu'on fait un trou dans l'intervalle, et on continue à faire des trous dans les intervalles qui en résultent. Le résultat final C est donc "plein de trous" et a une mesure de Lebesgue nulle. On peut modifier la construction d'une telle façon qu'on fait toujours des trous, mais que le résultat a une mesure positive.

Pour bien comprendre la modification, revenons sur la construction de l'ensemble de Cantor. Au stade n on a un ensemble A_n qui est la réunion disjointe de 2^n intervalles fermés de longueur 3^{-n}. À chacun de ces intervalles on enlève au milieu une partie de longuer $3^{-(n+1)}$. Au stade $n+1$ on a donc 2^{n+1} intervalles fermés de longueur $\frac{1}{2}(3^{-n} - 3^{-(n+1)}) = 3^{-(n+1)}$. Et on continue. La modification consiste à changer la longueur de la partie qu'on enlève au milieu des intervalles.

On commence donc avec l'ensemble $A_0 = [\,0,1\,]$ qui est un intervalle fermé. Si au stade n on a l'ensemble A_n qui est la réunion disjointe de 2^n intervalles fermés de même longueur, on enlève à chaque intervalle un morceau ouvert de longeur $\frac{1}{3} \cdot 4^{-n}$ du milieu, coupant l'intervalle en deux intervalles fermés de même longueur. Ainsi on obtient au stade $n+1$ un ensemble A_{n+1} qui est la réunion disjointe de 2^{n+1} intervalles fermés de même longueur. Il est immédiat qu'au stade n on enlève de A_n un ensemble qui a une mesure de Lebesgue $2^n \cdot \frac{1}{3} \cdot 4^{-n}$. Il est aussi immédiat que la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante. De plus, on montre facilement par récurrence qu'au stade n la longueur des intervalles ℓ vérifie les inégalités

$$3^{-n} \le \ell \le 2^{-n} \ ,$$

ce qui montre que la longueur des intervalles tend vers 0 et qu'on peut bien enlever un morceau de longueur $\frac{1}{3} \cdot 4^{-n}$. On définit l'ensemble de Cantor modifié $C' \subset \mathbf{R}$ comme l'intersection (la limite) des A_n : $C' = \cap_{n\in\mathbf{N}} A_n$. Par construction on a les égalités

$$\lambda(A_0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda(A_{n+1}) = \lambda(A_n) - 2^n \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 4^{-n} \ ,$$

d'où par récurrence $\lambda(A_n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3} \cdot 2^{-k}$. Il s'ensuit qu'on a

$$\lambda(C') = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{3} \cdot 2^{-k} = \tfrac{1}{3} \ .$$

L'ensemble C' est donc (comme l'ensemble de Cantor C) "plein de trous," ne contient aucun intervalle avec une mesure positive et a une mesure positive de $\frac{1}{3}$.

17.19 Exemple. Dans [16.4] on a discuté l'origine du nom "mesure extérieure" comme la "mesure" obtenue par approximations de l'extérieur (voir aussi [17.20]) et on a suggéré qu'une approximation par l'intérieur n'était pas très efficace. Un exemple très simple pour montrer cette affirmation est l'ensemble $A = [\,0,1\,] \setminus \mathbf{Q}$ des réels entre 0 et 1 sans les rationnels. Vu que $[\,0,1\,] \cap \mathbf{Q}$ est dénombrable, on a $\lambda([\,0,1\,] \cap \mathbf{Q}) = 0$ et donc $\lambda(A) = \lambda([\,0,A\,]) - \lambda([\,0,1\,] \cap \mathbf{Q}) = 1$. Mais A ne contient aucun intervalle avec une mesure positive, car une tel intervalle contient forcément des rationnels. On aura donc

$$\sup \Big\{ \sum_{n\in\mathbf{N}} \lambda(I_n) \mid \bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n \subset A \text{ et } \forall n \in \mathbf{N} : \ I_n \text{ un intervalle} \Big\} = 0 \ .$$

On n'arrive donc pas à approcher la vraie mesure de A par une somme de mesures d'intervalles compris dans A. L'ensemble C' de [17.18] est un exemple un petit peu plus sophistiqué qui montre la même chose, car comme l'ensemble A il a une mesure positive mais ne contient aucun intervalle avec une mesure positive.

17.20 Proposition. *La mesure de Lebesgue λ^d sur $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B})$ est donnée par la formule*

$$\lambda^d(A) = \inf \Big\{ \sum_{n\in\mathbf{N}} \lambda^d(C_n) \mid A \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} C_n \ \textit{ et } \ \forall n \in \mathbf{N} : C_n \in \mathcal{P}a(\mathbf{R}^d) \ \Big\} \ .$$

En toutes lettres : pour calculer $\lambda^d(A)$ on recouvre A par une famille dénombrable de pavés (dans $\mathcal{P}a(\mathbf{R}^d)$, c'est-à-dire semi-ouverts à gauche), on calcule la somme des volumes de ces pavés et on prend la borne inférieure de toutes ces valeurs obtenues ainsi.

Preuve. $\boxed{CQFD}$

17.21 Proposition. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $f : \Omega \to \mathbf{R}_+$ une fonction mesurable positive et soit*

$$H_f = \{ (\omega, t) \in \Omega \times \mathbf{R} \mid 0 \le t \le f(\omega) \}$$

son hypographe, c'est-à-dire l'ensemble en dessous du graphe de f. Alors la μ-intégrale de f est égale à la $\mu \otimes \lambda^1$-mesure de H_f :

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = (\mu \otimes \lambda^1)(H_f) \ .$$

Preuve. Pour que l'énoncé ait un sens, il faut d'abord montrer que H_f appartient à $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R})$. Pour cela on considère l'application $F : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$F(\omega, t) = (f(\omega), t) \ ,$$

ainsi que l'ensemble fermé $T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le y \le x\}$. Il est immédiat que $H_f = F^{-1}(T)$ et que T, étant fermé, est un borélien de $\mathbf{R}^2$. Il suffit donc de montrer que F est mesurable pour pouvoir conclure que H_f l'est. Pour un pavé $]\,a_1, b_1\,] \times \,]\,a_2, b_2\,] \subset \mathbf{R}^2$ on a

$$F^{-1}(\,]\,a_1, b_1\,] \times \,]\,a_2, b_2\,]\,) = f^{-1}(\,]\,a_1, b_1\,]\,) \times \,]\,a_2, b_2\,] \in \mathcal{F} \circledast \mathcal{B}(\mathbf{R}^2) \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^2) \ ,$$

où on a utilisé la mesurabilité de f. Par [1.23] et [3.4] on en déduit que F est mesurable, et donc que H_f est mesurable.

Si on substitue maintenant l'égalité

$$f(\omega) = \lambda^1(\,[\,0, f(\omega)\,]\,) = \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{[\,0, f(\omega)\,]} \,\mathrm{d}\lambda^1$$

dans $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ on peut faire le calcul suivant avec le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(\omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega) &= \int_\Omega \Big(\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{[\,0, f(\omega)\,]}(t) \ \mathrm{d}\lambda^1(t) \Big) \mathrm{d}\mu(\omega) \\ &\overset{[13.1]}{=} \int_{\Omega \times \mathbf{R}} \mathbf{1}_{[\,0, f(\omega)\,]}(t) \,\mathrm{d}(\mu \otimes \lambda^1)(\omega, t) \\ &= \int_{\Omega \times \mathbf{R}} \mathbf{1}_{H_f} \,\mathrm{d}(\mu \otimes \lambda^1) = (\mu \otimes \lambda^1)(H_f) \ , \end{aligned}$$

où on a utilisé l'égalité $\mathbf{1}_{[\,0, f(\omega)\,]}(t) = \mathbf{1}_{H_f}(\omega, t)$. $\boxed{CQFD}$

→ **17.22 Proposition.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $f : \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable et soit*

$$G_f = \{ (\omega, f(\omega)) \in \Omega \times \mathbf{R} \mid \omega \in \Omega \}$$

son graphe. Alors $\mu \otimes \lambda^1(G_f) = 0$.

18. L'intégrale de Riemann versus celle de Lebesgue

18.1 Définitions. • Soit $I = [a,b] \subset \mathbf{R}$ un intervalle fermé et soit $a = x_0 < x_1 \cdots x_{n-1} < x_n = b$ $n+1$ points distincts. L'ensemble D défini comme

$$D = \{ [x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n] \} = \{I_1, \dots, I_n\}$$

consiste en n intervalles fermés $I_1, \dots, I_n$ avec les propriétés que leur réunion fasse I et que leurs intérieurs soient deux à deux disjoints : $i \neq j \Rightarrow I_i^\circ \cap I_j^\circ = \emptyset$. On l'appelle une *subdivision élémentaire de I*.

• Soit maintenant $P = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i] \subset \mathbf{R}^d$ un pavé fermé et supposons que pour chaque $i = 1, \dots, d$ on a une subdivision élémentaire $D^{(i)}$ de l'intervalle $[a_i, b_i]$. L'ensemble D défini comme

$$\begin{aligned} D = D^{(1)} \divideontimes \cdots \divideontimes D^{(d)} &= \{ A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d \mid A_i \in D^{(i)} \} \\ &= \Big\{ \prod_{i=1}^d [x^{(i)}_{j_i - 1}, x^{(i)}_{j_i}] \mid 1 \leq j_i \leq n_i, 1 \leq i \leq d \Big\} \end{aligned}$$

est appelé une *subdivision élémentaire du pavé P*. Ses éléments sont des pavés fermés de réunion P et d'intérieurs deux à deux disjoints.

DESSIN

Associé à une subdivision élémentaire D du pavé P on définit la collection $\widetilde{D}$ par

$$\widetilde{D} = \{A^\circ \mid A \in D\} \cup \{P \setminus (\bigcup_{A \in D} A^\circ)\}$$

qui contient les intérieurs des pavés dans D ainsi que ce qui reste quand on enlève tous ces intérieurs du pavé complet P. Par définition d'une subdivision élémentaire, les éléments de $\widetilde{D}$ sont deux à deux disjoints et de réunion P. De plus, ces ensembles sont des Boréliens (les intérieurs sont des ouverts par définition et le reste est un fermé) ; la collection $\widetilde{D}$ est donc un cas particulier de la définition d'une subdivision [5.1] pour l'espace mesurable $(P, \mathcal{B})$.

• Une fonction $h : P \to \mathbf{R}$ est appelée une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision élémentaire D de P telle que h soit constante sur chaque élément de la subdivision associée $\widetilde{D}$:

$$\forall A \in \widetilde{D} \ \exists c_A \in \mathbf{R} \ \forall x \in A : h(x) = c_A \ .$$

Comme pour les fonctions étagées on notera la valeur c_A comme $h\langle A \rangle$. On peut donc écrire $h = \sum_{A \in \widetilde{D}} h\langle A \rangle \cdot \mathbf{1}_A$. Une fonction en escalier h est donc un cas particulier d'une fonction étagée (sur l'espace mesurable $(P, \mathcal{B})$). Étant donné que P est borné, il est facile de voir que h est λ-intégrable et que son intégrale $\int_P h \, \mathrm{d}\lambda$ est donnée par la formule

$$h = \sum_{A \in \widetilde{D}} h\langle A \rangle \cdot \mathbf{1}_A|_P \qquad \Longrightarrow \qquad \int_P h \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{A \in D} h\langle A^\circ \rangle \cdot \prod_{i=1}^d (b_i - a_i) \ .$$

Le fait que le complémentaire $P \setminus (\cup_{A\in D})$ n'apparaît pas dans le résultat pour $\int_P h\,\mathrm{d}\lambda$ est une conséquence directe de [17.14] et l'égalité

$$P \setminus (\bigcup_{A\in D}) = \bigcup_{A\in D} (A \setminus A^\circ) \ .$$

• Si $f : P \to \mathbf{R}$ est une fonction, on définit les ensembles $\mathcal{E}_f^\pm$ comme

$$\mathcal{E}_f^+ = \{h : P \to \mathbf{R} \mid h \text{ une fonction en escalier et } h \geq f\} \ ,$$
$$\mathcal{E}_f^- = \{h : P \to \mathbf{R} \mid h \text{ une fonction en escalier et } h \leq f\} \ .$$

Notons qu'il est bien possible que l'un ou l'autre de ces ensembles soit vide, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de fonctions en escalier h qui vérifient l'une des inégalités $h \leq f$ ou $h \geq f$.

• Une fonction $f : P \to \mathbf{R}$ est dite *intégrable dans le sens de Riemann* ou *Riemann-intégrable* si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut encadrer f entre deux fonctions en escaliers $h^\pm$ sur P ($h_- \leq f \leq h_+$) telles que la différence de leurs intégrales soit plus petite que ε. En formule :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists h_\pm \in \mathcal{E}_f^\pm : \int_P (h_+ - h_-)\,\mathrm{d}\lambda < \varepsilon \ .$$

La condition d'être Riemann-intégrable implique donc en particulier que les ensembles $\mathcal{E}_f^\pm$ ne sont pas vides.

→ **18.2 Proposition.** *Soit $f : P \to \mathbf{R}$ une fonction sur un pavé $P \subset \mathbf{R}^d$.*

(i) *Si $\mathcal{E}_f^-$ et $\mathcal{E}_f^+$ ne sont pas vides, alors l'ensemble $\{\int_P h\,\mathrm{d}\lambda \mid h \in \mathcal{E}_f^-\}$ est majoré, l'ensemble $\{\int_P h\,\mathrm{d}\lambda \mid h \in \mathcal{E}_f^+\}$ est minoré et on a l'inégalité*

$$\sup \Big\{ \int_P h\,\mathrm{d}\lambda \ \Big|\ h \in \mathcal{E}_f^- \Big\} \ \leq\ \inf \Big\{ \int_P h\,\mathrm{d}\lambda \ \Big|\ h \in \mathcal{E}_f^+ \Big\} \ .$$

(ii) *f est intégrable sur P si et seulement si les ensembles $\mathcal{E}_f^+$ et $\mathcal{E}_f^-$ ne sont pas vides et on a l'égalité*

$$\sup \Big\{ \int_P h\,\mathrm{d}\lambda \ \Big|\ h \in \mathcal{E}_f^- \Big\} = \inf \Big\{ \int_P h\,\mathrm{d}\lambda \ \Big|\ h \in \mathcal{E}_f^+ \Big\} \ .$$

18.3 Définition. Si $f : P \subset \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ est Riemann intégrable, alors on lui associe un nombre, appelé *l'intégrale de Riemann de f sur P* et noté comme $\int_P f(x)\,\mathrm{d}^d x$, par la formule suivante :

$$\int_P f(x)\,\mathrm{d}^d x = \sup \Big\{ \int_P h\,\mathrm{d}\lambda \ \Big|\ h \in \mathcal{E}_f^- \Big\} \ .$$

Cette définition ressemble à la définition de l'intégrale de Lebesgue, mais il y a des différences importantes. D'abord il faut remarquer qu'ici on ne se restreint pas à des fonctions positives : les fonctions h pour lesquelles on calcule $\int_P h \, \mathrm{d}\lambda$ prennent leurs valeurs dans $\mathbf{R}$. Par contre, même si f était positive et si on ne prenait que des fonctions h positives, on se restreint à des fonctions en escalier, qui ne forment qu'un sous-espace des fonctions étagées. Le sup risque donc d'être plus petit que quand on prend toutes les fonctions étagées (en-dessous de f). Pour une fonction positive Riemann-intégrable on a donc forcément l'inégalité

$$\int_P f(x) \, \mathrm{d}^d x \le \int_P f \, \mathrm{d}\lambda \ .$$

De plus, si f est Riemann intégrable, il se déduit facilement de [18.2] que $\int_P f(x) \, \mathrm{d}^d x$ est dans $\mathbf{R}$: l'intégrale de Riemann ne prend pas la valeur ∞ (ni $-\infty$).

$\rightarrow$ **18.4 Lemme.** *Soit* $h_1, \dots, h_n : P \to \mathbf{R}$ *des fonctions en escalier. Alors la fonction* $\max(h_1, \dots, h_n)$ *est aussi en escalier.*

18.5 Théorème. *Soit* $P = \prod_{i=1}^d \, [a_i, b_i\,] \subset \mathbf{R}^d$ *un pavé et soit* $f : P \to \mathbf{R}$ *une fonction Riemann intégrable sur* P. *Alors* f *est* λ*-presque partout égale à une fonction* λ*-intégrable* $F : P \to \mathbf{R}$ *vérifiant*

$$\int_P f(x) \, \mathrm{d}^d x = \int_P F(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) \ .$$

Preuve. En prenant $\varepsilon = 1/n$ dans la définition de l'intégrabilité de f dans le sens de Riemann on trouve deux suites de fonctions en escaliers $h_\pm^{(n)} : P \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$ vérifiant

$$h_-^{(n)} \le f \le h_+^{(n)} \qquad \text{et} \qquad \int_P (h_+^{(n)} - h_-^{(n)}) \, \mathrm{d}\lambda < \tfrac{1}{n} \ . \tag{18.6}$$

On définit deux nouvelles suites de fonctions $g_\pm^{(n)} : P \to \mathbf{R}$ par

$$\begin{aligned} g_-^{(n)}(x) &= \max(h_-^{(1)}(x), \dots, h_-^{(n)}(x)) \qquad \text{et} \\ g_+^{(n)}(x) &= \min(h_+^{(1)}(x), \dots, h_+^{(n)}(x)) \ . \end{aligned}$$

Par [18.4] $g_\pm^{(n)}$ est en escalier et par construction la suite $g_-^{(n)}$ est croissante et la suite $g_+^{(n)}$ est décroissante. De plus, on a les inégalités

$$h_-^{(n)} \le g_-^{(n)} \le f \le g_+^{(n)} \le h_+^{(n)} \ . \tag{18.7}$$

Par [9.7.v] et [18.2] on en déduit qu'on a les inégalités

$$\int_P h_-^{(n)} \, \mathrm{d}\lambda \le \int_P g_-^{(n)} \, \mathrm{d}\lambda \le \int_P f(x) \, \mathrm{d}^d x \le \int_P g_+^{(n)} \, \mathrm{d}\lambda \le \int_P h_+^{(n)} \, \mathrm{d}\lambda \ .$$

Par la deuxième partie de (18.6) on a donc l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} \int_P g_-^{(n)}\,\mathrm{d}\lambda = \int_P f(x)\,\mathrm{d}^d x = \lim_{n\to\infty} \int_{\overline{P}} g_+^{(n)}\,\mathrm{d}\lambda\ .$$

Mais la suite $g_+^{(n)} - g_-^{(n)}$ est une suite décroissante de fonctions positives mesurables. Elle converge donc partout vers une fonction mesurable positive G sur P. De plus, elle est majorée par le premier terme $g_+^{(1)} - g_-^{(1)}$ qui est λ-intégrable. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée [10.5] et conclure qu'on a

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_P (g_+^{(n)} - g_-^{(n)})\,\mathrm{d}\lambda = \int_P G\,\mathrm{d}\lambda\ .$$

En invoquant [8.12.ii] on en déduit que $G \overset{\lambda\text{-pp}}{=} 0$.

On note maintenant que la suite $g_-^{(n)}$ est croissante et majorée (par f), donc la fonction limite $F = \lim_{n\to\infty} g_-^{(n)} : P \to \mathbf{R}$ est une fonction mesurable [3.16]. Vu que $G \overset{\lambda\text{-pp}}{=} 0$, on déduit des inégalités (18.7) qu'on a

$$F \equiv \lim_{n\to\infty} g_-^{(n)} \overset{\lambda\text{-pp}}{=} f \overset{\lambda\text{-pp}}{=} \lim_{n\to\infty} g_+^{(n)} \quad \text{sur } P.$$

Par l'implication $a \le b \le c \Rightarrow |b| \le \max(\,|a|, |c|\,)$ et de nouveau par les inégalités (18.7) on obtient la majoration

$$|g_-^{(n)}| \le \max(\,|g_-^{(1)}|, |g_+^{(1)}|\,)\ .$$

Vu que cette dernière fonction est λ-intégrable, on peut appliquer [10.5] à la suite $g_-^{(n)}$ pour obtenir

$$\int_P F\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_P g_-^{(n)}\,\mathrm{d}\lambda = \int_P f(x)\,\mathrm{d}^d x\ . \qquad \boxed{CQFD}$$

18.8 Corollaire. *Soit $P \subset \mathbf{R}^d$ un pavé et soit $f : P \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable et Riemann intégrable sur P. Alors f est intégrable dans le sens de Lebesgue sur P et $\int_P f(x)\,\mathrm{d}^d x = \int_P f\,\mathrm{d}\lambda$.*

Preuve. Soit $F : P \to \mathbf{R}$ la fonction donnée par [18.5]. Alors $f \overset{\lambda\text{-pp}}{=} F$. F étant intégrable (dans le sens de Lebesgue), f l'est aussi et on a l'égalité $\int_P F\,\mathrm{d}\lambda = \int_P f\,\mathrm{d}\lambda$. $\boxed{CQFD}$

18.9 Définition. Soit $f : [\,a, b\,[\to \mathbf{R}$ une fonction ($b = \infty$ est autorisé). On dit que *l'intégrale de Riemann généralisée de f sur $[\,a, b\,[$ converge* si

(i) pour tout $c \in\ ]\,a, b\,[$ la fonction f est intégrable dans le sens de Riemanns sur l'intervalle (fermé) $[\,a, c\,]$ et
(ii) la limite $\lim_{c\uparrow b} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ existe dans $\mathbf{R}$.

Si c'est le cas on note la valeur de la limite comme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\uparrow b} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

et on dit que c'est la valeur de l'intégrale généralisée sur l'intervalle $[\,a,b\,[$. On dit que *l'intégrale de Riemann généralisée de f sur $[\,a,b\,[$ converge absolument* si l'intégrale de Riemann généralisée de la fonction $|f|$ converge sur $[\,a,b\,[$.

Pour un intervalle ouvert à gauche, il faut prendre la limite à droite et pour un intervalle ouvert il faut le couper en deux et regarder les deux limites séparément (une pour la borne inférieure de l'intervalle et une pour la borne supérieure).

18.10 Lemme. *Soit $f : [\,a,b\,[\to \mathbf{R}$ une fonction mesurable.*

(i) *Si f est Riemann-intégrable sur $[\,a,c\,] \subset [\,a,b\,[$, alors $|f|$ est Riemann-intégrable sur $[\,a,c\,]$.*

(ii) *Si l'intégrale de Riemann généralisée de f sur $[\,a,b\,[$ converge absolument, alors elle converge.*

Preuve. $\boxed{CQFD}$

18.11 Proposition. *Soit $f : [\,a,b\,[\to \mathbf{R}$ une fonction mesurable qui est Riemann-intégrable sur tout intervalle $[\,a,c\,] \subset [\,a,b\,[$. Alors l'intégrale de Riemann généralisée de f converge absolument sur $[\,a,b\,[$ si et seulement si f est intégrable dans le sens de Lebesgue sur $[\,a,b\,[$. Si c'est le cas, on a l'égalité*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{c\uparrow b} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[\,a,b\,[} f\,\mathrm{d}\lambda \ .$$

Preuve. Soit $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante dans $[\,a,b\,[$ de limite b (si $b<\infty$ on peut prendre $b_n = b - \frac{b-a}{n+1}$ et si $b=\infty$ on peut prendre $b_n = a+n$). Alors $(\mathbf{1}_{[\,a,b_n\,]})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante de fonctions de limite $\mathbf{1}_{[\,a,b\,[}$. On définit la fonction $F : [\,a,b\,[\to \mathbf{R}$ par

$$F(c) = \int_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x \overset{[18.10.\underline{i}],[18.8]}{=} \int_{[\,a,c\,]} |f|\,\mathrm{d}\lambda \le \int_{[\,a,b\,[} |f|\,\mathrm{d}\lambda \ . \tag{18.12}$$

Cette fonction est croissante car $|f|$ est une fonction positive ; la limite $\lim\limits_{c\uparrow b} F(c)$ existe donc toujours dans $\overline{\mathbf{R}}_+$.

• Supposons que l'intégrale généralisée de f converge absolument sur $[\,a,b\,[$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{c\uparrow b} F(c)$ est finie. Alors on peut faire la calcul suivant :

$$\int_{[\,a,b\,[} |f|\,\mathrm{d}\lambda \overset{[8.1]}{=} \lim_{n\to\infty} F(b_n) = \lim_{c\uparrow b} F(c) < \infty \ .$$

Il s'ensuit que f est intégrable dans le sens de Lebesgue sur $[\,a,b\,[$.

Si au contraire f est Lebesgue-intégrable, alors on a la majoration (18.12) :

$$F(c) \leq \int_{[a,b[} |f| \, \mathrm{d}\lambda < \infty \ .$$

Il s'ensuit que la limite $\lim_{c\uparrow b} F(c)$ est finie car majorée par $\int_{[a,b[} |f| \, \mathrm{d}\lambda$. On conclut que l'intégrale généralisée de f sur $[a,b[$ converge absolument.

• Si f est Lebesgue-intégrable sur $[a,b[$, alors on peut transformer l'égalité

$$\int_{[a,b[} |f| \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[a,c]} |f| \, \mathrm{d}\lambda + \int_{]c,b[} |f| \, \mathrm{d}\lambda$$

en

$$\int_{]c,b[} |f| \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b[} |f| \, \mathrm{d}\lambda - \int_{[a,c]} |f| \, \mathrm{d}\lambda \equiv \int_{[a,b[} |f| \, \mathrm{d}\lambda - F(c) \ , \tag{18.13}$$

car les trois termes sont finis (majorés par $\int_{[a,b[} |f| \, \mathrm{d}\lambda < \infty$). Mais par la croissance de F et le théorème de Beppo-Levi [8.1] on a aussi l'égalité

$$\lim_{c\uparrow b} F(c) = \lim_{n\to\infty} F(b_n) = \int_{[a,b[} |f| \, \mathrm{d}\lambda < \infty \ . \tag{18.14}$$

Si on fait maintenant le calcul

$$\begin{aligned} \Big| \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x - \int_{[a,b[} f \, \mathrm{d}\lambda \Big| &\overset{[18.8]}{=} \Big| \int_{[a,c]} f \, \mathrm{d}\lambda - \int_{[a,b[} f \, \mathrm{d}\lambda \Big| \\ &= \Big| \int_{]c,b[} f \, \mathrm{d}\lambda \Big| \leq \int_{]c,b[} |f| \, \mathrm{d}\lambda \ , \end{aligned}$$

on déduit de (18.13) et (18.14) qu'on a l'égalité

$$\lim_{c\uparrow b} \ \Big| \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x - \int_{[a,b[} f \, \mathrm{d}\lambda \Big| = 0 \ .$$

$\boxed{CQFD}$

19. Construction de mesures

19.1 Proposition. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable positive. Alors l'application $\nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définie par*

$$\nu(E) = \int_\Omega \mathbf{1}_E \cdot f \, \mathrm{d}\mu \equiv \int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

est une mesure.

Preuve. Il est évident qu'on a $\nu(\emptyset) = 0$, donc il ne reste qu'à montrer la σ-additivité de ν. Pour cela, soit A_n une suite disjointe d'ensembles mesurables.

$$\begin{aligned}\nu\big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\big) &= \int_\Omega \mathbf{1}_{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n} \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \Big(\sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{1}_{A_n}\Big) \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} f \,\mathrm{d}\mu \\ &\overset{[2.17]}{=} \int_\Omega \sum_{n\in\mathbf{N}} (\mathbf{1}_{A_n} \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} f)\,\mathrm{d}\mu \overset{[8.9]}{=} \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega \mathbf{1}_{A_n} \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbf{N}} \nu(A_n)\ ,\end{aligned}$$

où la deuxième égalité est une conséquence du fait que les A_n sont disjoints. Pour la troisième égalité il faut appliquer, en outre de [2.17], un argument simple de limite sur les sommes partielles dans $\overline{\mathbf{R}}_+$. $\boxed{CQFD}$

19.2 Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable positive. La mesure ν construite dans [19.1] est appelée *la mesure à densité f par rapport à la mesure μ.*

19.3 Proposition. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une application mesurable positive et soit $\nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ la mesure définie par $\nu(A) = \int_A f\,\mathrm{d}\mu$. Si $g : \Omega \to \mathbf{K}$ avec $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$ est une application mesurable, alors le produit tordu $g \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} f$ est aussi mesurable. On a toujours l'égalité*

(19.4)
$$\int_\Omega |g|\,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega |g| \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} f\,\mathrm{d}\mu\ .$$

Si l'une de ces deux intégrales est finie (et donc les deux) on a l'égalité

(19.5)
$$\int_\Omega g\,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega g \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} f\,\mathrm{d}\mu\ .$$

Preuve. La mesurabilité de $g \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} f$ est montré dans [4.11]. Pour montrer les égalités des intégrales, on suit l'approche classique. Si $g = \mathbf{1}_E$ est une fonction indicatrice, on a

$$\int_\Omega \mathbf{1}_E\,\mathrm{d}\nu = \nu(E) \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{1}_E \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} f\,\mathrm{d}\mu\ .$$

Si $g = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$ est une fonction étagée positive, alors on calcule avec [8.8] et [8.13] :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}\,\mathrm{d}\nu &= \sum_{i=1}^n c_i \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} \int_\Omega \mathbf{1}_{A_i}\,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^n c_i \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} \int_\Omega \mathbf{1}_{A_i} \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} f\,\mathrm{d}\nu \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n c_i \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} (\mathbf{1}_{A_i} \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} f)\,\mathrm{d}\nu \overset{[2.17]}{=} \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}\Big) \mathbin{\scriptstyle\blacksquare} f\,\mathrm{d}\nu\ .\end{aligned}$$

Si g est une fonction mesurable positive quelconque, alors il existe une suite croissante de fonctions étagées positives h_n telle que $\lim_{n\to\infty} h_n = g$ [8.7]. En invoquant [8.1] et le résultat de l'étape précédente on peut donc faire le calcul :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \lim_{n\to\infty} h_n \,\mathrm{d}\nu &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega h_n \,\mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega h_n \centerdot f \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty}(h_n \centerdot f)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega (\lim_{n\to\infty} h_n)\centerdot f\,\mathrm{d}\mu \ ,\end{aligned}$$

où pour la troisième égalité on utilise le fait que si la suite h_n est croissante, alors la suite $h_n \centerdot f$ l'est aussi. L'égalité $\lim_{n\to\infty}(h_n \centerdot f) = (\lim_{n\to\infty} h_n)\centerdot f$ est laissée comme exercice élémentaire au lecteur. On a donc montré que l'égalité $\int_\Omega g\,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega g \centerdot f\,\mathrm{d}\mu$ est vraie pour toute fonction mesurable positive, ce qui montre (19.4).

Si (19.4) donne une valeur finie, alors on en déduit que g est ν-intégrable si et seulement si $g \centerdot f$ est μ-intégrable. Si g est à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, on déduit de l'égalité

$$(g \centerdot f)^\pm = g^\pm \centerdot f$$

et de la définition de l'intégrale d'une fonction intégrable qu'on a l'égalité (19.5). Le cas $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ s'en déduit en séparant les parties réelles et imaginaires. $\boxed{CQFD}$

19.6 Remarques. • Dans la pratique la fonction f (dans la définition de la mesure à densité f) prendra ses valeurs dans $\mathbf{R}_+$ et on ne s'intéresse à des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Et dans ces circonstances la fonction $g \centerdot f$ est la fonction $g \cdot f$. Les précautions qu'on a dû prendre dans le cas général seront donc dans la pratique le plus souvent superflues.

• On écrit souvent la relation entre la mesure μ et la nouvelle mesure ν à densité f par rapport à μ comme

$$\mathrm{d}\nu = f\,\mathrm{d}\mu \ ,$$

une écriture qui est utile pour se rappeler le résultat [19.3]. On dit aussi que la mesure ν est *absolument continue par rapport à la mesure* μ et que f est *la dérivée de Radon-Nikodym de* ν *par rapport à* μ, ce qu'on note comme

$$f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \ .$$

→ **19.7 Exercice.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une application mesurable positive et soit $\nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ la mesure définie par $\nu(A) = \int_A f\,\mathrm{d}\mu$. Montrer que si g est une fonction ν-intégrable, alors $g \overset{\mu\text{-pp}}{=} 0$ sur l'ensemble où f est infini :

$$\mu(\ \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = \infty \text{ et } g(\omega) \neq 0\}\ ) = 0 \ .$$

19.8 Exemple. Soit $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction croissante de classe C^1, c'est-à-dire dérivable telle que $f = F'$ soit continue (sur $\mathbf{R}$). Autrement dit, soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ une fonction continue positive (pour la croissance de F) et soit F une primitive de f. Alors par le théorème fondamental du calcul intégral on a l'égalité

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

La fonction f, étant continue, est mesurable et donc par le théorème de comparaison entre l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue on a l'égalité

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{]a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda \ .$$

On voit que la mesure de Stieltjes λ_F et la mesure ν à densité f par rapport à la mesure de Lebesgue coïncident sur le π-système $\mathcal{P}a(\mathbf{R})$ des intervalles semi-ouverts à gauche. λ_F étant σ-finie sur $\mathcal{P}a(\mathbf{R})$, on a donc égalité des deux mesures :

$$\mathrm{d}\lambda_F = f\,\mathrm{d}\lambda = F'\,\mathrm{d}\lambda \ .$$

19.9 Exemple. Considérons l'espace mesuré $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, C_{\mathbf{N}})$ et soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ une fonction mesurable positive. On définit la mesure ν par

$$\mathrm{d}\nu = f\,\mathrm{d}C_{\mathbf{N}} \ .$$

Alors une fonction mesurable $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est ν-intégrable si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot |g(n)| < \infty$. Si c'est le cas on a l'égalité

$$\int_{\mathbf{R}} g\,\mathrm{d}\nu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,g(n) \ .$$

On dit que l'intégrale par rapport à ν représente une série avec poids f.

19.10 Exemple. Si on compare la définition [6.13] de la mesure μ_p définie sur un ensemble fini avec [19.1], il est immédiate que μ_p est la mesure à densité p par rappport à la mesure de comptage C_Ω.

→ **19.11 Proposition.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $f_1, f_2 : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ deux fonctions mesurables positives et soit $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ les mesures à densité par rapport à la mesure μ définies comme $\mathrm{d}\nu_i = f_i\,\mathrm{d}\mu$.*

(i) *Si $f_1 \overset{\mu\text{-pp}}{=} f_2$, alors $\nu_1 = \nu_2$.*
(ii) *Si $\nu_1 = \nu_2$ et si ν_1 (et donc ν_2) est σ-finie, alors $f_1 \overset{\mu\text{-pp}}{=} f_2$.*

→ **19.12 Exercice.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $f, g : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ deux applications mesurables positives. Montrer que si ν est la mesure définie par $\mathrm{d}\nu = f\,\mathrm{d}\mu$ et si ρ est la mesure définie par $\mathrm{d}\rho = g\,\mathrm{d}\nu$, alors on a l'égalité

$$\mathrm{d}\rho = (f \centerdot g)\,\mathrm{d}\mu \ .$$

19.13 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, soit $a \in \overline{\mathbf{R}}_+$, soit $f : \Omega \to \mathbf{K}$ avec $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$ une application mesurable et soit, pour tout $n \in \mathbf{N}$, μ_n une mesure sur $\mathcal{F}$. On définit deux applications $\nu_1, \nu_\infty : \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ par*

$$\nu_1(E) = a \centerdot \mu_1(E) \qquad , \qquad \nu_\infty(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(E) \ .$$

(i) *Les deux applications ν_1 et ν_∞ sont des mesures sur $\mathcal{F}$.*

(ii) *Supposons que $0 < a < \infty$. Alors on a toujours l'égalité*

$$\int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\nu_1 = a \cdot \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu_1 \ .$$

La fonction f est donc μ_1-intégrable si et seulement si f est ν_1-intégrable. Si c'est le cas, on a l'égalité

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\nu_1 = a \cdot \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu_1 \ .$$

(iii) *On a toujours l'égalité*

$$\int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\nu_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu_n \ .$$

La fonction f est donc ν_∞-intégrable si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu_n < \infty$ (et donc en particulier f est μ_n-intégrable pour tout $n \in \mathbf{N}$). Si c'est le cas, on a l'égalité

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\nu_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu_n \ .$$

Preuve. • (i) : Il est immédiat que $\nu_\infty(\emptyset) = 0$; par définition du produit tordu $\nu_1(\emptyset) = 0$. La distributivité du produit tordu sur $\overline{\mathbf{R}}_+$ implique (presque) immédiatement que ν_1 est σ-additive. Pour la σ-additivité de ν_∞ il suffit d'invoquer [15.10].

• (ii) : On suit (de nouveau) l'approche classique. Si $f = \mathbf{1}_A$ est une fonction indicatrice, alors on a

$$\int_\Omega \mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\nu_1 = \nu_1(A) = a \centerdot \mu_1(A) = a \centerdot \int_\Omega \mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu_1 \ .$$

Si $f = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$ est une fonction étagée positive, alors par [8.8] et [8.13] et [2.17] on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \,\mathrm{d}\nu_1 &= \sum_{i=1}^n c_i \,\blacksquare \int_\Omega \mathbf{1}_{A_i} \,\mathrm{d}\nu_1 = \sum_{i=1}^n c_i \,\blacksquare \Big(a \,\blacksquare \int_\Omega \mathbf{1}_{A_i} \,\mathrm{d}\mu_1 \Big) \\ &= a \,\blacksquare \sum_{i=1}^n c_i \,\blacksquare \int_\Omega \mathbf{1}_{A_i} \,\mathrm{d}\mu_1 = a \,\blacksquare \int_\Omega \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \,\mathrm{d}\mu_1 \ .\end{aligned}$$

Si $f = \lim_{n\to\infty} h_n$ est la limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives, alors par [8.1] et l'étape précédente on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \lim_{n\to\infty} h_n \,\mathrm{d}\nu_1 &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n \,\mathrm{d}\nu_1 = \lim_{n\to\infty} \Big(a \,\blacksquare \int_\Omega h_n \,\mathrm{d}\mu_1 \Big) \\ &= a \,\blacksquare \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n \,\mathrm{d}\mu_1 = a \,\blacksquare \int_\Omega \lim_{n\to\infty} h_n \,\mathrm{d}\mu_1 \ .\end{aligned}$$

Par [8.7] on a donc montré la première égalité, car pour $0 < a < \infty$ on peut remplacer le produit tordu par le produit ordinaire.

Sous l'hypothèse $0 < a < \infty$ on a l'équivalence

$$a \,\blacksquare \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu_1 < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu_1 < \infty \ ,$$

ce qui veut dire que f est μ_1-intégrable si et seulement si f est ν_1-intégrable. Si c'est le cas, on obtient la deuxième égalité annoncée en séparant les parties positives et négatives (et le cas échéant les parties réelles et imaginaires).

• (iii) : On suit (encore une fois) l'approche classique. On commence avec une fonction indicatrice :

$$\int_\Omega \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\nu_\infty = \nu_\infty(A) = \sum_{n=0}^\infty \mu_n(A) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu_n \ .$$

On poursuit avec une fonction étagée positive :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \,\mathrm{d}\nu_\infty &= \sum_{i=1}^n c_i \,\blacksquare \int_\Omega \mathbf{1}_{A_i} \,\mathrm{d}\nu_\infty = \sum_{i=1}^n c_i \,\blacksquare \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega \mathbf{1}_{A_i} \,\mathrm{d}\mu_n \\ &= \sum_{n\in\mathbf{N}} \sum_{i=1}^n c_i \,\blacksquare \int_\Omega \mathbf{1}_{A_i} \,\mathrm{d}\mu_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \,\mathrm{d}\mu_n \ .\end{aligned}$$

Et on "termine" avec une suite croissante de fonctions étagées positives :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \lim_{k\to\infty} h_k \,\mathrm{d}\nu_\infty &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega h_k \,\mathrm{d}\nu_\infty = \lim_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega h_k \,\mathrm{d}\mu_n \\ &= \sum_{n\in\mathbf{N}} \lim_{k\to\infty} \int_\Omega h_k \,\mathrm{d}\mu_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega \lim_{k\to\infty} h_k \,\mathrm{d}\mu_n \ ,\end{aligned}$$

où la troisième égalité (l'échange de la limite avec la somme) est aussi une application du théorème de Beppo-Levi : on considère la suite de fonctions positives $a_k : \mathbf{N} \to \overline{\mathbf{R}}_+$, $k \in \mathbf{N}$ définie par

$$a_k(n) = \int_\Omega h_k \, \mathrm{d}\mu_n \ .$$

Par [7.8.ii] cette suite est une suite croissante de fonctions mesurables positives sur l'espace mesuré $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), C_\mathbf{N})$. Par [8.1] on a donc l'égalité

$$\int_\mathbf{N} \lim_{k\to\infty} a_k \, \mathrm{d}C_\mathbf{N} = \lim_{k\to\infty} \int_\mathbf{N} a_k \, \mathrm{d}C_\mathbf{N} \ .$$

Mais par [15.4.i] cette égalité devient

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \lim_{k\to\infty} a_k(n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbf{N}} a_k(n) \ ,$$

ce qui est exactement l'échange annoncée de la limite avec la somme. Ainsi on a montré (en invoquant [8.7]) la première égalité (avec les valeurs absolues).

Pour la deuxième égalité on sépare les parties positive et négative (et les parties réelle et complexe le cas échéant) en écrivant $f = f^+ - f^-$. L'intégrabilité de f implique qu'on a

$$\int_\Omega f^\pm \, \mathrm{d}\nu_\infty = \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega f^\pm \, \mathrm{d}\mu_n < \infty \ . \tag{19.14}$$

Ceci veut dire que les fonctions $a^\pm : \mathbf{N} \to \overline{\mathbf{R}}$ définies comme

$$a^\pm(n) = \int_\Omega f^\pm \, \mathrm{d}\mu_n$$

sont $C_\mathbf{N}$-intégrables sur l'espace mesuré $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), C_\mathbf{N})$ [15.4.i]. On a donc (par définition) l'égalité

$$\int_\mathbf{N} a \, \mathrm{d}C_\mathbf{N} = \int_\mathbf{N} a^+ \, \mathrm{d}C_\mathbf{N} - \int_\mathbf{N} a^- \, \mathrm{d}C_\mathbf{N}$$

pour la fonction $a : \mathbf{N} \to \overline{\mathbf{R}}$ définie comme $a = a^+ - a^-$. Mais cette égalité se traduit (avec [15.4]) comme

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu_n - \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu_n \ ,$$

ce qui donne avec (19.14) le résultat voulu :

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_n = \int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\nu_\infty - \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\nu_\infty = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\nu_\infty \ .$$

Dans le cas $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ il faut aussi séparer les parties réelle et complexe, mais le raisonnement est le même. $\boxed{CQFD}$

19.15 Remarque pour les curieux concernant la preuve de [19.13]. Dans la preuve de la partie (iii) on a invoqué plusieurs fois des résultats de l'intégrale pour l'espace mesuré $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), C_{\mathbf{N}})$ pour lequel l'intégrale s'interprète comme série. On aurait pu montrer ces résultats directements sans passer par l'interprétation d'une intégrale. Et (sauf pour le théorème de Beppo-Levi) cela se fait en général : on montre (facilement) que la différence (somme/combinaison linéaire) de deux séries convergentes est la série des différences. Mais dans notre contexte, on dispose déjà de ces résultats et il est utile de voir que c'est effectivement le cas.

19.16 Remarque. On peut améliorer la partie (ii) dans [19.13] comme suit : si $a > 0$ et si f est ν_1-intégrable, alors f est μ_1-intégrable ; et si $a < \infty$ et si f est μ_1-intégrable, alors f est ν_1-intégrable. Ceci en regardant la preuve ! Par contre, si $a = 0$, toute fonction est ν_1-intégrable avec une ν_1-intégrale zéro. Mais il n'y a aucune raison de supposer que toute fonction est μ_1-intégrable.

→ **19.17 Exercice.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit ν la mesure $\nu = \infty \mathbin{\blacksquare} \mu$. Décrire les fonctions ν-intégrable en termes de μ.

→ **19.18 Corollaire.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, soit $a \in \,]0, \infty[$ un réel strictement positif et soit $\mu, \nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ deux mesures. Alors l'application $\rho = \mu + a \cdot \nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ est une mesure ; une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbf{K}$ avec $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$ est ρ-intégrable si et seulement si f est intégrable par rapport à μ et ν. Si c'est le cas on a l'égalité*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\rho = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + a \cdot \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu \ .$$

19.19 Exemple. Soit $f : \mathbf{R} \to [0; \infty]$ la fonction définie par $f(x) = |x|^{-1}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ et soit μ la mesure à densité f par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbf{R}$. Pour tout $r \in \,]0, \infty[$ on définit la mesure μ_r sur $\mathbf{R}$ par

$$\mu_r = \mu + r \cdot \delta_0 \ .$$

On vérifie aisément que pour tout $]a, b] \subset \mathbf{R}$ et tout $r \in \,]0, \infty[$ on a l'égalité

$$\mu_r(\,]a, b]\,) = \mu(\,]a, b]\,) \ .$$

De plus, les mesures μ_r sont toutes σ-finies ; il suffit de prendre les ensembles $A_0 = \{0\}$ et $A_n = \,]-n, -n^{-1}\,] \cup \,]n^{-1}, n]$ pour $n > 0$:

$$\mu_r(A_0) = r \qquad \text{et} \qquad \mu_r(A_n) = 4 \cdot \ln(n) \ .$$

On a donc une famille de mesures différentes qui prennent les mêmes valeurs sur le π-système $\mathcal{P}a(\mathbf{R})$ des intervalles semi-ouverts à gauche et qui sont σ-finies. Ceci ne constitue pas un contre exemple pour le théorème [11.11] sur l'unicité des mesures, car ces mesures ne sont pas σ-finies *sur le π-système $\mathcal{P}a(\mathbf{R})$* : l'ensemble $A_0 = \{0\}$ n'y appartient pas (les A_n non plus, mais on peut les modifier pour qu'ils y appartiennent en posant $A_n = \,]n^{-1}, n]$ si n est pair et $A_n = \,]-n, -n^{-1}]$ si n est impair). Remarquons aussi que les mesures μ_r ne sont pas des mesures de Stieltjes, car elles ne sont pas finies sur les intervalles $]a, b] \subset \mathbf{R}$ qui contiennent 0.

19.20 Corollaire. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs ($0 < a_n < \infty$) et soit, pour tout $n \in \mathbf{N}$, μ_n une mesure sur $\mathcal{F}$.*

(i) *L'application $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définie par*

$$\mu(E) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \mu_n(E)$$

est une mesure sur $\mathcal{F}$.

(ii) *Une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbf{K}$ avec $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$ est μ-intégrable si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu_n < \infty$ (et donc en particulier elle est μ_n-intégrable pour tout $n \in \mathbf{N}$). Si c'est le cas on a l'égalité*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu_n \ .$$

19.21 Exemple. Considérons l'espace mesurable $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$, les mesures de Dirac δ_n, $n \in \mathbf{N}$ sur $\mathcal{B}$ et soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On définit la mesure μ par $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_n$. Alors une fonction mesurable $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est μ-intégrable si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot |g(n)| < \infty$. Si c'est le cas on a l'égalité

$$\int_{\mathbf{R}} g \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot g(n) \ .$$

Si on définit la fonction $f : \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ par

$$\forall n \in \mathbf{N} : f(n) = a_n \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N} : f(x) = 0 \ ,$$

alors f est mesurable. Si on compare l'expression de l'intégrale par rapport à la mesure μ définie ici avec l'expression de l'intégrale par rapport à la mesure ν définie dans [19.9] comme $\mathrm{d}\nu = f \cdot \mathrm{d}C_{\mathbf{N}}$, on voit que c'est la même chose :

$$\int_{\mathbf{R}} g \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot g(n) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot g(n) = \int_{\mathbf{R}} g \,\mathrm{d}\nu \ .$$

L'égalité $\int_{\mathbf{R}} g \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbf{R}} g \,\mathrm{d}\nu$ est vraie pour toute fonction mesurable positive $g : \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}_+$, ainsi que pour toute fonction intégrable. On a l'égalité donc en particulier pour des fonctions indicatrices, d'où la conclusion que ces deux mesures sont identiques : $\mu = \nu$. Symboliquement on l'écrit comme

$$f \,\mathrm{d}C_{\mathbf{N}} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \,\mathrm{d}\delta_n \ .$$

→ **19.22 Lemme.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré, soit* $(X, \mathcal{G})$ *un espace mesurable et soit* $\Phi : \Omega \to X$ *une application mesurable. Alors l'application* $\nu : \mathcal{G} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *définie par*

$$\nu(B) = \mu(\Phi^{-1}(B))$$

est une mesure.

19.23 Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $(X, \mathcal{G})$ un espace mesurable et soit $\Phi : \Omega \to X$ une application mesurable. La mesure $\nu : \mathcal{G} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définie par $\nu(B) = \mu(\Phi^{-1}(B))$ est appelée *la mesure image (de la mesure* μ *par l'application mesurable* Φ*).* On la note comme $\nu = \mu \circ \Phi^{-1}$.

19.24 Lemme. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable, soit* $a \in \overline{\mathbf{R}}_+$ *et soit, pour tout* $n \in \mathbf{N}$*,* μ_n *une mesure sur* $\mathcal{F}$*. Si* $\Phi : \Omega \to X$ *est une application mesurable de* Ω *dans un espace mesurable* $(X, \mathcal{G})$*, alors on a les égalités de mesures*

$$(a \centerdot \mu_1) \circ \Phi^{-1} = a \centerdot (\mu_1 \circ \Phi^{-1}) \qquad \textit{et} \qquad (\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n) \circ \Phi^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \circ \Phi^{-1} \ .$$

Preuve. $\boxed{CQFD}$

19.25 Théorème (de transfert). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré, soit* $(X, \mathcal{G})$ *un espace mesurable, soit* $\Phi : \Omega \to X$ *une application mesurable et soit* $\mu \circ \Phi^{-1}$ *la mesure image sur* $(X, \mathcal{G})$*. Si* $f : X \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *est une fonction mesurable positive, alors on a l'égalité*

$$\int_\Omega (f \circ \Phi) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}(\mu \circ \Phi^{-1}) \ .$$

Une fonction $f : X \to \mathbf{K}$ *avec* $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ *ou* $\mathbf{C}$ *est* $\mu \circ \Phi^{-1}$*-intégrable si et seulement si* $f \circ \Phi$ *est* μ*-intégrable. Si c'est le cas on a l'égalité*

$$\int_\Omega (f \circ \Phi) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}(\mu \circ \Phi^{-1}) \ .$$

Preuve. $\boxed{CQFD}$

19.26 Exemple. Soit $E : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction ≪partie entière≫. Alors la mesure image $\lambda \circ E^{-1}$ de la mesure de Lebesgue sous cette application est la mesure de comptage sur $\mathbf{Z}$:

$$\lambda \circ E^{-1} = C_{\mathbf{Z}} \ .$$

Pour le voir on considère un intervalle semi-ouvert $]a, b] \subset \mathbf{R}$ et on constate que l'image réciproque est donnée par

$$E^{-1}(\,]a, b]\,) = [E(a) + 1, E(b) + 1[\ .$$

Par définition de la mesure de Lebesgue on a donc

$$\begin{aligned}(\lambda \circ E^{-1})(\,]a,b]\,) &= \lambda(\,[E(a)+1, E(b+1)\,[\,) = E(b) - E(a) \\ &= \#(\,]a,b] \cap \mathbf{Z}) = C_{\mathbf{Z}}(\,]a,b]\,)\ .\end{aligned}$$

Par le théorème sur l'unicité de mesures [11.11] appliqué avec le π-système $\mathcal{P}a(\mathbf{R})$ des intervalles semi-ouverts à gauche on en déduit l'égalité annoncée.

19.27 Exemple. Soit $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application $\Phi(x) = x^2$ et considérons l'espace mesuré de départ $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ et l'espace mesurable d'arrivée $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$. Le but de l'exemple est de montrer que la mesure image $\lambda \circ \Phi^{-1}$ est la mesure à densité f par raport à la mesure de Lebesgue avec f donnée par

$$f(x) = \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\ .$$

On procède comme dans l'exemple précédent en considérant un intervalle semi-ouvert $]a,b] \subset \mathbf{R}$ en calculant l'image réciproque

$$\Phi^{-1}(\,]a,b]\,) = \begin{cases} [-\sqrt{b}, -\sqrt{a}\,[\ \cup\ ]\sqrt{a}, \sqrt{b}\,] & 0 \le a < b \\ [-\sqrt{b}, \sqrt{b}\,] & a < 0 \le b \\ \emptyset & a < b < 0\ . \end{cases}$$

Par définition de la mesure de Lebesgue on a donc

$$(\lambda \circ \Phi^{-1})(\,]a,b]\,) = \begin{cases} 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}) & 0 \le a < b \\ 2\sqrt{b} & a < 0 \le b \\ 0 & a < b < 0\ . \end{cases}$$

Mais si on calcule l'intégrale

$$\int_{]a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b \frac{\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x\ ,$$

on trouve la même chose. Comme dans l'exemple précédent on en déduit l'égalité annoncée.

19.28 Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : \Omega \to \Omega$ une application mesurable. On dit que μ est *invariant sous l'application* f si on a l'égalité (entre mesures) $\mu = \mu \circ f^{-1}$.

19.29 Proposition. *La mesure de Lebesgue λ^d sur l'espace mesurable $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B})$ a les propriétés suivantes.*

(i) *λ^d est invariante sous les translations $T_x : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, $x \in \mathbf{R}^d$ définies comme $T_x(y) = x + y$.*

(ii) *λ^d est invariante sous les réflexions R_i, $1 \le i \le d$ dans les hyperplans $x_i = 0$ définies comme $R_i(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_d)$.*

(iii) *λ^d est invariante sous les permutations A_τ des coordonnées définies comme*

$$A_\tau(x_1, \dots, x_d) = (x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(d)}) ,$$

où τ est une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, d\}$.

(iv) *Si $h_c : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, $c \in \mathbf{R}^*$ est l'homothétie $h_c(x) = cx$, alors $\lambda^d \circ h_c^{-1} = |c|^{-d} \cdot \lambda^d$.*

Preuve. $\boxed{CQFD}$

19.30 Remarque pour les comparateurs. La définition de l'application A_τ est habituellement donnée comme

$$A_\tau(x_1, \dots, x_d) = (x_{\tau^{-1}(1)}, \dots, x_{\tau^{-1}(d)}) .$$

La raison est que définie ainsi on a l'égalité $A_\tau \circ A_\rho = A_{\tau \circ \rho}$, c'est-à-dire qu'on a un homomorphisme de groupes entre le groupe $\mathfrak{S}_d$ des permutation de $\{1, \dots, d\}$ et le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{R}^d)$ des bijections linéaires de $\mathbf{R}^d$ vers lui-même. Vu qu'on n'a jamais besoin de cette propriété, on a préféré d'utiliser l'écriture plus facile sans la réciproque.

19.31 Proposition. *Soit $H \subset \mathbf{R}^d$ un hyperplan affine, c'est-à-dire qu'il existe une application linéaire $A : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ non-nulle et une réel c tels que $H = \{x \in \mathbf{R}^d \mid Ax = c\}$. Alors $\lambda^d(H) = 0$.*

20. Quelques applications

20.1 Définition. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, soit $U \subset X$ un sous-ensemble, soit $a \in \overline{U}$ un point adhérent à U, soit $f : U \to Y$ une application et soit $\ell \in Y$ un point. On dit que la limite de $f(x)$ est ℓ quand x tend vers a dans U, ce qu'on note comme

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in U : 0 < d_X(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(x), \ell) < \varepsilon .$$

20.2 Proposition. *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, soit $U \subset X$ un sous-ensemble, soit $a \in \overline{U}$ un point adhérent à U, soit $F : U \to Y$ une application et soit $\ell \in Y$ un point. Alors $\lim_{x\to a} F(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans U vérifiant $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ on a $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \ell$.*

Preuve. La condition $\lim_{x\to a} F(x) = \ell$ veut dire

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U : d_X(x, a) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), \ell) < \varepsilon\ .$$

Si x_n est une suite dans U vérifiant $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, cela veut dire

$$\forall \delta > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \geq N : d_X(x_n, a) < \delta\ .$$

Si on combine les deux conditions, on obtient le résultat $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \ell$.

Si au contraire on n'a pas $\lim_{x\to a} F(x) = \ell$, cela veut dire :

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in U : d_X(x, a) < \delta \text{ et } d_Y(F(x), \ell) \geq \varepsilon\ .$$

En prenant $\delta = 1/n$ on trouve $x_n \in U$ tel que $d_X(x_n, a) < 1/n$ et $d_Y(F(x_n), \ell) \geq \varepsilon$. Il s'ensuit que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, mais qu'on ne peut pas avoir $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \ell$. Ceci contredit la condition nécessaire et suffisante. $\boxed{CQFD}$

20.3 Théorème (convergence dominée de Lebesgue bis). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit (X, d) un espace métrique, soit $U \subset X$ un sous-ensemble, soit $a \in \overline{U}$ et soit $f : U \times \Omega \to \mathbf{C}$ une application. Supposons que f vérifie les hypothèses suivantes.*

(a) *Pour tout $x \in U$ la fonction $f_x : \Omega \to \mathbf{C}$ définie comme $f_x(\omega) = f(x, \omega)$ est mesurable.*
(b) *Il existe une fonction mesurable $f_o : \Omega \to \mathbf{C}$ telle que pour presque tout $\omega \in \Omega$ on a $\lim_{x\to a} f(x, \omega) = f_o(\omega)$.*
(c) *Il existe une fonction intégrable $g : \Omega \to \mathbf{R}_+$ telle que $|f_x| \overset{\mu\text{-pp}}{\leq} g$ pour tout $x \in U$.*

Alors on a les propriétés suivantes.

(i) *Les fonctions f_x, $x \in U$, et f_o sont intégrables.*
(ii) $\lim\limits_{x\to a} \int_\Omega |f(x, \omega) - f_o(\omega)|\, \mathrm{d}\mu(\omega) = 0$.
(iii) $\lim\limits_{x\to a} \int_\Omega f(x, \omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega) = \int_\Omega f_o\, \mathrm{d}\mu$.

Preuve. L'hypothèse (c) donne l'inégalité $|f_x| \overset{\mu\text{-pp}}{\leq} g$, donc par [9.7.iii] cette fonction est intégrable.

Soit maintenant $x_n \in U$ une suite arbitraire vérifiant $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. On définit la suite de fonctions $g_n : \Omega \to \mathbf{C}$ par $g_n(\omega) = f(x_n, \omega)$. Fixons maintenant un $\omega \in \Omega$ tel que $\lim_{x\to a} f(x, \omega) = f_o(\omega)$ et considérons la fonction $F : U \to \mathbf{K}$ définie par $F(x) = f(x, \omega)$. On a donc $\lim_{x\to a} F(x) = f_o(\omega)$. Si on applique [20.2] on en déduit qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} f(x_n, \omega) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = f_o(\omega)\ .$$

La conclusion est que la suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque partout vers la fonction f_o. De plus, par (c) on a pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'inégalité $|g_n| \overset{\mu\text{-pp}}{\leq} g$. La suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie donc les hypothèses du théorème de convergence dominée [10.5]. On a donc les conclusions de ce théorème : la fonction f_o est intégrable et on a les limites

$$(20.4) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |g_n - f_o| \,\mathrm{d}\mu = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f_o \,\mathrm{d}\mu \ .$$

Notons maintenant que l'application $\omega \mapsto |f(x,\omega) - f_o(\omega)|$ est mesurable par [9.10], [3.10] et le fait que $\omega \mapsto f(x,\omega)$ et f_o sont intégrables. Si on regarde la fonction $F : U \to \mathbf{C}$ définie par

$$F(x) = \int_\Omega |f(x,\omega) - f_o(\omega)| \,\mathrm{d}\mu(\omega) \ ,$$

alors on vient de montrer dans (20.4) qu'on a $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0$. Vu que la suite x_n était arbitraire, on peut appliquer [20.2] pour conclure qu'on a $\lim_{x\to a} F(x) = 0$, ce qui veut dire qu'on a montré (ii).

Pour terminer on regarde la fonction $F : U \to \mathbf{C}$ définie par

$$F(x) = \int_\Omega f(x,\omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega) \ .$$

Dans (20.4) on a aussi montré qu'on a $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \int_\Omega f_o \,\mathrm{d}\mu$. De nouveau parce que la suite x_n est arbitraire peut-on appliquer [20.2] pour conclure qu'on a $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \int_\Omega f_o \,\mathrm{d}\mu$, ce qui veut dire qu'on a montré (iii). $\boxed{CQFD}$

20.5 Nota Bene. Comme pour le théorème original de convergence dominée [10.5], il faut trouver deux fonctions f_o et g sur Ω pour vérifier les hypothèses (b) et (c) dans [20.3]. Par contre, la recherche de ces deux fonctions est un peu plus délicate que décrit dans [10.9]. Même si la fonction $f : U \times \Omega \to \mathbf{C}$ vérifie l'hypothèse (a), il est nullement garanti que la fonction $h : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définie comme

$$h(\omega) = \sup_{x\in U} |f(x,\omega)|$$

est mesurable, ni que l'ensemble A défini comme

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \lim_{x\to a} f(x,\omega) \text{ existe dans } \mathbf{C}\}$$

est mesurable (voir [20.8]).

Pour la recherche de la fonction f_o la situation est relativement facile. Si f_o vérifiant l'hypothèse (b) existe, alors forcément A est de complémentaire négligeable. Pour montrer que cette condition est aussi suffisante, on suppose que A est de complémentaire négligeable et on choisit au hasard une suite $x_n \in U$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. La suite de fonctions $f_n(\omega) = f(x_n,\omega)$ est une suite de fonctions mesurables et l'ensemble B défini comme

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{ existe dans } \mathbf{C}\}$$

est mesurable [3.17] et contient A. La fonction $f_o : \Omega \to \mathbf{C}$ définie comme

$$f_o(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \quad \text{si } \omega \in B \qquad \text{et} \qquad f_o(\omega) = 0 \quad \text{si } \omega \in B^c$$

est donc mesurable et pour presque tout ω on a $\lim_{x\to a} f(x,\omega) = f_o(\omega)$.

Pour la recherche de la fonction g la situation est moins évidente. Si la fonction h est intégrable, alors elle fait l'affaire. Mais il est bien possible que h est mesurable, que h n'est pas intégrable et qu'il existe quand même une fonction g vérifiant l'hypothèse (c) (voir [20.8]). Heureusement des telles situations n'arrivent presque jamais dans les applications de tous les jours ; là la fonction h est mesurable et il suffit, comme dans [10.9], de vérifier si h est intégrable.

20.6 Application (continuité sous le signe $\int$). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $U \subset \mathbf{R}^d$ et soit $f : U \times \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction vérifiant les hypothèses suivantes.*

(a) *Pour tout $x \in U$ la fonction $f_x : \Omega \to \mathbf{C}$ définie comme $f_x(\omega) = f(x,\omega)$ est mesurable.*

(b) *Pour tout $a \in U$ et pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$ on a $\lim_{x\to a} f(x,\omega) = f(a,\omega)$.*

(c) *Il existe une fonction intégrable $g : \Omega \to \mathbf{R}_+$ telle que $|f_x| \overset{\mu\text{-pp}}{\leq} g$ pour tout $x \in U$.*

Avec ces hypothèses les fonctions $\omega \mapsto f(x,\omega)$, $x \in U$ sont intégrables et la fonction $F : U \to \mathbf{C}$ définie par

$$F(x) = \int_\Omega f(x,\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$$

est continue sur U.

Preuve. $\boxed{CQFD}$

20.7 Nota Bene. À première vue on pourrait avoir l'impression que l'hypothèse (b) dans [20.6] a deux quantificateurs universels et donc qu'on pourrait les échanger en disant que pour μ-presque tout ω pour tout $a \in U$ on a $\lim_{x\to a} f_x(\omega) = f_a(\omega)$. Malheureusement (ou plutôt heureusement) ce n'est pas le cas : la condition de μ-presque tout ω contient un quantificateur existentiel (voir [6.15]). L'hypothèse (b) s'écrit donc comme

$$\forall a \in U \ \exists A \in \mathcal{F} \ : \mu(A^c) = 0 \text{ et } \forall \omega \in A : \lim_{x\to a} f_x(\omega) = f_a(\omega) \ .$$

L'hypothèse (b) n'est donc pas la même chose que la condition que pour μ-presque tout ω pour tout $a \in U$ on a $\lim_{x\to a} f_x(\omega) = f_a(\omega)$, car ce dernier s'écrit comme

$$\exists A \in \mathcal{F} \ : \mu(A^c) = 0 \text{ et } \forall \omega \in A \ \forall a \in U : \lim_{x\to a} f_x(\omega) = f_a(\omega) \ .$$

La différence est que dans le premier cas l'ensemble A peut varier avec $a \in U$, tandis que dans le deuxième cas c'est le même A pour tout $a \in U$. L'hypothèse (b) telle qu'elle est formulée est donc la moins forte des deux.

Si on regarde bien, une remarque similaire est valable pour les hypothèses (c) dans [20.3] et [20.6], car elles disent que pour tout $x \in U$ et pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$ on a $|f(x,\omega)| \leq g(\omega)$. Une telle condition est donc moins forte que la condition que pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $x \in U$ on a $|f(x,\omega)| \leq g(\omega)$. Notons que ceci veut dire que pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$ on a la condition $\sup_{x\in U} |f(x,\omega)| \leq g(\omega)$. Dans [20.8] on verra la différence entre ces deux conditions.

Par contre, si l'ensemble U est dénombrable (comme c'est le cas pour l'hypothèse (b) dans [10.5]), alors les deux conditions sont équivalentes. La raison est que la réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable [6.20] (voir l'ensemble B dans la preuve de [10.5]).

20.8 Exemple. Soit $(\,]0,1\,], \mathcal{B}, \lambda)$ l'espace mesuré de l'intervalle $]\,0,1\,]$ muni de la tribu de Borel et la (restriction de la) mesure de Lebesgue et soit $X = \,]\,0,1\,]$. On se fixe un sous-ensemble $F \subset \,]\,0,1\,]$ qu'on ne précise pas pour le moment. Dans $X \times \Omega = \,]\,0,1\,] \times \,]\,0,1\,]$ on définit l'ensemble G comme

$$G = \{(x,\omega) \in X \times \Omega \mid \exists n \in \mathbf{N} : \omega = nx\} \ .$$

DESSIN

On définit maintenant la fonction $f : X \times \Omega \to [\,0,1\,] \subset \mathbf{C}$ par

$$f(x,\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in F \text{ et } (x,\omega) \in G \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Une autre façon de définir f est de dire que c'est la fonction indicatrice de l'ensemble $G \cap (X \times F)$. Pour un x fixé il n'existe qu'un nombre fini de ω tel que $(x,\omega) \in G$, donc l'application $\omega \mapsto f(x,\omega)$ est nulle sauf en un nombre fini de points. Il s'ensuit que cette application est mesurable. Par contre, pour tout ω il existe un x tel que $(x,\omega) \in G$. On en déduit que la fonction $h : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définie comme

$$h(\omega) = \sup_{x\in X} |f(x,\omega)|$$

est donnée par la formule

$$\sup_{x\in X} |f(x,\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega \in F \\ 0 & \omega \notin F \ , \end{cases}$$

c'est-à-dire : $h = \mathbf{1}_F$.

Presque le même raisonnement montre qu'on a le résultat suivant concernant la limite :

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x,\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin F \\ \text{n'existe pas} & x \in F \ . \end{cases}$$

Si l'ensemble F n'est pas mesurable ni négligeable (et de tels ensembles existent par [25.2]), alors la fonction h n'est pas mesurable et l'ensemble où la limite existe n'est pas mesurable ni négligeable. Cette exemple montre donc la différence entre une *suite* de fonctions mesurables et une *famille quelconque* de fonctions mesurables. Pour l'une la fonction sup et l'ensemble où la limite existe sont toujours mesurables (dans des sens différents), tandis que pour l'autre on ne peut pas l'affirmer en toute généralité.

Fixons maintenant $a \in X$. Alors la fonction $\omega \mapsto f(a,\omega)$ est nulle sauf en un nombre fini de points. Soit $\omega \in \,]0,1]$ tel que $f(a,\omega) = 0$. Étant donné que l'ensemble G est fermé dans $]0,1]^2 = X \times \Omega$, le point (a,ω) appartient à l'ouvert $X \times \Omega \setminus G$ sur lequel la fonction f est identiquement nulle. Il s'ensuit que $\lim_{x\to a} f(x,\omega) = f(a,\omega)$. Ainsi on a montré que pour tout $a \in X$ et λ-presque tout $\omega \in \Omega$ (à savoir partout sauf en un nombre fini de points) on a $\lim_{x\to a} f(x,\omega) = f(a,\omega)$.

Pour savoir si on a la condition que pour λ-presque tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $a \in X$ on a $\lim_{x\to a} f(x,\omega) = f(a,\omega)$, on raisonne comme suit. Pour $\omega \in F$ on a en particulier $f(\omega,\omega) = 1$ et "donc" on n'a pas $\lim_{x\to\omega} f(x,\omega) = f(\omega,\omega)$ car pour tout $x \in \,]\frac{1}{2}\omega, 1[\, \setminus \{\omega\}$ on a $f(x,\omega) = 0$. On en déduit que l'ensemble dans Ω où on peut avoir $\lim_{x\to a} f(x,\omega) = f(a,\omega)$ pour tout $a \in X$ est disjoint de F. Si on avait choisi un F non-négligeable, on n'aurait donc pas la condition que pour presque tout ω et pour tout $a \in X$ on a $\lim\limits_{x\to a} f(x,\omega) = f(a,\omega)$.

Regardons maintenant les conditions (c) dans [20.3] et [20.6]. Pour tout $x \in X$ la fonction $f_x(\omega) = f(x,\omega)$ est nulle sauf en un nombre fini de points. Elle est donc majorée λ-presque partout par la fonction intégrable nulle. Mais si F n'est pas λ-négligeable, la fonction $h = \sup_{x\in X} f_x = \mathbf{1}_F$ n'est pas λ-presque partout majorée par la fonction nulle. Par contre, h est majorée par la fonction intégrable 1.

Pour compliquer les choses un peu plus, on change la fonction f légèrement en posant

$$f(x,\omega) = \begin{cases} n & \omega \in F \text{ et } \omega = nx \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On vérifie facilement que la fonction $h : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ définie comme

$$h(\omega) = \sup_{x\in X} |f(x,\omega)|$$

est donnée par la formule

$$h(\omega) = \infty \quad \text{si } \omega \in F \qquad , \qquad h(\omega) = 0 \quad \text{si } \omega \notin F\ .$$

On a toujours que pour tout $x \in X$ la fonction $f_x(\omega) = f(x,\omega)$ est nulle sauf en un nombre fini de points et donc qu'elle est majorée λ-presque partout par la fonction intégrable nulle. Par contre, si F n'est pas négligeable, il n'existe aucune fonction intégrable qui majore h. On est donc dans la situation décrite dans [20.5] où la fonction h est mesurable (si F est choisi mesurable), où h n'est pas intégrable, mais où il existe quand même une fonction intégrable qui pour tout $x \in X$ majore presque partout la fonction f_x.

20.9 Application (dérivabilité sous le signe $\int$). *Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré, soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$ et soit $U \subset \mathbf{R}^d$ un ouvert. Soit finalement $f : U \times \Omega \to \mathbf{K}$ une fonction.*

On suppose que f a les propriétés suivantes :

(i) *pour tout $x \in U$ l'application $f_x : \Omega \to \mathbf{K}$, $\omega \mapsto f(x, \omega)$ est intégrable ;*
(ii) *il existe un ensemble mesurable $A \subset \Omega$ de complémentaire négligeable tel que pour tout $\omega \in A$ l'application $f^\omega : U \to \mathbf{K}$, $x \mapsto f(x, \omega)$ est dérivable (sur U) ;*
(iii) *il existe une fonction intégrable $g : \Omega \to \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $x \in U$ et pour presque tout $\omega \in A$ on a la majoration $|(f^\omega)'(x)| \le g(\omega)$.*

Avec ces hypothèses on définit la fonction $\widehat{f} : U \times \Omega \to \mathbf{K}$ par

$$\widehat{f}(x, \omega) = (f^\omega)'(x) \quad \text{si } \omega \in A \qquad \text{et} \qquad \widehat{f}(x, \omega) = 0 \quad \text{si } \omega \in A^c \ .$$

Sous ces conditions les fonctions $\omega \mapsto \widehat{f}(x, \omega)$, $x \in U$ sont intégrables, la fonction $F : U \to \mathbf{K}$ définie par $F(x) = \int_\Omega f(x, \omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega)$ est dérivable sur U et

$$\forall x \in U \quad : \quad F'(x) = \int_\Omega \widehat{f}(x, \omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega) \ .$$

20.10 Abus de notation utile. Dans l'énoncé de [20.9] on se retrouve avec un phénomène qu'on a déjà rencontré dans le théorème de Fubini [13.2] : la dérivée de la fonction f par rapport à x n'existe pas partout et on est obligé d'introduire la fonction $\widehat{f}$ en complétant cette dérivée par 0 sur un ensemble négligeable. Comme pour le théorème de Fubini, l'usage veut qu'on prétende que cette dérivée existe partout et qu'on écrive la formule

$$F'(x) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega) \ .$$

Preuve. $\boxed{CQFD}$

→ **20.11 Application (convergence normale).** *Soit $U \subset \mathbf{R}^d$, soit $a \in \overline{U}$, soit $f_n : U \to \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N}$ avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ une suite de fonctions et soit $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres positifs. Supposons que les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) $\lim_{x \to a} f_n(x)$ *existe pour tout $n \in \mathbf{N}$,*
(b) *pour tout $x \in U$ et tout $n \in \mathbf{N}$ on a $|f_n(x)| \le b_n$,*
(c) $\sum_{n \in \mathbf{N}} b_n < \infty$.

Alors les séries $\sum_{n \in \mathbf{N}} f_n(x)$, $x \in U$ et $\sum_{n \in \mathbf{N}} \lim_{x \to a} f_n(x)$ sont absolument convergentes et on a l'égalité

$$\lim_{x \to a} \sum_{n \in \mathbf{N}} f_n(x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \lim_{x \to a} f_n(x) \ .$$

21. Le théorème de changement de variables

21.1 Théorème (de changement de variable). *Soit A et B deux ouverts de $\mathbf{R}^d$ et soit $\Phi : A \to B$ un C^1-difféomorphisme, c'est-à-dire Φ est bijective, dérivable, à dérivée continue et inversible : $\Phi'(x)$ est une matrice $d \times d$ inversible pour tout $x \in A$. On considère l'espace mesuré $(A, \mathcal{B}(A), \lambda)$, l'espace mesurable $(B, \mathcal{B}(B))$ et l'application mesurable $\Phi : A \to B$. Alors on a l'égalité*

$$\mathrm{d}(\lambda \circ \Phi^{-1}) = |\mathrm{Jac}(\Phi^{-1})| \cdot \mathrm{d}\lambda \ ,$$

où $\mathrm{Jac}(\Psi) = \det(\Psi')$ *désigne le* Jacobien *(i.e., le déterminant de la matrice Jacobienne) d'une fonction différentiable $\Psi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Autrement dit : la mesure image $\lambda \circ \Phi^{-1}$ est une mesure à densité h par rapport à la mesure de Lebesgue (sur B) où la fonction de densité est donné par*

$$h(y) = |\mathrm{Jac}(\Phi^{-1})(y)| = \frac{1}{|\mathrm{Jac}(\Phi)(\Phi^{-1}(y))|} \ .$$

Preuve. $\boxed{CQFD}$

21.2 Corollaire. *Soit A et B deux ouverts de $\mathbf{R}^d$ et soit $\Phi : A \to B$ un C^1-difféomorphisme. Alors une fonction $f : B \to \mathbf{K}$ avec $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$ est $\lambda \circ \Phi^{-1}$-intégrable sur B si et seulement si $f \circ \Phi$ est λ-intégrable sur A. Si c'est le cas on a l'égalité*

$$\int_A f(\Phi(x))\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_B f(y) \cdot |\mathrm{Jac}(\Phi^{-1})(y)|\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_B \frac{f(y)}{|\mathrm{Jac}(\Phi)(\Phi^{-1}(y))|}\,\mathrm{d}\lambda(y) \ .$$

On réécrit cette formule souvent sous la forme

$$\int_A f(\Phi(x)) \cdot |\mathrm{Jac}(\Phi)(x)|\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\Phi(A)} f(y)\,\mathrm{d}\lambda(y) \ .$$

22. Une application du théorème de changement de variables

22.1 Le problème à résoudre. Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B})$, $D \subset \mathbf{R}^d$ un sous-ensemble mesurable ($D \in \mathcal{B}$) et $\Phi : D \to \mathbf{R}^q$ une application mesurable. Par abus de notation on note la restriction de μ à $\mathcal{B}(D) = \mathcal{B}_D \equiv \{D \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ toujours par μ (voir [6.6]) et on considère l'espace mesuré $(D, \mathcal{B}(D), \mu)$. Le problème qu'on veut regarder est le suivant :

$$\text{comment calculer la mesure image } \nu = \mu \circ \Phi^{-1}.$$

Posé comme cela, il n'y a pas une procédure bien précise qui donne la réponse. C'est pourquoi on va imposer des conditions supplémentaires qui nous permettent d'appliquer le théorème de changement de variables.

Deux conditions sautent aux yeux quand on pense au théorème de changement de variables : la mesure μ devrait être une mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ^d sur $\mathbf{R}^d$, sinon on n'aura nulle part la mesure de Lebesgue (d'une façon naturelle) qui figure dans le théorème de changement de variables ; et les dimensions au départ et à l'arrivée devraient être égales ($d = q$), sinon il n'y aura pas d'espoir d'avoir un difféomorphisme (local). Mais ces deux conditions seules ne suffisent pas pour pouvoir appliquer le théorème de changement de variables, car pour cela il nous faut de vrais difféomorphismes.

22.2 Les hypothèses supplémentaires. L'idée cruciale est de couper $\mathbf{R}^d$, vu comme espace de départ et d'arrivée, en morceaux tels que Φ établit un difféomorphisme entre ces morceaux. Plus précisément on suppose qu'on a deux façons d'écrire $\mathbf{R}^d$ comme une réunion disjointe

$$\mathbf{R}^d = A_0 \cup \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{(au départ)} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{R}^d = B_0 \cup \bigcup_{j \in J} B_j \quad \text{(à l'arrivée)}$$

d'une telle façon que les quatre hypothèses suivantes soient vérifiées.

(i) *L'ensemble B_0 a une ν-mesure nulle :* $\nu(B_0) = \mu(\Phi^{-1}(B_0)) = 0$.

L'ensemble B_0 représente la partie de $\mathbf{R}^d$ (vu comme l'espace d'arrivée) qui ne compte pas pour la mesure ν. Il contient donc en particulier le complémentaire de l'image : $\mathbf{R}^d \setminus f(D) \subset B_0$.

(ii) *Les A_i, $i \in I$ et B_j, $j \in J$ sont des ouverts de $\mathbf{R}^d$.*

Le théorème de changement de variables utilise un difféomorphisme entre deux *ouverts,* d'où la condition que ces ensembles soient des ouverts.

(iii) *Pour chaque $j \in J$ il existe $i \in I$ et pour chaque $i \in I$ il existe $j \in J$ tel que Φ établit un difféomorphisme entre A_i et B_j.*

Cette condition est le cœur de l'approche, car c'est dans cette condition qu'on récupère les difféomorphismes nécessaires pour pouvoir appliquer le théorème de changement de variables. Notons tout de suite quelques conséquences importantes de cette condition.

D'abord, vu que Φ s'applique, chaque A_i doit être contenu dans le domaine D de Φ et chaque B_j doit être contenu dans l'image de Φ : $\cup_{i \in I} A_i \subset D$ et $\cup_{j \in J} B_j \subset \Phi(D)$. Et ensuite, vu que Φ est une application et que les B_j sont disjoints, le $j \in J$ qui correspond à un $i \in I$ est unique. Par contre, le $i \in I$ qui correspond à un $j \in J$ n'est pas forcément unique. Il s'ensuit que le cardinal de I doit être supérieur ou égal au cardinal de J.

L'inclusion $\cup_{i\in I} A_i \subset D$ implique que A_0 doit contenir le complémentaire du domaine de définition de Φ : $\mathbf{R}^d \setminus D \subset A_0$. Mais rien n'empêche que A_0 contienne plus que ça. En particulier (presque) toute partie E de D qui a une mesure de Lebesgue nulle peut être mise dans A_0. Si $\Phi^{-1}(\Phi(E)) = E$ et si on met la partie correspondante $\Phi(E)$ dans B_0 on maintient l'hypothèse 1 parce que toute partie de mesure de Lebesgue nulle a aussi une μ-mesure nulle. C'est ainsi qu'on peut réaliser l'hypothèse que les A_i soient ouverts.

(iv) *I et J sont des ensembles dénombrables (finis ou infinis).*

On veut regarder la mesure ν sur chaque B_j séparément et reconstituer la mesure sur $\mathbf{R}^d$ entier à partir de ces morceaux. Vu qu'on a l'intention de le faire à l'aide de la σ-additivité, J doit être dénombrable. On obtiendra des sommes sur l'ensemble I (ou sur des sous-ensembles de I). Vu que la notion d'intégrale ne sait pas manipuler des sommes sur des ensembles non-dénombrables, on demande que I aussi soit dénombrable. (On adapte les hypothèses à ce qu'on sait faire !)

22.3 Quelques notations supplémentaires. Pour chaque $j \in J$ on définit l'ensemble $I_j \subset I$ comme

$$I_j = \{ i \in I \mid \ \Phi \text{ établit un difféomorphisme entre } A_i \text{ et } B_j \} \ .$$

Par l'hypothèse (iii) chaque I_j n'est pas vide et par l'hypothèse (iv) il contient un nombre dénombrable (fini ou infini) d'éléments. On note la restriction de Φ à l'ensemble A_i, $i \in I$ par Φ_i : $\Phi_i \equiv \Phi|_{A_i} : A_i \to B_j$ (pour le $j \in J$ qui est déterminé d'une façon unique par $i \in I$). Ainsi Φ_i est un difféomorphisme entre A_i et B_j, c'est-à-dire que Φ_i est bijective dérivable et sa réciproque $\Phi_i^{-1} : B_j \to A_i$ est aussi dérivable.

22.4 Théorème. *Soit μ une mesure à densité g par rapport à la mesure de Lebesgue λ^d sur $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B})$, soit $D \subset \mathbf{R}^d$ un sous-ensemble mesurable ($D \in \mathcal{B}$) et soit $\Phi : D \to \mathbf{R}^d$ une application mesurable. Soient*

$$\mathbf{R}^d = A_0 \cup \bigcup_{i\in I} A_i = B_0 \cup \bigcup_{j\in J} B_j$$

deux réunions disjointes vérifiant les hypothèses [22.2.i-iv]. Alors la mesure image $\nu = \mu \circ \Phi^{-1}$ est une mesure à densité h par rapport à la mesure de Lebesgue λ^d sur $\mathbf{R}^d$ où la fonction h est donnée par

$$h(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in B_0, \\ \displaystyle\sum_{i\in I_j} \frac{g(\Phi_i^{-1}(y))}{|\mathrm{Jac}(\Phi)(\Phi_i^{-1}(y))|} & \text{si } y \in B_j, \end{cases}$$

ce qu'on peut résumer comme $h(y) = \displaystyle\sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} \frac{g(f_i^{-1}(y))}{|\mathrm{Jac}(\Phi)(\Phi_i^{-1}(y))|} \cdot \mathbf{1}_{B_j}(y).$

22.5 Nota Bene. Quand on parle de *la* fonction h (de densité par rapport à la mesure de Lebesgue), c'est un abus de language, car on sait que la fonction de densité n'est pas déterminée d'une façon unique par la mesure [19.11]. On aurait donc du dire que *une* fonction de densité h est donné par la formule.

Preuve. Pour montrer le résultat, il suffit de montrer qu'on a l'égalité

$$\nu(B) = \int_B h(y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y)$$

pour tout Borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^q)$. Compte tenu de la σ-additivité d'une mesure (ν en l'occurrence) et le fait que la réunion $\mathbf{R}^d = B_0 \cup (\cup_{j\in J} B_j)$ est disjointe et dénombrable, il suffit de montrer la formule dans le cas où B est contenu dans un des B_0 ou B_j, $j \in J$.

• Si $B \subset B_0$, alors $\int_B h(y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y) = 0$. Mais par l'hypothèse (i) on a aussi $0 \le \nu(B) \le \nu(B_0) = \mu(\Phi^{-1}(B_0)) = 0$. Donc dans ce cas l'égalité est établie.

• Si $B \subset B_j$, alors on définit les ensembles $C_i \subset A_i$ pour $i \in I_j$ comme l'image réciproque de B par l'application $\Phi_i : A_i \to B_j$: $C_i = \Phi_i^{-1}(B)$. Ainsi on a l'égalité

$$\Phi^{-1}(B) = \bigcup_{i\in I_j} C_i\ .$$

Par définition de la mesure image on a donc

$$\begin{aligned}\nu(B) &= \mu(\Phi^{-1}(B)) = \mu(\bigcup_{i\in I_j} C_i) = \sum_{i\in I_j} \mu(C_i) = \sum_{i\in I_j} \int_{C_i} g(x)\,\mathrm{d}\lambda^d(x)\\ &= \sum_{i\in I_j} \int_{A_i} \mathbf{1}_{C_i}(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\lambda^d(x)\ ,\end{aligned} \tag{22.6}$$

où la troisième égalité découle de la σ-additivité de μ et du fait que I_j est dénombrable et que les C_i sont disjoints. Si on applique maintenant [21.2] au difféomorphisme $\Phi_i : A_i \to B_j$ et à la fonction $f = (\mathbf{1}_{C_i}\cdot g)\circ\Phi_i^{-1} = (g\circ\Phi_i^{-1})\cdot\mathbf{1}_B$, on obtient l'égalité

$$\int_{A_i} \mathbf{1}_{C_i}\cdot g\,\mathrm{d}\lambda^d = \int_{B_j} \frac{g(\Phi_i^{-1}(y))\cdot\mathbf{1}_B(y)}{|\mathrm{Jac}(\Phi)(\Phi_i^{-1}(y))|}\,\mathrm{d}\lambda^d(y)\ .$$

Si on substitue ceci dans (22.6) on obtient

$$\begin{aligned}\nu(B) &= \sum_{i\in I_j} \int_{B_j} \frac{g(\Phi_i^{-1}(y))\cdot\mathbf{1}_B(y)}{|\mathrm{Jac}(\Phi)(\Phi_i^{-1}(y))|}\,\mathrm{d}\lambda^d(y)\\ &= \sum_{i\in I_j} \int_{B} \frac{g(\Phi_i^{-1}(y))}{|\mathrm{Jac}(\Phi)(\Phi_i^{-1}(y))|}\,\mathrm{d}\lambda^d(y)\\ &\overset{[8.9]\text{ ou }[15.11]}{=} \int_B \sum_{i\in I_j} \frac{g(\Phi_i^{-1}(y))}{|\mathrm{Jac}(\Phi)(\Phi_i^{-1}(y))|}\,\mathrm{d}\lambda^d(y)\ .\end{aligned}$$

Ainsi on a montré que la formule pour h est vraie dans le cas $B \subset B_j$. $\boxed{CQFD}$

22.7 Exemple. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ et soit $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application $\Phi(x) = x^2$. Dans [19.27] on a déjà calculé la mesure image $\lambda \circ \Phi^{-1}$ comme étant la mesure à densité h par raport à la mesure de Lebesgue avec h donnée par

$$h(y) = \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \ ,$$

mais reprenons-le ici en appliquant [22.4] (avec la fonction g constante égale à 1).

On pose $A_0 = \{0\}$, $B_0 = \,]-\infty, 0\,]$, $A_1 = B_1 = \,]0,\infty[$ et $A_2 = \,]-\infty,0[$. Ainsi $\lambda(\Phi^{-1}(B_0)) = \lambda(\{0\}) = 0$ et Φ établit bien un difféomorphisme entre les ouverts A_1 et B_1 ainsi qu'entre A_2 et B_1. Les applications réciproques $\Phi_1^{-1} : B_1 \to A_1$ et $\Phi_2^{-1} : B_1 \to A_2$ sont données par $\Phi_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$ et $\Phi_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$. De plus, le Jacobien (ici simplement sa dérivée) est donnée par $\mathrm{Jac}(\Phi)(x) = \Phi'(x) = 2x$. La mesure image est donc à densité h donnée par

$$h(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in B_0 = \,]-\infty, 0\,], \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{|2\Phi_i^{-1}(y)|} = \frac{1}{\sqrt{y}} & \text{si } y \in B_1 = \,]0, \infty[. \end{cases}$$

On retrouve donc bien le résultat antérieur.

22.8 Exemple. Soit μ la mesure à densité g sur $\mathbf{R}$ et soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application $f(x) = |x|$. On pose, comme dans [22.7], $A_0 = \{0\}$, $B_0 = \,]-\infty, 0\,]$, $A_1 = B_1 = \,]0,\infty[$ et $A_2 = \,]-\infty, 0[$. L'application f établit un difféomorphisme entre les ouverts A_1 et B_1 ainsi qu'entre A_2 et B_1. Le Jacobien est donné (en valeur absolue) par $|\mathrm{Jac}(f)(x)| = |f'(x)| = 1$ et les applications réciproques f_1^{-1} et f_2^{-1} sont données par $f_1^{-1}(y) = -y$ et $f_2^{-1}(y) = y$. On obient donc la densité h de la mesure image comme la fonction

$$h(y) = \sum_{i=1}^{2} \frac{g(f_i^{-1}(y))}{1} \cdot \mathbf{1}_{B_1}(y) = \big(\, g(-y) + g(y)\,\big) \cdot \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y) \ .$$

22.9 Exemple. Soit μ la mesure à densité g sur $\mathbf{R}$ et soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ l'application $f(x) = \sqrt{x}$. On pose $A_0 = B_0 = \,]-\infty, 0\,]$ et $A_1 = B_1 = \,]0,\infty[$. Ainsi f établit bien un difféomorphisme entre les ouverts A_1 et B_1 et $\mu(f^{-1}(B_0)) = \mu(\{0\}) = 0$.

L'application f_1 est la racine carrée et donc $f_1^{-1}(y) = y^2$. De plus, le Jacobien de f au point x est donné par $\mathrm{Jac}(f)(x) = f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$. La mesure image ν est donc à densité h définie par

$$h(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in B_0 = \,]-\infty, 0\,], \\ \dfrac{g(y^2)}{|\frac{1}{2}(y^2)^{-1/2}|} = 2y\, g(y^2) & \text{si } y \in B_1 = \,]0, \infty[, \end{cases}$$

ce qu'on peut résumer comme $h(y) = 2y\, g(y^2) \cdot \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y)$.

22.10 Exemple. Soit μ la mesure à densité g sur $\mathbf{R}^2$ et soit $f : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2$ l'application $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On pose $A_1 = \,]0,1[\, \times \,]0,2\pi[\,$, $A_0 = \mathbf{R}^2 \setminus A_1$ et

$$B_1 = f(A_1) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1 \text{ et } (y = 0 \Rightarrow x < 0)\}\ ,$$

avec $B_0 = \mathbf{R}^2 \setminus B_1$. L'application f_1 établit bien un difféomorphisme entre les ouverts A_1 et B_1 et

$$\mu(f^{-1}(B_0)) = \mu\big(\ \{(r,\theta) \in \mathbf{R}^2 \mid r = 0 \text{ ou } r = 1 \text{ ou } \theta = 0 \text{ ou } \theta = 2\pi\}\ \big) = 0\ ,$$

où la dernière égalité est une conséquence du fait que l'ensemble $f^{-1}(B_0)$ a une λ_2-mesure nulle. On calcule aisément que $\mathrm{Jac}(f)(r,\theta) = r$. Un calcul plus poussé montre que l'application réciproque est donnée par

$$f_1^{-1}(x,y) = \Big(\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \pi + 2\arctan\Big(\frac{y}{x - \sqrt{x^2+y^2}}\Big)\ \Big)\ ,$$

ce qui est une application bien définie car $x - \sqrt{x^2+y^2}$ ne s'annule pas sur B_1. La mesure image ν est donc à densité h définie par

$$h(x,y) = \frac{g(f_1^{-1}(x,y))}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \mathbf{1}_{B_1}(x,y)\ .$$

22.11 Remarque. L'application f_1^{-1} dans l'exemple ci-dessus est le passage en coordonnées polaires. Le calcul du rayon ne pose pas de problème, mais le calcul de l'angle est nettement plus délicat. Évidemment si $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ on doit avoir $\tan\theta = y/x$. Mais de là on ne peut pas conclure qu'on a $\theta = \arctan(y/x)$. La raison est simple : le domaine de définition de θ est un intervalle I de longueur 2π (lequel dépend des choix qu'on fait) et l'image de l'application arctan est l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de longueur π.

L'idée est de se placer au milieu θ_m de l'intervalle I. Ainsi l'angle $\frac{1}{2}(\theta - \theta_m)$ appartient à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. À l'aide de la formule de doublement

$$\tan(2z) = \frac{2\tan(z)}{1 - \tan(z)^2}$$

on exprime $\tan(\frac{1}{2}(\theta - \theta_m))$ en fonction de $\tan(\theta - \theta_m)$, ce qui s'exprime en général facilement en termes des coordonnées (x,y). Le seul problème est que la solution de $\tan(\frac{1}{2}(\theta - \theta_m))$ en fonction de $\tan(\theta - \theta_m)$ est une solution d'une équation de degré deux. Il y a donc deux solutions possibles. Il faut en choisir la bonne ! Cela se fait par le choix explicite pour θ_m et un argument de continuité pour le reste.

22.12 Exemple. Soit μ la mesure à densité g sur $\mathbf{R}^2$ et soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. (On reconnaît l'application $(x+iy) \mapsto$

$(x+iy)^2 = (x^2-y^2)+i(2xy)$.) On pose $B_0 = \{(u,0) \mid u \le 0\}$ avec $B_1 = \mathbf{R}^2 \setminus B_0$ et on définit $A_0 = \{(x,y) \mid x = 0\}$, $A_1 = \{(x,y) \mid x > 0\}$ et $A_2 = \{(x,y) \mid x < 0\}$. L'application f établit bien un difféomorphisme entre A_1 et B_1 ainsi qu'entre A_2 et B_1. Les applications réciproques sont données par

$$f_1^{-1}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sqrt{u+\sqrt{u^2+v^2}} \ , \ \frac{v}{\sqrt{u+\sqrt{u^2+v^2}}} \Big)$$

$$f_2^{-1}(u,v) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sqrt{u+\sqrt{u^2+v^2}} \ , \ \frac{v}{\sqrt{u+\sqrt{u^2+v^2}}} \Big) \ .$$

Le Jacobien est donnée par la formule $\mathrm{Jac}(f)(x,y) = 4(x^2+y^2)$, ce qui donne pour la densité h de la mesure image la formule

$$h(u,v) = \sum_{i=1}^{2} \frac{g(f_i^{-1}(u,v))}{4\sqrt{u^2+v^2}} \cdot \mathbf{1}_{B_1}(u,v) \ .$$

22.13 Exemple. Soit μ la mesure à densité g sur $\mathbf{R}^2$ et soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application $f(x,y) = (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^x \sin y)$. (On reconnaît l'application $z \mapsto \mathrm{e}^z$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.) Notons tout de suite que l'image $f(\mathbf{R}^2)$ est le plan $\mathbf{R}^2$ privé de l'origine. Ici on pose $B_0 = \{(u,0) \mid u \le 0\}$ avec $B_1 = \mathbf{R}^2 \setminus B_0$. On définit les ouverts A_k pour $k \in \mathbf{Z}$ par

$$A_k = \{(x,y) \mid 2k\pi - \pi < y < 2k\pi + \pi\}$$

et l'ensemble A_0 comme le reste :

$$A_0 = \{(x,y) \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = 2k\pi + \pi\} \ .$$

(Nota Bene : il y a un abus de notation car l'indice 0 apparaît aussi dans la suite des A_k. Que le lecteur me pardonne cet abus.) L'application f établit bien un difféomorphisme entre chaque A_k et B_1. L'application réciproque $f_k^{-1} : B_1 \to A_k$ est donnée par la formule

$$f_k^{-1}(u,v) = (\tfrac{1}{2}\,\ln(u^2+v^2) \ , \ 2k\pi + 2\arctan\Big(\frac{v}{u+\sqrt{u^2+v^2}}\Big) \ ) \ ,$$

ce qui est bien défini car $u+\sqrt{u^2+v^2}$ ne s'annule pas sur B_1. Le Jacobien est donné par $\mathrm{Jac}(f)(x,y) = \mathrm{e}^{2x}$, ce qui donne pour la densité h de la mesure image la formule

$$h(u,v) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{g(f_k^{-1}(u,v))}{u^2+v^2} \cdot \mathbf{1}_{B_1}(u,v) \ .$$

→ **22.14 Exercice.** Vérifier les formules pour les applications réciproques, les Jacobiens et la densité h donnés dans les exemples [22.10], [22.12] et [22.13].

→ **22.15 Exercice.** Dans l'exemple [22.12] on peut aussi poser $B_0 = \{(u,0) \mid u \geq 0\}$ avec $B_1 = \mathbf{R}^2 \setminus B_0$ et $A_0 = \{(x,y) \mid y = 0\}$, $A_1 = \{(x,y) \mid y > 0\}$ et $A_2 = \{(x,y) \mid y < 0\}$. Vérifier qu'avec ces définitions f établit toujours un difféomorphisme entre A_1 et B_1 ainsi qu'entre A_2 et B_1 et calculer les applications réciproques f_1^{-1} et f_2^{-1} dans cette situation.

→ **22.16 Exercice.** Dans l'exemple [22.13] on peut aussi poser $B_0 = \{(u,0) \mid u \leq 0\}$ avec $B_1 = \mathbf{R}^2 \setminus B_0$ et $A_k = \{(x,y) \mid 2k\pi < y < 2k\pi + 2pi\}$ avec l'ensemble A_0 comme le reste : $A_0 = \{(x,y) \mid \exists k \in \mathbf{Z} : y = 2k\pi + \pi\}$. Vérifier que f établit un difféomorphisme entre A_k et B_1 et calculer f_k^{-1}.

23. Les espaces L^p

23.1 Définitions. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}_+$, $\mathbf{R}$, ou $\mathbf{C}$. L'ensemble de toutes les fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbf{K}$ sur Ω est noté $\mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\Omega)$ (ou $\mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\Omega, \mathcal{F})$ s'il y a possibilité de confusion sur la tribu concernée) :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbf{K} \mid \; f \text{ mesurable}\} \ .$$

Pour tout $1 \leq p < \infty$ on définit une application $\|\cdot\|_p : \mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\Omega) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ par

$$\|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \equiv \sqrt[p]{\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu} \ ,$$

et on définit, pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, les sous-ensembles $\mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) \subset \mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\Omega)$ comme l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbf{K}$ pour lesquelles $\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu$ soit finie :

$$\mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) = \Big\{ \ f \in \mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\Omega) \mid \|f\|_p < \infty \ \Big\} \ .$$

Ainsi l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)$ est l'espace des fonctions μ-intégrables.

23.2 Définition. Soit $I \subset \overline{\mathbf{R}}$ un intervalle et soit $f : I \to \overline{\mathbf{R}}$ une fonction. On dit que f est *convexe* si pour tout couple de points $a, b \in I$ la corde reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est au-dessus du graphe de f. Autrement dit :

$$\forall a, b \in I \ \forall \alpha \in [0,1] : f(\alpha a + (1-\alpha b)) \leq \alpha f(a) + (1-\alpha) f(b) \ .$$

DESSIN

On dit que f est concave si cette corde est en-dessous du graphe de f :

$$\forall a, b \in I \ \forall \alpha \in [0,1] : f(\alpha a + (1-\alpha b)) \geq \alpha f(a) + (1-\alpha) f(b) \ .$$

DESSIN

La fonction $\ln : \,]0,\infty[\, \to \mathbf{R}$ est concave et pour tout $1 \leq p < \infty$ la fonction $f : [0,\infty[\, \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^p$ est convexe.

23.3 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, soit $1 \leq p < \infty$ et soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Alors $\mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.*

Preuve. La convexité de la fonction $x \mapsto x^p$ appliquée aux couple de points $a, b \geq 0$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ nous donne l'inégalité

$$\big(\tfrac{1}{2}\, a + \tfrac{1}{2}\, b\big)^p \leq \tfrac{1}{2}\, a^p + \tfrac{1}{2}\, b^p \ .$$

On en déduit (en utilisant aussi la croissance de la fonction $x \mapsto x^p$) que pour deux fonctions $f, g : \Omega \to \mathbf{K}$ et $\omega \in \Omega$ on a les inégalités

$$(23.4) \qquad |f(\omega) + g(\omega)|^p \leq \big(\,|f(\omega)| + |g(\omega)|\,\big)^p \leq 2^{p-1} \cdot \big(\,|f(\omega)|^p + |g(\omega)|^p\,\big) \ .$$

Il s'ensuit que si f et g appartiennent à $\mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)$, alors $f + g$ y appartient aussi. Vu l'égalité $\int_\Omega |\alpha \cdot f|^p \, \mathrm{d}\mu = |\alpha|^p \cdot \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu$ (valabale pour tout $\alpha \in \mathbf{K}$), l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)$ est aussi stable par multiplication par éléments de $\mathbf{K}$. C'est donc un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$. $\boxed{CQFD}$

23.5 Lemme. *Si $p, q \in \,]1,\infty[$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$(23.6) \qquad \forall x, y \in \overline{\mathbf{R}}_+ : x \cdot y \leq \tfrac{1}{p}\, x^p + \tfrac{1}{q}\, y^q \ .$$

Preuve. Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors (23.6) est automatiquement vraie car le membre de gauche est 0. Si $x = \infty$ ou $y = \infty$ (et l'autre strictement positif), alors (23.6) est aussi automatiquement vraie car le membre de droite est ∞. Reste le cas $x, y \in \,]0,\infty[$. La fonction ln étant concave, on a pour tout $a, b \in \,]0,\infty[$ l'inégalité

$$\ln\big(\tfrac{1}{p} a + \tfrac{1}{q} b\big) \geq \tfrac{1}{p} \ln(a) + \tfrac{1}{q} \ln(b) \ ,$$

car $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. On peut donc faire le calcul

$$\ln(xy) = \ln\big((x^p)^{1/p} (y^q)^{1/q}\big) = \tfrac{1}{p} \ln(x^p) + \tfrac{1}{q} \ln(y^q) \leq \ln\big(\tfrac{1}{p} x^p + \tfrac{1}{q} y^q\big) \ .$$

En utilisant que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est croissante, on obtient le résultat annoncé. $\boxed{CQFD}$

23.7 Proposition (l'inégalité de Hölder). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré, soit* $p, q \in \,]1, \infty[$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et soit* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *deux fonctions mesurables positives. Alors on a l'inégalité*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \ . \tag{23.8}$$

Preuve. Notons d'abord qu'on a pour toute fonction mesurable positive h et tout $1 \leq r < \infty$ la relation $(\,\|h\|_r\,)^r = \int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu$, ce qui implique en particulier que $\|h\|_r = 0$ si et seulement si $\int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu = 0$.

Si $\|f\|_p = 0$, alors par ce qui précède et [8.12.ii] $f \overset{\mu\text{-pp}}{=} 0$, donc $f \cdot g \overset{\mu\text{-pp}}{=} 0$, donc de noouveau par [8.12.ii] $\|f \cdot g\|_1 \equiv \int_\Omega f \cdot g \,\mathrm{d}\mu = 0$ et l'inégalité (23.8) est vraie. Le même argument s'applique si $\|g\|_q = 0$. Si $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q = \infty$, alors $\|f\|_p \cdot \|g\|_q = \infty$ et (23.8) est automatiquement vraie. Le même argument s'appliquant évidemment au cas $\|f\|_p = \infty$ et $\|g\|_q > 0$, on a montré le résultat pour les cas $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ ou $\|f\|_p = \infty$ ou $\|g\|_q = \infty$. Il nous reste donc de montrer le résultat dans le cas $\|f\|_p, \|g\|_q \in \,]0, \infty\,[$.

Pour le faire, soit $\omega \in \Omega$. Si on applique [23.5] aux nombres $f(\omega)/\|f\|_p$ et $g(\omega)/\|g\|_q$, on obtient

$$\frac{f(\omega) \cdot g(\omega)}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\Big(\frac{f(\omega)}{\|f\|_p}\Big)^p + \frac{1}{q}\Big(\frac{g(\omega)}{\|g\|_q}\Big)^q \ .$$

en prenant l'intégrale on obtient donc

$$\frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \int_\Omega f \cdot g \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{p(\,\|f\|_p)^p} \int_\Omega f^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q(\,\|g\|_q)^q} \int_\Omega g^q \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ .$$

En multipliant ceci avec $\|f\|_p \cdot \|g\|_q$ on obtient le résultat. $\boxed{CQFD}$

23.9 Proposition (l'inégalité de Minkowski). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré, soit* $p \in [1, \infty[$ *et soit* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *deux fonctions mesurables positives. Alors on a l'inégalité*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \ . \tag{23.10}$$

Preuve. Pour $p = 1$ on obtient (23.10) en intégrant sur Ω l'inégalité triangulaire $|f(\omega) + g(\omega)| \leq |f(\omega)| + |g(\omega)|$ et en appliquant [8.8].

Pour $p > 1$, soit $q \in \,]1, \infty\,[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. L'inégalité de Hölder [23.7] nous donne les inégalités

$$\int_\Omega f \cdot (f+g)^{p/q} \,\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \cdot \Big(\int_\Omega (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/q}$$
$$\int_\Omega g \cdot (f+g)^{p/q} \,\mathrm{d}\mu \leq \|g\|_p \cdot \Big(\int_\Omega (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/q} \ .$$

L'addition de ces deux inégalités plus l'égalité $1 + p/q = p$ nous donne l'inégalité

$$\int_\Omega (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu \leq (\,\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \Big(\int_\Omega (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/q} \ . \tag{23.11}$$

Si $0 < \int_\Omega (f+g)^p \, \mathrm{d}\mu < \infty$ on peut diviser cette inégalité par $\big(\int_\Omega (f+g)^p \, \mathrm{d}\mu\big)^{1/q}$ pour obtenir l'inégalité (23.10).

Si $\int_\Omega (f+g)^p \, \mathrm{d}\mu = 0$, alors (23.10) est automatiquement vraie. Pour le dernier cas $\int_\Omega (f+g)^p \, \mathrm{d}\mu = \infty$ notons que l'inégalité (23.4) nous donne après intégration l'inégalité

$$\int_\Omega (f+g)^p \, \mathrm{d}\mu \leq 2^{p-1} \cdot \int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu + 2^{p-1} \cdot \int_\Omega g^p \, \mathrm{d}\mu \ ,$$

ce qui montre que si $\int_\Omega (f+g)^p \, \mathrm{d}\mu = \infty$, alors forcément $\int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu$ ou $\int_\Omega g^p \, \mathrm{d}\mu$ vaut ∞. Et donc (23.10) est vraie aussi dans le dernier cas. $\boxed{CQFD}$

23.12 Définition. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Une application $N : E \to \mathbf{R}_+$ est appelée une *semi-norme* si elle vérifie les conditions

(i) $\forall e \in E \ \forall \alpha \in \mathbf{K} : N(\alpha \cdot e) = |\alpha| \cdot N(e)$,
(ii) $\forall e, f \in E : N(e+f) \leq N(e) + N(f)$.

La différence avec une norme est qu'on n'exige pas que $N(e) = 0$ implique $e = 0$.

→ **23.13 Lemme.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré, soit* $1 \leq p < \infty$ *et soit* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$. *Alors l'application* $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) \to \mathbf{R}_+$ *définie comme*

$$\|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}$$

est une semi-norme.

23.14 Discussion. Si $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), C_\Omega)$ est l'espace mesuré fini $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ muni de la mesure de comptage, alors il n'est pas difficile de voir que l'application qui à $f : \Omega \to \mathbf{K}$ (avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) fait correspondre le point $\big(f(1), \ldots, f(n)\big) \in \mathbf{K}^n$ est un isomorphisme entre l'espace vectoriel de toutes les fonctions sur Ω et $\mathbf{K}^n$. Étant donné qu'on a pris la tribu totale, toutes les fonctions sont mesurables et par [15.4] on a l'égalité

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}C_\Omega = \sum_{i=1}^n f(i) \ .$$

Il s'ensuit que toutes les fonctions appartiennent à tous les ensembles $\mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega, C_\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ et qu'on a l'égalité

$$\|f\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |f(i)|^p\Big)^{1/p} \equiv \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |f(i)|^p} \ .$$

Si on prend maintenant la limite $p \to \infty$, un petit calcul montre qu'on a

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \max\big(|f(1)|, \ldots, |f(n)|\big) \ .$$

Il est connu que dans ce cas les semi-normes $\|\cdot\|_p$ sont des vraies normes et que la limite $p\to\infty$ est aussi une norme, souvent notée comme $\|\cdot\|_\infty$. Il est donc naturel de se poser la question si un même phénomène est vrai dans le cas général et si oui, quelle formule on obtient. On peut faire d'emblée deux remarques. D'abord, pour une fonction la notion de maximum n'existe pas en général, on devrait le remplacer par le sup. Et ensuite que si on change une fonction sur un ensemble négligeable, la valeur de la semi-norme $\|\cdot\|_p$ ne change pas. La formule pour la limite devrait donc elle aussi être "invariante" sous changement sur un ensemble négligeable. Ce qui est maintenant remarquable est que ces deux remarques suffisent pour trouver la bonne formule !

23.15 Définition. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré, soit $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et soit $f:\Omega\to\mathbf{K}$ une fonction mesurable. On définit sa *borne supérieure essentielle*, notée $\|f\|_\infty$, par

$$\|f\|_\infty=\inf\{c\in\overline{\mathbf{R}}_+\mid |f|\overset{\mu\text{-pp}}{\leq} c\}\equiv\inf\{c\in\overline{\mathbf{R}}_+\mid \mu(\{\omega\in\Omega\mid f(\omega)>c\})=0\}\ .$$

L'ensemble $\{c\in\overline{\mathbf{R}}_+\mid |f|\overset{\mu\text{-pp}}{\leq} c\}$ contient toujours l'élément ∞, donc l'inf existe toujours et appartient à $\overline{\mathbf{R}}_+$.

23.16 Lemme. *Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré, soit $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, soit $f:\Omega\to\mathbf{K}$ une fonction mesurable et soit $n\in\overline{\mathbf{R}}_+$. Alors $n=\|f\|_\infty$ si et seulement si*

$$\mu(\{\omega\in\Omega\mid f>n\})=0\qquad et\qquad \forall\, a<n:\mu(\{\omega\in\Omega\mid f(\omega)>a\})>0\ .$$

Autrement dit : $f\overset{\mu\text{-pp}}{\leq} n$ et c'est la plus petite valeur avec cette propriété.

Preuve. Soit $N\subset\overline{\mathbf{R}}_+$ l'ensemble

$$N=\{c\in\overline{\mathbf{R}}_+\mid \mu(\{\omega\in\Omega\mid f(\omega)>c\})=0\}\ ,$$

ce qui veut dire que $\|f\|_\infty=\inf N$. Si n vérifie les deux conditions, alors la première dit $n\in N$ et la deuxième dit $a<n\Rightarrow a\notin N$. Il s'ensuit immédiatement qu'on a $n=\inf N$.

Dans l'autre sens il faut montrer que $n=\inf N$ possède les deux propriétés. Par définition de l'inf la seconde est automatique, mais la premère dit que $n\in N$, ce qui n'est pas automatiquement vrai : la borne inférieure d'un ensemble n'appartient pas forcément à l'ensemble. Soit $\varepsilon>0$, alors par définition de l'inf il existe $c\in N$ tel que $c<n+\varepsilon$. Par l'inclusion $\{\omega\in\Omega\mid f(\omega)>n+\varepsilon\}\subset\{\omega\in\Omega\mid f(\omega)>c\}$ et la croissance d'une mesure on a $n+\varepsilon\in N$. Mais l'égalité

$$\{\omega\in\Omega\mid f(\omega)>n\}=\cap_{k\in\mathbf{N}^*}\{\omega\in\Omega\mid f(\omega)>n+\tfrac{1}{k}\}$$

et la sous-σ-additivité d'une mesure nous donnent alors les inégalités

$$0\leq\mu(\{\omega\in\Omega\mid f(\omega)>n\})\leq\sum_{k\in\mathbf{N}^*}\mu(\{\omega\in\Omega\mid f(\omega)>n+\tfrac{1}{k}\})=0\ ,$$

où la dernière égalité est le cas $n+\frac{1}{k}\in N$. $\boxed{CQFD}$

23.17 Remarque. On aurait pu définir la borne supérieure essentielle d'une fonction mesurable par les deux propriétés données dans [23.16]. Le désavantage d'une telle définition est qu'il n'est pas évident qu'un tel nombre existe. Et la preuve de l'existence d'un tel nombre passe exactement par la preuve de [23.16]. On n'aurait donc rien gagné.

→ **23.18 Lemme.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré, soit* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ *et soit* $f, g : \Omega \to \mathbf{K}$ *deux fonctions mesurables. Si* $f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g$*, alors* $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$.

23.19 Lemme. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré, soit* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ *et soit* $f : \Omega \to \mathbf{K}$ *une fonction mesurable. S'il existe* $1 \leq r < \infty$ *tel que* $\|f\|_r < \infty$*, alors on a l'égalité*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \ .$$

Preuve. $\boxed{CQFD}$

23.20 Remarque. Il est évident qu'on ne peut pas laisser tomber la condition qu'il existe $1 \leq r < \infty$ tel que $\|f\|_r < \infty$ dans [23.19]. Il suffit de penser à une fonction f constante c non-nulle sur $\mathbf{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout $1 \leq p < \infty$ on a $\|f\|_p = \int_{\mathbf{R}} |c| \,\mathrm{d}\lambda = \infty$, mais $\|f\|_\infty = |c|$.

23.21 Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On définit l'ensemble $\mathcal{L}^\infty_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω pour lesquelles la borne supérieure essentielle est finie :

$$\mathcal{L}^\infty_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) = \{ f \in \mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\Omega) \mid \|f\|_\infty < \infty \} \ .$$

23.22 Lemme. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$*. Alors* $\mathcal{L}^\infty_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbf{K}$ *et l'application* $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) \to \mathbf{R}_+$ *est une semi-norme.*

Preuve. $\boxed{CQFD}$

→ **23.23 Lemme (l'inégalité de Hölder bis).** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *deux fonctions mesurables positives. Alors on a l'inégalité*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty \ . \tag{23.24}$$

23.25 Définitions. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{R}}_+$, $\mathbf{R}$, ou $\mathbf{C}$. Sur l'ensemble $\mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\Omega)$ on définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par

$$f \,\mathcal{R}\, g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g \ .$$

La vérification que c'est bien une relation d'équivalence est laissée au lecteur (pour la transitivité il faut utiliser [6.20]). Pour une fonction $f \in \mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\Omega)$ on note sa classe d'équivalence par $[\,f\,]$:

$$[\,f\,] = \{g \in \mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\Omega) \mid f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g\} \ .$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ on a défini les sous-ensembles $\mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) \subset \mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\Omega)$ qui héritent donc cette relation d'équivalence. Dans ces cas on note l'ensemble des classes d'équivalences par $L^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)$:

$$L^p_{\mathbf{K}} = \mathcal{L}^p_{\mathbf{K}} \,/\, \mathcal{R} = \{\ [\,f\,] \mid f \in \mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)\,\} \ .$$

→ **23.26 Lemme.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré, soit* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ *et soit* $\mathcal{N}_{\mathbf{K}} \subset \mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\Omega)$ *le sous-ensemble défini comme*

$$\mathcal{N}_{\mathbf{K}} = \{f \in \mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\Omega) \mid f \overset{\mu\text{-pp}}{=} 0\,\} \ .$$

Alors pour tout $1 \leq p \leq \infty$ *l'espace* $\mathcal{N}_{\mathbf{K}}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}$ *et on a l'égalité*

$$L^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) = \mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) \,/\, \mathcal{N}_{\mathbf{K}} \ .$$

23.27 Abus de notation très répandu. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Il est d'usage de *confondre* une fonction mesurable $f \in \mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\Omega)$ avec sa classe d'équivalence $[\,f\,]$. Dans cet esprit il est aussi d'usage d'utiliser le *même* symbole pour une application définie sur (un sous-ensemble de) l'ensemble des fonctions mesurables et la fonction induite sur le quotient des classes d'équivalences (à condition bien sûr que l'application est constante sur les classes d'équivalences). Par exemple.

• La valeur de l'intégrale ne dépend pas du choix de la fonction dans sa classe d'équivalence : $f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g \Rightarrow \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$ (à condition que l'intégrale existe). Au lieu de dire qu'il existe une application linéaire $I : L^1_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) \to \mathbf{K}$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)$ on a l'égalité

$$I([\,f\,]) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \ ,$$

on dit que l'application

$$L^1_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) \to \mathbf{K} \quad , \quad f \mapsto \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$$

est linéaire.

• La valeur de $\|f\|_p$, pour $1 \leq p \leq \infty$, ne dépend pas du choix de la fonction dans sa classe d'équivalence $[\,f\,]$: $f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g \Rightarrow \|f\|_p = \|g\|_p$. Au lieu de dire qu'il existe une norme $N_p : L^p_{\mathbf{K}}(\Omega,\mu)$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega,\mu)$ on a l'égalité

$$N_p([\,f\,]) = \|f\|_p \ ,$$

on dit que l'application

$$L^1_{\mathbf{K}}(\Omega,\mu) \to \mathbf{R}_+ \quad , \quad f \mapsto \|f\|_p$$

est une norme.

23.28 Lemme. *Soit* $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ *un espace mesuré et soit* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

(i) *Pour tout* $1 \leq p \leq \infty$ *l'ensemble* $L^p_{\mathbf{K}}(\Omega,\mu)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbf{K}$.

(ii) *Pour tout* $1 \leq p \leq \infty$ *l'application* $\|\cdot\|_p : L^p_{\mathbf{K}}(\Omega,\mu) \to \mathbf{R}_+$ *est une norme.*

(iii) *L'application* $L^1_{\mathbf{K}}(\Omega,\mu) \to \mathbf{K}$, $f \mapsto \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ *est une application* $\mathbf{K}$*-linéaire.*

Preuve. $\boxed{CQFD}$

23.29 Théorème. *Soit* $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ *un espace mesuré, soit* $1 \leq p \leq \infty$ *et soit* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$. *Alors l'espace vectoriel normé* $(L^p_{\mathbf{K}}(\Omega,\mu), \|\cdot\|_p)$ *est complet. C'est donc un espace de Banach.*

Preuve. $\boxed{CQFD}$

23.30 Définition. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré, soit $1 \leq p \leq \infty$ et soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions mesurables (à valeurs dans $\mathbf{K}$) *converge au sens* L^p vers une fonction mesurable f si chaque f_n appartient à $\mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega,\mu)$ et si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Ceci implique automatiquement que f appartient elle aussi à $\mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega,\mu)$ car si $\|f_n - f\|_p < \infty$, alors f_n et $f_n - f$ appartiennent à $\mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega,\mu)$, donc $f = f_n - (f_n - f)$ aussi [23.3], [23.22].

Cette définition est une façon de détourner l'abus de language mentionné dans [23.27]. Officiellement on devrait dire que la suite $([\,f_n\,])_{n\in\mathbf{N}}$ des classes d'équivalences converge dans l'espace vectoriel normé $L^p_{\mathbf{K}}(\Omega,\mu)$ vers la classe $[\,f\,]$. Notre définition évite donc l'usage des classes d'équivalences et introduit directement une notion de convergence sur l'espace des fonctions dans $\mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega,\mu)$.

23.31 Proposition. *Soit* $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ *un espace mesuré, soit* $1 \leq p \leq \infty$, *soit* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ *et soit* f *et* f_n, $n \in \mathbf{N}$, *des éléments de* $\mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega,\mu)$.

(i) *Si* $p < \infty$ *et si la suite* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge au sens* L^p *vers* f *, alors il existe une suite extraite* $(f_{\varphi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ *qui converge presque partout vers* f.

(ii) *Si* $p = \infty$ *et si la suite* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge au sens* L^∞ *vers* f *, alors la suite* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge presque partout vers* f.

23.32 Contre exemple. Avant de donner la preuve de [23.31], signalons qu'on ne peut pas améliorer le (i) en disant que c'est toute la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge presque partout vers f : il existe des suites de fonctions qui ne convergent en aucun point, mais qui convergent quand même au sens L^p (avec $p < \infty$). L'exemple classique est le suivant.

On considère la suite d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{R}$ définie comme

$$\begin{aligned}
&I_0 = [\,0,1\,[\ , \\
&I_1 = [\,0,\tfrac{1}{2^1}\,[\ ,\ I_2 = [\,\tfrac{1}{2^1},\tfrac{2}{2^1}\,[\ , \\
&I_3 = [\,0,\tfrac{1}{2^2}\,[\ ,\ I_4 = [\,\tfrac{1}{2^2},\tfrac{2}{2^2}\,[\ ,\ I_5 = [\,\tfrac{2}{2^2},\tfrac{3}{2^2}\,[\ ,\ I_6 = [\,\tfrac{3}{2^2},\tfrac{4}{2^2}\,[\ , \\
&I_7 = [\,0,\tfrac{1}{2^3}\,[\ ,\ I_8 = [\,\tfrac{1}{2^3},\tfrac{2}{2^3}\,[\ ,\ \ldots
\end{aligned}$$

DESSIN

Autrement dit, on commence avec l'intervalle $[\,0,1\,[$, on le coupe en deux et on met les deux parties dans la suite, ensuite on coupe ces deux morceaux de nouveau en deux et on met les quatre morceaux ainsi obtenus dans la suite, etcætera. Une formule explicite est donnée par

$$I_n = [\,\tfrac{\ell}{2^k},\tfrac{\ell+1}{2^k}\,[\qquad \text{avec} \qquad k = E({}^2\log(n+1)) \quad \text{et} \quad \ell = n+1-2^k\ ,$$

où E désigne la partie entière et ${}^2\log$ le logarithme de base 2. On constate que pour tout $k\in\mathbf{N}$ la réunion

$$[\,0,1\,[\ = \bigcup_{\ell=0}^{2^k-1} I_{2^k-1+\ell} = \bigcup_{\ell=0}^{2^k-1} [\,\tfrac{\ell}{2^k},\tfrac{\ell+1}{2^k}\,[\tag{23.33}$$

est disjointe.

On considère la suite de fonctions $f_n = \mathbf{1}_{I_n} : [\,0,1\,[\ \to \mathbf{R}$ et on calcule aisément

$$\|f_n\|_p = \Big(\int_{[\,0,1\,[} (f_n)^p \,\mathrm{d}\lambda\Big)^{1/p} = \lambda(I_n)^{1/p} = \frac{1}{2^{k/p}} \qquad \text{pour} \qquad k = E({}^2\log(n+1))\ .$$

Il s'ensuit que $\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_p = 0$, ce qui implique que la suite $[\,f_n\,]$ converge au sens L^p vers la fonction nulle. Mais la limite $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ n'existe pour aucun $x\in[\,0,1\,[$. Pour montrer cela, prenons $x\in[\,0,1\,[$ et $k\in\mathbf{N}$. Alors, par la réunion disjointe (23.33), il existe un unique $0\le\ell_o<2^k$ tel que

$$f_{2^k-1+\ell_o}(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall 0\le\ell<2^k : \ell\neq\ell_o \Rightarrow f_{2^k-1+\ell}(x) = 0\ .$$

On en déduit qu'il existe toujours des $n\in\mathbf{N}$ tels que $f_n(x)$ soit 0 ou 1 :

$$\forall N\in\mathbf{N}\ \exists n_0,n_1>N : f_{n_0}(x) = 0 \quad \text{et} \quad f_{n_1}(x) = 1\ . \tag{23.34}$$

Il suffit de choisir $k>N$ ($k>{}^2\log(N)$ fait aussi l'affaire) et de prendre/choisir ℓ_o et ℓ entre 0 et 2^k. La condition (23.34) empêche que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe. La conclusion est que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge certainement pas presque partout vers la fonction nulle.

On peut donner deux raisons pourquoi la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas au sens L^∞ vers la fonction nulle. D'abord parce que $\|f_n\|_\infty = 1 = \lim_{p\to\infty}\|f_n\|_p$, ce qui ne tend pas ver 0 quand n tend vers ∞ et ensuite parce que si elle convergeait au sens L^∞, elle devrait converger presque partout [23.31].

Preuve de [23.31]. $\boxed{CQFD}$

→ **23.35 Exercice.** Trouver une suite extraite $(f_{\varphi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ de la suite donnée dans [23.32] qui converge *partout* vers la fonction nulle.

23.36 Proposition. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *une espace mesuré avec* $\mu(\Omega) < \infty$*, soit* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ *et soit* $1 \le p < r \le \infty$*. Alors on a l'inclusion*

$$\mathcal{L}^r_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) \subset \mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)$$

et, pour tout $f \in \mathcal{L}^r_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)$*, l'inégalité*

$$\|f\|_p \le C \cdot \|f\|_r \qquad \textit{avec} \qquad C = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \ . \tag{23.37}$$

Preuve. Il suffit de montrer (23.37) pour toute fonction $f : \Omega \to \mathbf{R}_+$ mesurable positive, car (i) : l'inclusion $\mathcal{L}^r_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) \subset \mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)$ en découle immédiatement (avec la définition de ces espaces) et (ii) pour une fonction arbitraire dans $\mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)$ on utilise l'égalité évidente $\|f\|_q = \|\,|f|\,\|_q$ valable pour tout $1 \le q \le \infty$.

Soit donc $f : \Omega \to \mathbf{R}_+$ mesurable. Notons qu'on a $p < \infty$. Si on pose $a = \frac{r}{p}$ et $b = 1 + \frac{p}{r-p}$, alors on a $pa = r$ et $\frac{1}{pb} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ mais aussi $1 \le a, b \le \infty$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. On peut donc appliquer les inégalités de Hölder (23.8) et (23.24) aux fonctions f^p et 1 pour obtenir

$$\|f^p\|_1 \equiv \|f^p \cdot 1\|_1 \le \|f^p\|_a \centerdot \|1\|_b \ .$$

En prenant la racine p-ème de cette inégalité on obtient

$$\|f\|_p \le \Big(\int_\Omega (f^p)^a \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/(pa)} \centerdot \Big(\int_\Omega 1 \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/(pb)} = \|f\|_r \centerdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \ . \qquad \boxed{CQFD}$$

23.38 Lemme/Définition. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé avec* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ *et soit* $f : E \to \mathbf{K}$ *une application linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f *est continue.*
(ii) f *est continue en* $0 \in E$*.*
(iii) $\sup\limits_{\|e\|=1} |f(e)| < \infty$*.*

Si une de ces conditions est vérifiée, alors le nombre $\sup\limits_{\|e\|=1} |f(e)|$ *est appelé* la norme d'opérateur de l'application linéaire f.

23.39 Proposition. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré, soit* $1 \le p, q \le \infty$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, soit* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ *et soit* $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)$ *fixé.*

(i) *L'application* $\Phi_g : \mathcal{L}^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) \to \mathbf{K}$ *définie par*

$$\Phi_g(f) = \int_\Omega \overline{g} \cdot f \,\mathrm{d}\mu$$

est une application linéaire bien définie.

(ii) *Si* $p > 1$, *alors* $\sup_{\|f\|_p=1} |\Phi_g(f)| = \|g\|_q$.

(iii) *Si* $p = 1$ *et si* μ *est* σ*-finie, alors* $\sup_{\|f\|_p=1} |\Phi_g(f)| = \|g\|_\infty$.

Preuve. $\boxed{CQFD}$

23.40 Théorème (de Riesz). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré tel que* μ *soit* σ*-finie, soit* $1 \leq p < \infty$, *soit* $1 < q \leq \infty$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ *et soit* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$. *Si* $\Phi : L^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) \to \mathbf{K}$ *est une application linéaire continue, alors il existe une unique* $g \in L^q_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu)$ *telle que*

$$\forall f \in L^p_{\mathbf{K}}(\Omega, \mu) : \Phi(f) = \int_\Omega \overline{g} \cdot f \, \mathrm{d}\mu \ .$$

Preuve. $\boxed{CQFD}$

24. Espaces mesurés complets

24.1 Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que la tribu $\mathcal{F}$ est *complète par rapport à la mesure* μ si tout sous-ensemble contenu dans un ensemble mesurable de mesure nulle est aussi mesurable (et donc de mesure nulle). En formule :

$$A \in \mathcal{F} \text{ et } \mu(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall B \subset A : B \in \mathcal{F} \ .$$

Si c'est le cas, on dira que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un *espace mesuré complet*.

24.2 Proposition. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *l'ensemble défini par*

$$\mathcal{N} = \{N \subset \Omega \mid \exists A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0 \text{ et } N \subset A\} \ ,$$

soit $\overline{\mathcal{F}}^\mu \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *l'ensemble défini par*

$$\overline{\mathcal{F}}^\mu = \{A \cup N \mid A \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\}$$

et soit $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{F}}^\mu \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *l'application définie par* $\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$. *Alors*

(i) $\overline{\mathcal{F}}^\mu$ *est une tribu contenant* $\mathcal{F}$,

(ii) $\overline{\mu}$ *est une mesure sur* $\overline{\mathcal{F}}^\mu$ *qui coïncide avec* μ *sur* $\mathcal{F}$ ($\overline{\mu}|_{\mathcal{F}} = \mu$) *et*

(iii) $\overline{\mathcal{F}}^\mu$ *est complet par rapport à* $\overline{\mu}$.

Preuve. $\boxed{CQFD}$

24.3 Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. La tribu $\overline{\mathcal{F}}^{\mu}$ définie dans [24.2] est appelé *la μ-complétion de la tribu $\mathcal{F}$*. On dit aussi que l'espace mesuré $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}^{\mu}, \overline{\mu})$ est *la μ-complétion de l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.*

→ **24.4 Lemme.** *Soit $(\Omega, \{, \mu)$ un espace mesuré complet. Alors la μ-complétion de $\mathcal{F}$ est $\mathcal{F}$ elle-même.*

→ **24.5 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit P une propriété d'éléments de Ω. Alors P est μ-presque partout vraie si et seulement P est $\overline{\mu}$-presque partout vraie.*

→ **24.6 Lemme.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Alors la tribu $\overline{\mathcal{F}}^{\mu}$ est donnée par*

$$\overline{\mathcal{F}}^{\mu} = \{B \subset \Omega \mid \exists E, E' \in \mathcal{F} : E \subset B \subset E' \text{ et } \mu(E) = \mu(E')\} \ ,$$

l'ensemble des parties des Ω qui sont encadrées par des éléments de $\mathcal{F}$ de même μ-mesure. Si $B \subset \Omega$ est tel qu'il existe $E, E' \in \mathcal{F}$ avec $E \subset B \subset E'$ et $\mu(E) = \mu(E')$, alors $\overline{\mu}(B) = \mu(E)$.

24.7 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ une application mesurable. Alors f est aussi $\overline{\mathcal{F}}^{\mu}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurable et $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\overline{\mu}$.*

Preuve. L'inclusion $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}^{\mu}$ implique directement que f est aussi $\overline{\mathcal{F}}^{\mu}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurable. Pour l'égalité entre intégrales, il suffit d'appliquer [9.12] :

$$\int_\Omega^{\overline{\mathcal{F}}^{\mu}} f \, \mathrm{d}\overline{\mu} = \int_\Omega^{\mathcal{F}} f \, \mathrm{d}\overline{\mu}|_{\mathcal{F}} = \int_\Omega^{\mathcal{F}} f \, \mathrm{d}\mu \ . \qquad \boxed{CQFD}$$

24.8 Lemme. *Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré complet, soit $A \subset X$ une partie μ-négligeable, soit $(Y, \mathcal{G})$ un espace mesurable et soit $f : A \to Y$ une application quelconque. Alors f est $\mathcal{F}_A$-$\mathcal{G}$-mesurable.*

Preuve. Soit $G \in \mathcal{G}$. Alors $f^{-1}(G) \subset A$ par définition. Mais $\mathcal{F}$ est complet par rapport à la mesure μ et $\mu(A) = 0$ Donc $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$ avec $\mu(f^{-1}(G)) = 0$. $\boxed{CQFD}$

24.9 Lemme. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ une application. Alors f est $\overline{\mathcal{F}}^{\mu}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurable si et seulement s'il existe une application $g : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ qui est $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurable telle que $f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g$.*

Preuve. S'il existe un tel g, alors g est aussi $\overline{\mathcal{F}}^{\mu}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurable par [24.7]. Par hypothèse il existe $N \in \overline{\mathcal{F}}^{\mu}$ tel que $f = g$ sur N^c. f est donc $\overline{\mathcal{F}}^{\mu}_{N^c}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurable sur N^c. Par [24.8] f est aussi $\overline{\mathcal{F}}^{\mu}_{N}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurable sur N, donc par [3.7] f est $\overline{\mathcal{F}}^{\mu}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurable sur Ω.

Si f est $\overline{\mathcal{F}}^{\mu}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurable, il faut trouver une application $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurable convenable. On le fait par étapes. Supposons d'abord que f est une fonction étagée positive, $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mathbf{1}_{E_i}$, $E_i \in \overline{\mathcal{F}}^{\mu}$, $c_i \in \,]0, \infty[$. Par construction de $\overline{\mathcal{F}}^{\mu}$ il existe $A_i \in \mathcal{F}$ et $N_i \in \mathcal{N}$ tels que $E_i = A_i \cup N_i$. Si on pose $g = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$, alors g est une fonction $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurable. De plus, on a l'inclusion

$$\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_i \ ,$$

car $\mathbf{1}_{A_i \cup N_i}$ et $\mathbf{1}_{A_i}$ ne peuvent différer que sur N_i. Il s'ensuit que $f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g$.

Si f est une fonction $\overline{\mathcal{F}}^{\mu}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurable quelconque, alors il existe une suite (croissante) de fonctions étagées positives f_n telles que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Par l'étape précédente il existe des fonctions (étagées positives) $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurables g_n (mais attention : la suite g_n n'est pas forcément croissante !) telles que $f_n \overset{\mu\text{-pp}}{=} g_n$. Si on pose

$$N_n = \{\omega \in \Omega \mid f_n \neq g_n\} \ ,$$

alors on a l'implication

$$\omega \in \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} N_n \Big)^c \qquad \Longrightarrow \qquad \forall n \in \mathbf{N} : f_n(\omega) = g_n(\omega) \ . \tag{24.10}$$

Si on définit la fonction g par

$$g(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} g_n(\omega) & \lim\limits_{n\to\infty} g_n(\omega) \text{ existe,} \\ 0 & \lim\limits_{n\to\infty} g_n(\omega) \text{ n'existe pas,} \end{cases}$$

alors g est $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurable par [3.17] et [3.7]. Mais $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} N_n$ est μ-négligeable, donc $f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g$ par (24.10).

Dans le cas général on sépare f en ses parties positive et négative $f = f^+ - f^-$. Par l'étape précédente il existe des fonctions positives $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurables $g^{\pm}$ telles que $f^{\pm} \overset{\mu\text{-pp}}{=} g^{\pm}$. Et donc $g = g^+ - g^-$ est une fonction $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$-mesurable qui est μ-presque partout égale à f. Le cas complexe se déduit de ceci en séparant les parties réelle et imaginaire. $\boxed{CQFD}$

24.11 Corollaire. *Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré complet, soit $(Y, \mathcal{G})$ un espace mesurable et soient $f, g : X \to Y$ deux applications. Si f est mesurable et si $f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g$, alors g est mesurable.*

24.12 Exemple. Si $(X, \mathcal{F}, \mu)$ n'est pas un espace mesuré complet, alors il est bien possible qu'il existe deux fonctions qui sont μ-presque partout égales dont l'une est mesurable et l'autre ne l'est pas. Par exemple, étant donné que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ n'est pas complet, il existe $A \subset \Omega$ tel qu'il existe $F \in \mathcal{F}$ avec $A \subset F$, $A \notin \mathcal{F}$ et $\mu(F) = 0$. Avec ceci on définit $f : \Omega \to \mathbf{R}$ par

$$f(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad \omega \in A \\ -1 & , \quad \omega \in (F \setminus A) \\ 0 & , \quad \omega \notin F \ . \end{cases}$$

Cette fonction est μ-presque partout égale (exactement sur l'ensemble F^c) à la fonction nulle, qui est mesurable, mais f elle-même n'est pas mesurable car (par exemple) $f^{-1}(\{1\}) = A$ n'appartient pas à $\mathcal{F}$.

24.13 Corollaire. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré, alors* $L^1(\Omega, \mathrm{d}\mu) = L^1(\Omega, \mathrm{d}\overline{\mu})$.

Preuve. $\boxed{CQFD}$

24.14 Corollaire. *Soit* $P \subset \mathbf{R}^d$ *un pavé fermé et borné et soit* $f : P \to \mathbf{R}$ *une fonction Riemann-intégrable sur* P. *Alors* f *est* $\overline{\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)}^{\lambda}$-$\mathcal{B}(\mathbf{R})$*-mesurable,* f *est* $\overline{\lambda}$*-intégrable et on a l'égalité* $\int_P f(x)\,\mathrm{d}^d x = \int_P f\,\mathrm{d}\overline{\lambda}$.

24.15 Proposition. *Soit* Ω *un ensemble et* $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *une mesure extérieure. Alors la tribu des ensembles mesurables* $\mathcal{M}(\mu^*)$ *[16.7] est complète par rapport à la mesure* $\mu^*|_{\mathcal{M}(\mu^*)}$.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$ tel que $\mu^*(A) = 0$ et soit $B \subset A$. Il faut montrer $B \in \mathcal{M}(\mu^*)$. Pour cela, soit $C \subset \Omega$ arbitraire. On commence avec la remarque que la croissance et la positivité de μ^* impliquent que $\mu^*(X) = 0$ pour tout $X \subset A$. Alors $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$ et $A \cap C \subset A$ nous permettent de faire le calcul

$$\mu^*(C) = \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C) = \mu^*(A^c \cap C) \ .$$

Par complémentarité on a $C \supset B^c \cap C \supset A^c \cap C$ et donc par croissance de μ^* on a les inégalités

$$\mu^*(C) \geq \mu^*(B^c \cap C) \geq \mu^*(A^c \cap C) = \mu^*(C) \ ,$$

et donc on a égalité partout. Vu qu'on a $B \cap C \subset A$ et donc $\mu^*(B \cap C) = 0$, il s'ensuit qu'on a l'égalité

$$\mu^*(C) = \mu^*(B \cap C) + \mu^*(B^c \cap C) \ . \qquad \boxed{CQFD}$$

24.16 Proposition. *Soit* Ω *un ensemble, soit* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *un semi-anneau et soit* $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ *une pré-mesure* σ*-finie sur* $\mathcal{C}$ *: il existe une suite* $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *d'éléments* *de $\mathcal{C}$ telle que $\cup_{n\in\mathbf{N}} C_n = \Omega$ et $\mu(C_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Si $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ est la mesure extérieure associée au couple $(\mathcal{C}, \mu)$ par la construction [16.3] et si $\mu = \mu^*|_{\sigma(\mathcal{C})}$ est le prolongement en une mesure sur la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ [16.11], alors on a l'égalité entre tribus $\mathcal{M}(\mu^*) = \overline{\sigma(\mathcal{C})}^{\mu}$ et on a l'égalité entre mesures $\overline{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{M}(\mu^*)}$.*

Preuve. • En préliminaire on montre que si $B \subset \Omega$ est tel que $\mu^*(B) < \infty$, alors il existe $E \in \sigma(\mathcal{C})$ tel que $B \subset E$ et $\mu^*(B) = \mu^*(E)$.

La définition de $\mu^*(B)$ implique que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que

$$B \subset \cup_{n\in\mathbf{N}} A_n \qquad \text{et} \qquad \mu^*(B) \le \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(A_n) < \mu^*(B) + \varepsilon\ .$$

Mais μ est une mesure sur $\sigma(\mathcal{C})$, donc $\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \sigma(\mathcal{C})$ et (par sous-σ-additivité) $\mu(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n) \le \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(A_n)$. Par la croissance de la mesure μ^* on a donc

$$\mu^*(B) \le \mu^*(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n) \equiv \mu(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n) \le \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(A_n) < \mu^*(B) + \varepsilon\ .$$

En prenant $\varepsilon = 1/n$ on en déduit qu'il existe pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ un élément $D_n \in \sigma(\mathcal{C})$ tel que $B \subset D_n$ et $\mu^*(B) \le \mu(D_n) < \mu^*(B) + 1/n$. La suite $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie comme $E_n = \cap_{i=1}^n D_i$ est une suite décroissante d'éléments de $\sigma(\mathcal{C})$ vérifiant les mêmes conditions que la suite $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$. En appliquant [6.11] on en déduit que $E = \cup_{n\in\mathbf{N}} E_n$ vérifie les conditions requises : $B \subset E$ et $\mu^*(B) = \mu(E)$.

• Pour montrer l'égalité $\mathcal{M}(\mu^*) = \overline{\sigma(\mathcal{C})}^{\mu}$ notons d'abord qu'on a l'inclusion $\overline{\sigma(\mathcal{C})}^{\mu} \subset \mathcal{M}(\mu^*)$ grace à [24.15]. Pour montrer l'inclusion dans l'autre sens, il faut montrer (voir [24.6]) que pour tout $B \in \mathcal{M}(\mu^*)$ il existe $A, A' \in \sigma(\mathcal{C})$ tels que $A \subset B \subset A'$ et $\mu(A) = \mu(A')$. Pour cela, fixons $B \in \mathcal{M}(\mu^*)$ et $n \in \mathbf{N}$. Par hypothèse on a

$$\mu^*(B \cap C_n) \le \mu^*(C_n) < \infty \qquad \text{et} \qquad \mu^*(B^c \cap C_n) \le \mu^*(C_n) < \infty\ ,$$

donc, par ce qu'on vient de montrer ci-dessus, il existe $E_n, E_n' \in \sigma(\mathcal{C})$ tels que

$$B \cap C_n \subset E_n' \qquad \text{et} \qquad B^c \cap C_n \subset E_n\ ,$$

ainsi que

$$\mu^*(B \cap C_n) = \mu(E_n') \qquad \text{et} \qquad \mu^*(B^c \cap C_n) = \mu(E_n)\ .$$

On peut supposer sans perte de généralité que $E_n, E_n' \subset C_n$, car sinon il suffit de prendre les intersections $E_n \cap C_n$ et $E_n' \cap C_n$ qui vérifient les mêmes conditions. Sachant que μ^* est une mesure sur $\mathcal{M}(\mu^*)$, ou en utilisant la définition d'un ensemble μ^*-mesurable, on a l'égalité

$$\mu(C_n) \equiv \mu^*(C_n) = \mu^*(B \cap C_n) + \mu^*(B^c \cap C_n)\ ,$$

ce qui implique, par la finitude de $\mu(C_n)$, qu'on a l'égalité $\mu(E_n') = \mu(C_n) - \mu(E_n)$. Maintenant on constate qu'on a les implications

$$\begin{aligned} B^c \cap C_n \subset E_n \qquad &\Longrightarrow \qquad C_n \setminus E_n \subset B \cap C_n \\ \big(\ E_n \subset C_n \text{ et } \mu(C_n) < \infty\ \big) \qquad &\Longrightarrow \qquad \mu(C_n \setminus E_n) = \mu(C_n) - \mu(E_n) = \mu(E_n')\ . \end{aligned}$$

On en déduit que $A = C_n \setminus E_n$ et $A' = E'_n$ sont des éléments de $\sigma(\mathcal{C})$ vérifiant $A \subset B \cap C_n \subset A'$ et $\mu(A) = \mu(A')$. Il s'ensuit que $B \cap C_n$ appartient à $\overline{\sigma(\mathcal{F})}^{\mu}$. Mais $\overline{\sigma(\mathcal{F})}^{\mu}$ est une tribu et on a l'égalité

$$B = B \cap \big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} C_n\big) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} (B \cap C_n) \ .$$

On en déduit que B appartient à $\overline{\sigma(\mathcal{F})}^{\mu}$.

• Pour montrer l'égalité $\overline{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{M}(\mu^*)}$, prenons $B \in \overline{\sigma(\mathcal{F})}^{\mu}$ et $A, A' \in \sigma(\mathcal{C})$ tels que $A \subset B \subset A'$ et $\mu(A) = \mu(A')$. Alors par [24.6] on a $\overline{\mu}(B) = \mu(A)$ et par croissance de la mesure μ^* sur $\overline{\sigma(\mathcal{F})}^{\mu}$ on les inégalités

$$\mu(A) \equiv \mu^*(A) \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A') \equiv \mu(A') \ .$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a l'égalité $\overline{\mu}(B) = \mu^*(B)$. $\boxed{CQFD}$

25. Ensembles non-mesurables

25.1 Théorème (G. Vitali). *Il n'existe pas de mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

(i) *μ est invariante par translation et*
(ii) $\mu([0,1]) = 1$.

Preuve†. Pour $x \in \mathbf{R}$ on note $T_x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la translation par x, c'est-à-dire $T_x(y) = y+x$. Si $A \subset \mathbf{R}$ est un sous-ensemble, on note souvent par abus de notation l'image $T_x(A)$ par $A + x$:

$$A + x = T_x(A) = \{y + x \mid y \in A\} \subset \mathbf{R} \ .$$

Une mesure $\mu : \mathcal{P}(\mathbf{R}) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ est invariant par translations si pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $A \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ on a l'égalité $\mu(A + x) = \mu(A)$. La stratégie de la preuve consiste à construire un ensemble $G_0 \subset \mathbf{R}$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels tels que

(a) $n \neq m \Longrightarrow \Big((G_0 + x_n) \cap (G_0 + x_m) = \emptyset \text{ et } (G_0 + y_n) \cap (G_0 + y_m) = \emptyset \Big)$

(b) $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (G_0 + x_n) \subset [0,1]$ et $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (G_0 + y_n) = \mathbf{R}$.

Si une mesure $\mu : \mathcal{P}(\mathbf{R}) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ existe avec les propriétés (i) et (ii), la σ-additivité et la croissance d'une mesure nous donne :

$$1 = \mu([0,1]) \geq \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (G_0 + x_n)\big) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(G_0 + x_n) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(G_0) \ ,$$

† La preuve qu'on donne ici suit presque à la lettre l'article original de Giuseppe Vitali [Vi].

ce qui impliquerait qu'on doit avoir $\mu(G_0) = 0$. Mais on a aussi

$$1 = \mu([0,1]) \le \mu(\mathbf{R}) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (G_0 + y_n)) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(G_0 + y_n) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(G_0) ,$$

ce qui est impossible si $\mu(G_0) = 0$. La conclusion est donc qu'une telle mesure n'existe pas.

Pour construire G_0 on procède comme suit. Sur $\mathbf{R}$ on définit une relation d'équivalence par $x \cong y$ si et seulement si $x - y \in \mathbf{Q}$. Pour $x \in \mathbf{R}$ on note $[x]$ sa classe d'équivalence :

$$[x] = \{ y \in \mathbf{R} \mid y \cong x \} \subset \mathbf{R}$$

et on définit H comme l'ensemble des classes d'équivalence :

$$H = \{ [x] \mid x \in \mathbf{R} \} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}) .$$

Par définition d'une relation d'équivalence les différents éléments de H sont disjoints : $\alpha, \beta \in H$ et $\alpha \neq \beta$ implique $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Vu que $x \in [x] \in H$, il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbf{R}$ il existe $\alpha \in H$ tel que $x \in \alpha$. Autrement dit : $\mathbf{R} = \cup_{\alpha \in H} \alpha$. De l'autre côté, si $x \in \alpha \in H$, alors $\alpha = \mathbf{Q} + x$ par définition de la relation d'équivalence. On en déduit que pour tout $\alpha \in H$ l'intersection $\alpha \cap [0, \frac{1}{2}] \neq \emptyset$. En invoquant l'axiome du choix on sélectionne dans chaque $\alpha \in H$ un point $P_\alpha \in \alpha \cap [0, \frac{1}{2}]$. Finalement on définit G_0 comme l'ensemble de ces représentants :

$$G_0 = \{P_\alpha \mid \alpha \in H\} \subset [0, \tfrac{1}{2}] .$$

Soit $q, r \in \mathbf{Q}$ deux nombres rationnels et supposons $x \in (G_0 + q) \cap (G_0 + r)$. Ceci veut dire qu'il existe $\alpha, \beta \in H$ tels que $x = P_\alpha + q = P_\beta + r$. Mais alors $P_\beta - P_\alpha = q - r \in \mathbf{Q}$, ce qui veut dire que P_α et P_β sont équivalents. Ils appartiennent donc à la même classe d'équivalence, donc par construction de G_0 on doit avoir $\alpha = \beta$. Mais alors on a $P_\alpha = P_\beta$ et par conséquent $q = r$. On conclut que si q et r sont deux nombres rationnels distincts, alors $(G_0 + q) \cap (G_0 + r) = \emptyset$.

On définit maintenant la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$x_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad n > 0 \quad \Rightarrow \quad x_n = \tfrac{1}{n+1} .$$

Les x_n sont des rationnels, donc les ensembles $G_0 + x_n$ sont deux à deux disjoints. De plus, il est évident que $G_0 + x_n \subset [0,1]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ car $0 \le x_n \le \frac{1}{2}$.

L'ensemble des rationnels $\mathbf{Q}$ étant dénombrable, il existe une bijection $y : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$, ce qui nous permet d'écrire $\mathbf{Q} = \{y_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi construite est une suite de rationnels, donc les ensembles $G_0 + y_n$ sont deux à deux disjoints. De plus, si $x \in \mathbf{R}$, alors il existe $\alpha \in H$ tel que $x \in \alpha = P_\alpha + \mathbf{Q}$. Il existe donc $q \in \mathbf{Q}$ tel que $x = P_\alpha + q \in G_0 + q$. Par construction de y, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $y_n = q$ et donc $x \in G_0 + y_n$.

On a ainsi vérifié que l'ensemble G_0 et les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifient les conditions (a) et (b). On peut donc conclure à la non-existence d'une mesure avec les propriétés données. $\boxed{CQFD}$

25.2 Proposition. *L'ensemble $G_0 \subset [0,1]$ construit dans [25.1] n'appartient pas à la tribu $\overline{\mathcal{B}}^{\lambda}$. En particulier G_0 n'est pas un borélien, ni λ-négligeable.*

Preuve. Soit $A \subset \mathbf{R}$ un borélien et $N \subset \mathbf{R}$ un ensemble λ-négligeable, c'est-à-dire qu'il existe un borelien $B \subset \mathbf{R}$ tel que $N \subset B$ et $\lambda(B) = 0$. La mesure de Lebesgue étant invariante par translations T_x [19.29], on aura

$$\lambda(T_x(B)) = \lambda(B) = 0 \qquad \text{et} \qquad T_x(N) \subset T_x(B) \ ,$$

c'est-à-dire que $T_x(N)$ est aussi λ-négligeable. On a donc

$$\overline{\lambda}(T_x(A \cup N)) = \overline{\lambda}(T_x(A) \cup T_x(N)) = \lambda(T_x(A)) = \lambda(A) = \overline{\lambda}(A \cup N) \ .$$

Il s'ensuit avec [24.2] que la mesure $\overline{\lambda}$ est aussi invariante par translations.

Si G_0 appartenait à $\overline{\mathcal{B}}^{\lambda}$, on pourrait déterminer $\overline{\lambda}(G_0)$. Et alors le raisonnement donné dans la preuve de [25.1] s'applique et donne les inégalités

$$1 \geq \sum_{n \in \mathbf{N}} \overline{\lambda}(G_0) \qquad \text{et} \qquad 1 \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} \overline{\lambda}(G_0) \ ,$$

ce qui est impossible. $\boxed{CQFD}$

Références bibliographiques

[AG] M. Adams & V. Guillemin, *Measure Theory and Probability*, Birkhäuser, Boston, MA, 1996.

[Bar] R.G. Bartle, *A Modern Theory of Integration*, GSM 32, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Dix] J. Dixmier, *Cours de mathématiques du premier cycle, 1re année*, Gauthier-Villars, Paris, 1976.

[DK] J.J. Duistermaat & J.A.C. Kolk, *Multidimension Real Analysis II : Integration*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[Gor] R.A. Gordon, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, GSM 4, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[Hal] P. R. Halmos, *Measure theory*, D. van Nostrand Company, Inc., Princeton, NJ, 1950.

[Haw] T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration : Its Origins and Development*, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 1970.

[Lan] S. Lang, *Analysis I*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[Leb] H. Lebesgue, *Sur le développement de la notion d'intégrale*, Matematisk Tidsskrift B (1926), 54–74; traduction en anglais dans : H.L. Lebesgue & K.O. May, *Measure and the integral*, Holden-Day, San Francisco, CA, 1966.

[L-F2] J. Lelong-Ferrand & J.-M. Arnaudiès, *Cours de mathématiques tome 2 : analyse*, Dunod, Paris, 1972, 1974.

[L-F4] J. Lelong-Ferrand & J.-M. Arnaudiès, *Cours de mathématiques tome 4 : équations différentielles, intégrales multiples*, Dunod, Paris, 1974.

[Rud] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, Inc., New York, NY, 1966; Traduction en français, *Analyse réelle et complexe : Cours et exercices*, Dunod, Paris, 1998.

[Sch] L. Schwartz, *Analyse III : calcul intégral*, Collection enseignement des sciences 44, Hermann, Paris, 1993.

[Spi] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1965.

[Suq] C. Suquet, *Intégration-Fourier-Probabilité 2003-2004*, Polycopié du cours, USTL, Lille, 2003.

[Vi] G. Vitali, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Tip. Gamberini e Parmeggiani, Bologna (1905), 1–5; reproduit dans : G. Vitali, *Opere sull'analisi reale e complessa — Carteggio*, Unione Matematica Italiana, Bologna, 1984, pp. 231–235.

[vRS] A.C.M. van Rooij & W.H. Schikhof, *A second course on real functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.