Feuille d'exercices 3 : Diagonalisation

Exercice 1. Lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Pour quelles valeurs de a, b et c les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Exercice 3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 4. Soient a un réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A par rapport à la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calculer le déterminant de A. Pour quelles valeurs du paramètre a le noyau de f n'est-il pas réduit à $\{0\}$? Justifier.

(ii) Montrer que le polynôme caractéristique P de f vérifie $P(\lambda) = (3-\lambda)Q(\lambda)$, où $Q(\lambda)$ est un polynôme que l'on déterminera. Pour quelle(s) valeur(s) de a le nombre 3 est-il racine multiple de P ?

(iii) Déterminer, en fonction de a, les valeurs propres de f, leurs multiplicités et la dimension des sous espaces propres associés. Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice 5. Diagonaliser la matrice A suivante et calculer A^n :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit u l'application suivante :

$$u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], \quad P \to (2X+1)P - (X^2-1)P'$$

Montrer que u est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de u, et, si c'est possible, diagonaliser u.

Exercice 7. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice d'ordre n où $a_{ij} = 1$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

(i) Sans calculer le polynôme caractéristique de A, montrer que 0 est une valeur propre, et déterminer le sous-espace propre associé.

(ii) Que dire de la multiplicité de cette valeur propre ?

(iii) Calculer la trace de A. En déduire le spectre de A.

(iv) A est-elle diagonalisable ?

Exercice 8. Soit n un entier, avec $n \geq 3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Déterminer $\mathrm{Ker} f$. Quel est le rang de f ?

(ii) Montrer que λ est une valeur propre non nulle de f si et seulement si elle vérifie $\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$ (on ne cherche pas à calculer le polynôme caractéristique).

(iii) En déduire que f est diagonalisable et préciser ses valeurs propres, leurs multiplicités, et les sous espaces propres associés.

Exercice 9. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calculer son polynôme caractéristique, calculer A^2 et déduire de ces calculs et du théorème de Hamilton-Cayley l'inverse de A.

Exercice 10. (a) Soit A une matrice carrée d'ordre n quelconque, à coefficients réels, qui vérifie l'identité $A^3 - 2A^2 - A + 2I_n = 0$. Montrer que A est inversible et diagonalisable.

(b) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Montrer qu'il existe un polynôme $P \in K[x]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

(c) Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ telles que $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$.

Exercice 11. Soit $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, puis A^3. A l'aide d'un polynôme annulateur de A, montrer que A est diagonalisable.

Sans chercher à calculer le polynôme caractéristique de A, donner un ensemble fini contenant toutes les valeurs propres de A, puis donner les valeurs propres elles mêmes ainsi que leurs multiplicités. En déduire le polynôme caractéristique de A.