ORSAY
N^o d'ordre : 1688

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
Centre d'Orsay

THESE

présentée
pour obtenir

Le Grade de Docteur en Sciences
Spécialité : Mathématiques

par

Myriam FRADON

Sujet :

Diffusions dégénérées, réfléchies ou à dérives singulières : étude des lois et des formes de Dirichlet associées.

Soutenue le 27 juin 95 devant la Commission d'examen :

Mr Alano ANCONA
Mr Gérard BEN AROUS, président
Mr Jean BERTOIN, rapporteur
Mr Patrick CATTIAUX, directeur
Mr Francis HIRSCH, rapporteur
Mr Yves LE JAN
Mr Etienne PARDOUX

Remerciements

Est-il besoin de préciser que cette thèse ne serait pas ce qu'elle est si Patrick Cattiaux n'en était pas le directeur ?

Il a su, dès le début de ma thèse, m'introduire dans des domaines passionnants, me guider d'abord dans leur exploration, puis m'accorder une autonomie croissante que j'ai beaucoup appréciée.

Sa simplicité et son ouverture d'esprit m'ont encouragée à exprimer mes idées bonnes ou mauvaises, mes questions, même stupides, et mes doutes (y compris sur ses propres résultats!). Tout cela m'a considérablement aidée à progresser.

Son intuition sûre, le recul qu'il sait se donner pour mieux décortiquer un problème, mais aussi et surtout cet optimisme tenace avec lequel il relativise les déceptions et minimise les difficultés ont rendu très enrichissantes, et aussi très agréables, nos nombreuses heures de travail en commun.

Bref, pendant ces trois années, il s'est montré un directeur de thèse exemplaire et m'a laissée puiser dans ses vastes connaissances sans jamais marchander son temps ni son savoir. Qu'il en soit ici vivement remercié!

Jean Bertoin et Francis Hirsch méritent également mes remerciements sincères, pour la gentillesse avec laquelle ils ont accepté la tâche ingrate de rapporteur, et pour le soin avec lequel ils s'en sont acquitté malgré le peu de temps dont ils disposaient. Leurs suggestions m'ont aidée à améliorer ce manuscrit, et à le débarrasser de plusieurs erreurs.

Qu'Alano Ancona ait accepté de participer à ce jury m'a fait particulièrement plaisir. Le cours magistral (dans tous les sens du terme) qu'il faisait en maîtrise quand j'y étais élève a eu une influence décisive sur mon choix de m'orienter vers les Probabilités. Je suis heureuse d'avoir ici l'occasion de le lui dire, et de l'en remercier.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à Etienne Pardoux, Yves LeJan et Gérard BenArous, qui m'ont fait l'honneur de participer à ce jury. Ils m'ont tous trois aidée à un moment ou un autre, soit directement par leurs conseils ou leurs remarques, soit, sans même le savoir, par l'intermédiaire de leurs travaux.

Merci aussi à toute l'équipe de Probabilités et Statistiques d'Orsay, pour la joyeuse ambiance qui y règne, et en particulier à Sabine pour sa gaieté et son efficacité, à Béatrice pour ses conseils avisés, et à tous ceux qui ont partagé mon bureau : Denis, si habile à déjouer les pièges de LaTeX, Anne, Olivier, Yannick, et surtout Gabrielle *et Nathanaël, avec qui j'ai partagé les affres de la thèse en phase terminale.*

Je n'oublie pas non plus toute la bande des thésards et ex-thésards de l'équipe de PAF du MASI-Versailles, devenu entre-temps le PRiSM. J'ai toujours reçu là-bas un accueil chaleureux, malgré leur perplexité devant mon cas (préférer les Maths à l'Informatique, passe encore, mais spider à netmaze?).

De mon premier rapport de stage à la rédaction finale de cette thèse, Xavier Redon a été l'arbitre de mes relations souvent conflictuelles avec des ordinateurs de tout poil. Qu'il soit remercié pour sa compétence, pour sa patience, et tout simplement pour sa présence.

Et merci aussi à mes parents, pour tout...

Abstract :

On a domain D of $\mathbb{R}^d$, for a matrix-valued function σ and a Probability density p, we study the processes associated with some extensions of the non-negative definite symmetric bilinear form :

$$\mathcal{E}(f,g) = \frac{1}{2}\int_D (\sigma\nabla f).(\sigma\nabla g)\ p\ dx \qquad f,g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ or } \mathcal{C}_b^\infty(D)$$

The function σ is always assumed to be smooth ($\mathcal{C}_b^4$). We are especially interested in non-elliptic σ's.

We first study the case where D is bounded with non-smooth boundary, p is smooth ($\mathcal{C}_b^1$) and σ (smooth) is allowed to degenerate. We define by integration by parts the extension $\overline{\sigma\nabla}$ of the operator $\sigma\nabla$, and construct the generalised Sobolev space

$$H(D, p\,dx, a\,p\,dx) = \{f \in L^2(D, p\,dx)\ /\ \overline{\sigma\nabla} f \in L^2(D, p\,dx)\}$$

The form $(\mathcal{E}, H(D, p\,dx, a\,p\,dx))$ is a (a priori non-regular) Dirichlet form. Using a sequence of approximating regular Dirichlet forms, we prove that the associated process, which is a reflecting process in $\overline{D}$, is a semi-martingale. Assuming that $(\mathcal{E}, H(D, p\,dx, a\,p\,dx))$ and the form associated with reflecting Brownian motion are regular on the same compactification of D, we show that the reflection direction of this process is the conormal direction $\sigma^*\sigma\vec{n}$, where $\vec{n}$ denotes the reflection direction of the Brownian motion.

We then assume : $D = \mathbb{R}^d$, $\sigma = Id$ and $\varphi = \sqrt{p} \in H^1$. In this case, the maximal extension $(\mathcal{E}, H^1(\varphi^2 dx))$ of $(\mathcal{E}, \mathcal{C}_c^\infty)$ is already known. We present two new demonstrations of Markov uniqueness for this form. The first one is purely analytical and elementary. The second one is probabilistical and uses the associated process of the minimal extension $(\mathcal{E}, H_o^1(\varphi^2 dx))$, which is a Brownian motion with singular drift $\frac{\nabla\varphi}{\varphi}$. As an application, we show that each invariant measure with finite energy is symmetric for this process.

Finally, when $D = \mathbb{R}^d$ and σ is allowed to degenerate, we construct the spaces $H(dx, a\,dx)$ and $H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, respectively replacing H^1 and $H^1(\varphi^2 dx)$ in this case, for $\varphi \in H(dx, a\,dx)$. The regularity of the form $(\frac{1}{2}\int\ \overline{\sigma\nabla} f.\ \overline{\sigma\nabla} g\ dx, H(dx, a\,dx))$, which is very important here, has been proved in the first part. The same probabilistical proof then gives the regularity of $\mathcal{E}$ on the closure of $L^\infty \cap H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ (but not Markov uniqueness, since the maximality is not clear). Under some boundedness assumptions on the densities, this implies that, as in the "$\sigma = Id$" case, invariant measures with finite energy are symmetric.

Keywords : Dirichlet form, Symmetric process, Reflecting diffusion, Singular drift, Markov uniqueness, Degenerating diffusion matrix.

Table des Matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Présentation du sujet

Le sujet de cette thèse est l'étude des différentes extensions de la forme bilinéaire symétrique positive :

$$\mathcal{E}(f,g) = \frac{1}{2}\int_D (\sigma\nabla f).(\sigma\nabla g)\ p\ dx \quad , \qquad f,g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ ou } \mathcal{C}_c^\infty(\overline{D})$$

et des processus réversibles associés. D est ici un domaine (i.e. un ouvert connexe) de $\mathbb{R}^d$, σ une fonction de D dans l'espace des matrices $d \times d$ et p une densité de probabilité sur D.

Les questions que l'on est amené à se poser quand on s'intéresse à cette forme sont les suivantes :

- Cette forme est-elle fermable ?

et si elle l'est

- Quelle est sa plus petite extension fermée ?
- A-t-elle une extension maximale, et si oui celle-ci est-elle égale à l'extension minimale, i.e. y a-t-il unicité Markovienne ?

Lorsqu'on s'intéresse davantage à l'aspect probabiliste du problème, les questions naturelles sont :

- L'extension que l'on étudie est-elle une forme de Dirichlet régulière, ou au moins quasi-régulière, i.e. le processus associé est-il un processus de Hunt ?
- Peut-on décrire explicitement ce processus, par exemple en en donnant une décomposition en semi-martingale ou en calculant la densité de sa loi par rapport à une loi de référence ?

L'aspect analytique et l'aspect probabiliste du problème sont étroitement liés : l'étude de la forme de Dirichlet donne généralement de nombreux renseignements sur le processus (résultats d'existence, continuité des trajectoires, décomposition en semi-martingale et type de réflexion au bord de D si $D \neq \mathbb{R}^d$). Réciproquement, certaines propriétés des formes sont difficilement accessibles par l'analyse et se déduisent assez simplement des propriétés du processus (propriété de Markov pour la forme, régularité, unicité Markovienne).

Il est clair que toutes les questions énoncées précédemment sont liées au problème suivant : Comment doit-on prolonger le "gradient tordu" $\sigma\nabla f$ (vu comme la racine carrée de l'opérateur carré du champs) lorsque $f \notin \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$? Tant que le gradient ∇f de f reste défini en tant que fonction (par exemple si $f \in H^1(D)$), un candidat naturel est le produit $\sigma\nabla f$. Mais lorsque ce n'est plus le cas, il faut définir directement cet opérateur (appelé ici "σ-dérivée" et encore noté "$\sigma\nabla$" ou " $\overline{\sigma\nabla}$"). Il faut se souvenir que le gradient usuel ∇ a deux définitions équivalentes, l'une par intégration par parties (i.e. au sens des distributions) et l'autre par dérivation au sens de Gâteaux :

$$\begin{aligned} &\text{Pour } f \in H^1(D) \text{ et } g \in (L^2(D))^d \\ g = \nabla f \quad &\Leftrightarrow \quad \forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(D) \quad \int_D u\ g\ dx = -\int_D (\nabla u)\ f\ dx \\ &\Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{R}^d \quad \frac{1}{\varepsilon}\left(f(\cdot + \varepsilon k) - f(\cdot)\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^2(D)} g(\cdot).k \end{aligned}$$

Il est aisé d'étendre la première définition au cas où $\sigma \neq Id$ dès lors que σ est assez régulier pour que $\nabla(\sigma u)$ ait un sens, et c'est pourquoi nous travaillerons toujours avec un σ au moins $\mathcal{C}^1$. Par contre, la présence d'un $\sigma \neq Id$ introduit une torsion sur les directions de dérivation qui empêche de définir "$\sigma\nabla$" au sens de Gâteaux.

1.2 Résultats antérieurs

De nombreux résultats sont déjà connus, en particulier dans le cas où σ est uniformément elliptique et $D = \mathbb{R}^d$ ou p assez lisse.

Dans le cas le plus simple, i.e. si $D = \mathbb{R}^d$, $\sigma \equiv Id$ et $p \equiv 1$, on sait bien que l'extension minimale de $(\mathcal{E}, \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d))$ est $(\mathcal{E}, H^1(\mathbb{R}^d))$, qu'elle est également maximale (i.e. qu'il y a unicité Markovienne), et que le processus associé est le mouvement Brownien classique de loi initiale la mesure de Lebesgue dx.

Toujours si $D = \mathbb{R}^d$ et $\sigma \equiv Id$, mais pour un $\varphi = \sqrt{p} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ quelconque, de nombreux auteurs ont obtenus des résultats analogues :

Albeverio, Kusuoka et Röckner ont calculé dans [AKR90] l'extension minimale et l'extension maximale de $(\mathcal{E}, \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d))$. Song [Son94b] a également donné une démonstration analytique et une extension de ce résultat de maximalité dans un cadre Gaussien (i.e. en remplaçant la mesure de Lebesgue dx par une loi Gaussienne). Röckner et Zhang (cf [RZ92] et [RZ94]), et indépendamment Song (cf [Son94a]), ont prouvé l'unicité Markovienne pour cette forme dès que $\varphi \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Tous ces résultats obtenus sur $\mathbb{R}^d$ (mais aussi en dimension infinie dans un cadre Hilbertien) pour $\sigma \equiv Id$ s'étendent sans difficulté majeure au cas où σ est uniformément elliptique (et assez régulier) et où p est encadrée uniformément par deux constantes strictement positives. Par contre, le cas où σ peut dégénérer n'est pas traité dans ces articles.

Dans le cas où D est borné, si $\sigma \equiv Id$ et $p \equiv 1$, il n'y a plus unicité Markovienne, l'extension maximale $(\mathcal{E}, H^1(D))$ étant en général non régulière et différente de l'extension minimale $(\mathcal{E}, H^1_o(D))$ (c'est le cas si D est à bord lisse, voir [Fuk80] exemple 1.2.3).

Dans [Che93], Chen se place sur une compactification $\tilde{D}$ de D sur laquelle $(\mathcal{E}, H^1(D))$ est régulière pour étudier le processus associé à cette forme, i.e. le Brownien réfléchi dans $\tilde{D}$. Il montre, sous de faibles hypothèses de régularité sur le bord de D, que ce processus est une semi-martingale dont le terme de réflexion est associé à la mesure $\vec{n}\, d\alpha$, où α est une mesure régulière sur bord de D et $\vec{n}$ un vecteur unitaire défini en quasi-tout point du bord. Si la frontière de D est au moins $\mathcal{C}^2$, $\vec{n}$ est simplement la normale intérieure. Si σ est uniformément elliptique et si $p \geq C^{ste} > 0$, la forme est équivalente à celle définie par $\sigma \equiv Id$ et $p \equiv 1$, et le terme de réflexion du processus associé a pour mesure régulière $\frac{1}{2}(\sigma^* \sigma \vec{n}) p \, d\alpha$.

R. Williams et Zheng [WZ90] ont construit dans un cadre analogue (i.e. $\sigma \equiv Id$ et $p \equiv 1$) le Brownien réfléchi dans $\overline{D}$, i.e. le processus associé à l'extension maximale de $(\mathcal{E}, \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d))$.

Dans [PW94], Pardoux et R.Williams étendent cette construction au cas où σ est localement uniformément elliptique et p strictement positive bornée à dérivée bornée sur D. Ils montrent que le domaine de l'extension maximale est $\{f \in H^1_{loc}(D) \cap L^2(D) \ / \ \sigma \nabla f \in L^2(D)\}$. Puis ils construisent grâce à une suite d'approximations le processus (faiblement Markovien) associé à cette extension maximale et montrent que (sous des hypothèses sur le bord de D un peu plus fortes que celle de [Che93]) c'est une semi-martingale.

1.3 Objectif

Notre but dans cette thèse était d'étudier de manière probabiliste les problèmes cités au début de l'introduction.

Nous établissons néanmoins un certain nombre de résultats purement analytiques, soit parce qu'il sont utiles à une étude probabiliste ultérieure (c'est le cas du th 2.2.8 ou des propriétés énoncées à la section 4.2.3), soit pour présenter une démonstration analytique d'un résultat dont nous donnons également une preuve probabiliste (cf le th 3.2.7 / 3.5.4 et ses deux démonstrations).

Tout au long de ce travail, nous nous sommes attachés à ne pas nous restreindre au cas classique, c'est-à-dire à ne pas utiliser d'hypothèse d'uniforme ellipticité sur σ. Même lorsque nos résultats sont établis dans le cadre "$\sigma \equiv Id$" (i.e. au chapitre 3), nous avons veillé à ce que leur démonstration soit aisément adaptable au cas où σ dégénère (comme le montre la similitude entre les preuves des prop 3.4.3 et 4.3.3, ou du corollaire 3.6.7 et du th 4.4.6).

1.4 Plan de la thèse

Cette thèse est constituée de trois articles, contenant chacun leur propre introduction et rédigés de manière relativement autonome.

Dans le premier, on montre que la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) = \left\{ f \in L^2(D, p\,dx) \quad / \quad \sigma \nabla f \in L^2(D, p\,dx) \right\} \\ \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \quad \mathcal{E}^s(f,g) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_D \sigma \nabla f . \sigma \nabla g \ p \ dx \end{array} \right.$$

est une forme de Dirichlet (cf §2.2.3) et on étudie la réflexion au bord de D de son processus associé, qui est une diffusion réfléchie réversible dans une compactification du domaine borné D. On travaille avec de faibles hypothèses de régularité sur le bord de D (hypothèse de contenu de Minkowski fini, cf [Che93] et [PW94]). L'originalité de ce travail est qu'on ne fait aucune hypothèse d'uniforme ellipticité sur σ, ce qui interdit l'application d'estimées classiques (comme dans [PW94]) ou de résultats standard sur les Dirichlet (cf [Che93]).

La forme $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ n'étant en général pas régulière, on l'approxime par des formes de Dirichlet $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$, qui sont régulières mais associées à des diffusions à drifts singuliers (comme dans [WZ90] et [PW94]). Les lois Q^n de ces diffusions convergent vers la loi Q^s associée à $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ (i.e. la loi du processus réfléchi dans $\overline{D}$). Mais il n'est pas possible de le montrer par une démonstration analogue à celle de [PW94], car celle-ci est basée sur la convergence des densités de transition des Q^n, densités dont l'existence n'est assurée que sous l'hypothèse d'uniforme ellipticité. On a donc recours à une démonstration mixte, mélangeant les techniques probabilistes et les techniques de semi-groupes : La tension de la suite est prouvée en utilisant une martingale rétrograde, comme dans [PW94], et l'identification de la limite découle de la convergence des résolvantes, comme dans [Che93] (cf §2.4). De la convergence des Q^n, et de leur décomposition en semi-martingale, on déduit que Q^s est la loi d'une semi-martingale dont on donne une décomposition (§2.5).

On fait ensuite l'hypothèse (H R), i.e. l'hypothèse qu'il existe une compactification $\tilde{D}$ de D sur laquelle $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ et la forme $(\frac{1}{2}\int_D |\nabla \cdot|^2 \, dx, H^1(D))$ associée au Brownien réfléchi sont toutes deux régulières. Dans le cas où $D = \mathbb{R}^d$, (H R) est toujours vérifiée. Il s'agit véritablement d'une hypothèse portant sur la "bonne" définition d'une normale au bord de D. Cette normale $\vec{n}$ nous est indispensable car nous voulons montrer que la réflexion du processus se fait ici dans la direction conormale $\sigma^*\sigma\,\vec{n}$, comme dans le cas où σ est uniformément elliptique. La régularité de $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ sur $\tilde{D}$ permet de décomposer le processus réfléchi en fonctionnelles additives (cf [Fuk80] chap 5.2). En comparant avec la décomposition en semi-martingale, il apparaît que la mesure régulière associée au terme de réflexion du processus réfléchi est $\frac{1}{2}(\sigma^*\sigma\,\vec{n})p\,d\alpha$, donc la réflexion a bien lieu dans la direction conormale.

Dans toute cette partie, on a travaillé sous l'hypothèse que la densité p est strictement positive et $\mathcal{C}^1$ bornée à dérivée bornée, i.e. que le drift $\frac{\nabla p}{p}$ qu'elle induit sur le processus associé est régulier à l'intérieur de D.

Dans le second article, écrit en collaboration avec Patrick Cattiaux, on s'intéresse au cas où $D = \mathbb{R}^d$ et $\sigma \equiv Id$, mais où la densité p n'est plus aussi régulière : $\varphi = \sqrt{p} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ (i.e. le cas traité par [RZ92] et [RZ94]). Nous présentons deux nouvelles démonstrations de la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans le domaine $H^1(\varphi^2 dx)$ de l'extension maximale de $(\mathcal{E}, \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d))$ (cf [AKR90]), densité qui implique l'unicité Markovienne.

La première démonstration (th 3.2.7) répond à une demande des analystes : Ils souhaitaient en effet une preuve purement analytique de l'unicité Markovienne, qui n'avait été démontrée jusque là qu'en mélangeant analyse et probabilités. Cette preuve, élémentaire, reprend une technique d'approximation par convolution du chapitre précédent (cf th 2.2.8).

La seconde démonstration, "presque entièrement" probabiliste, consiste à identifier le processus associé à la plus petite extension fermée $(\mathcal{E}, H_o^1(\varphi^2 dx))$ de $(\mathcal{E}, \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d))$: Grâce à un théorème "à la Girsanov" (utilisé sous une forme due à Cattiaux et Léonard [CL94], et généralisant un résultat antérieur de Meyer et Zheng [Zhe85] et [MZ85]), on ajoute au processus de référence (ici, le Brownien classique) le drift $\frac{\nabla p}{p}$.

On vérifie que le processus $\varphi^2 dx$ réversible obtenu est associé à $(\mathcal{E}, H^1_o(\varphi^2 dx))$ et qu'il n'atteint pas l'ensemble $\{\varphi = 0\}$ en un temps fini (prop 3.4.3), et on en déduit (par des techniques classiques de théorie du potentiel) l'égalité $H^1_o(\varphi^2 dx) = H^1(\varphi^2 dx)$ (th 3.5.4).

Comme application de ce résultat, nous démontrons ensuite que toute mesure stationnaire d'énergie finie pour le processus de Hunt $(Q^\sigma_x)_x$ associé à $(\mathcal{E}, H^1(\varphi^2 dx))$ est en fait une mesure réversible (th 3.6.5) et nous identifions la forme de sa densité. Pour cela, on construit une version explicite de la famille $(Q^\sigma_x)_x$, puis on montre que la loi de ce processus partant de la mesure stationnaire étudiée est l'unique élément minimisant d'une fonction d'entropie. L'invariance de l'entropie par retournement du temps implique alors la réversibilité.

Le troisième et dernier chapitre de cette thèse consiste en une extension au cas où σ est quelconque des méthodes et des résultats du second, en s'aidant de résultats obtenus dans le premier. L'espace de base n'est plus ici $H^1(\mathbb{R}^d)$, mais $H(dx, a\,dx) = \Big\{ f \in L^2(D, dx) \quad / \quad \sigma\nabla f \in L^2(D, dx) \Big\}$ déjà introduit dans le premier chapitre (cf def 2.2.3, prop 2.2.5 et def 4.2.1). Ainsi qu'il a été dit précédemment, cet espace a de moins bonnes propriétés analytiques que $H^1(\mathbb{R}^d)$, car $\sigma\nabla$ n'est pas défini au sens de Gâteaux (ce qui empêche d'adapter à ce nouveau cas la preuve analytique de l'unicité Markovienne pour $\sigma \equiv Id$). Mais comme on l'a montré au chapitre 2, il conserve une propriété cruciale : la forme $\mathcal{E}$ est régulière sur cet espace quand $p \equiv 1$, elle a donc un processus de Hunt associé W^σ qui remplacera ici le Brownien.

On se donne un $\varphi \in H(dx, a\,dx)$, on ajoute "par Girsanov" le drift $\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi}$ au processus W^σ et on montre que le processus ainsi obtenu est associé à la plus petite extension fermée de $(\mathcal{E}, \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d))$. Comme au chapitre 3, le fait que ce processus n'atteigne pas $\{\varphi = 0\}$ en temps fini implique la densité de $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ dans l'ensemble des fonctions f bornées pour lesquelles on peut définir (par intégration par parties) un $\overline{\sigma\nabla}f$ appartenant à $L^2(\varphi^2 dx)$. Ceci prouve que $\mathcal{E}$, définie sur la fermeture $H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ de cet ensemble, est une forme de Dirichlet régulière (th 4.3.4). Cependant, faute de résultat de maximalité analogue à celui de [AKR90], le problème de l'unicité Markovienne reste ouvert. Enfin, comme dans l'article précédent, mais sous des hypothèses plus fortes (en particulier de bornitude des densités) on montre que les mesures stationnaires d'énergie finie pour le processus associé à l'extension minimale sont réversibles (cf th 4.4.6).

Chapitre 2

Diffusions réfléchies réversibles dégénérées

2.1 Introduction

Quand on se donne un ouvert connexe D de $\mathbb{R}^d$, une probabilité μ sur D et une matrice de diffusion $\sigma(x)$ en tout point x de D, un problème intéressant consiste à chercher à construire un processus réfléchi μ-réversible de matrice σ dans $\overline{D}$. La réversibilité impose au processus une direction de réflexion qui peut ne pas être la normale au bord de D.

Dans le cas où $\sigma \equiv Id$ et où $\dfrac{d\mu}{dx} = C^{ste}$, ce processus s'appelle le brownien réfléchi dans $\overline{D}$. Si D est un ouvert à bord lisse, on dispose de constructions probabilistes classiques (cf [IW88] pour le cas où D est une demi-droite ou un demi-espace, [SV71] pour le cas où D est à bord $\mathcal{C}^2$) et il est fortement markovien. Si D est quelconque (de mesure de Lebesgue finie), Fukushima a montré qu'on peut encore trouver une compactification $\tilde{D}$ de D dans laquelle le brownien réfléchi réversible est fortement markovien (cf [Fuk67], voir également [Sil76]). Le bord de $\tilde{D}$ s'identifie à la frontière de Kuramochi. Si D est Lipschitz, ce n'est autre que la frontière euclidienne (cf Bass et Hsu [BH91] et [BH90]) et le brownien réfléchi dans $\overline{D}$ admet alors la décomposition :

$$X_t = X_o + B_t + \int_o^t \vec{n}(X_s)\, dL_s$$

où B est un brownien d-dimensionnel et où $\vec{n}$ est la normale intérieure au bord de D. L est un processus croissant qui ne croît que quand X est sur le bord ∂D de D :

$$dL_t = \mathbb{1}_{X_t \in \partial D}\, dL_t$$

Quand la matrice de diffusion σ est non triviale (mais reste lipschitzienne), Tanaka a construit un processus réfléchi de matrice σ dans $\overline{D}$, dans le cas où D est un ouvert convexe et où la réflexion au bord se fait dans la direction de la normale (cf [Tan79]). Lions et Sznitman ont étendu ensuite ce résultat au cas où la direction de réflexion peut être oblique et où D est seulement 'admissible' (par exemple, D à bord lisse par morceaux avec des angles convexes ; voir [LS84] pour une définition plus précise de l'admissibilité).

Lorsqu'on veut que le processus réfléchi obtenu soit réversible, un outil privilégié de construction est la forme de Dirichlet associée (cf Fukushima [Fuk80]). R. Williams et Zheng ont utilisé la forme de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{H}) = H^1(D) \\ \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{H}) \quad \mathcal{H}(f,f) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D |\nabla f|^2\, dx \end{cases}$$

pour construire le brownien réfléchi réversible comme limite d'une suite faiblement convergente de diffusions dans $\overline{D}$ (cf [WZ90]). Sous de faibles hypothèses de régularité du bord de D (condition de Minkowski), ce brownien réfléchi dans $\overline{D}$ est une semi-martingale (une CNS sur D pour que ce soit une quasi-martingale est donnée dans [CFW93]). Mais ce n'est pas, dans le cas général, un processus fortement markovien. Ce type de construction a ensuite été étendue par Pardoux et R. Williams [PW94] au cas d'un processus réfléchi faiblement markovien μ-réversible de matrice de diffusion σ (avec σ et $p = \dfrac{d\mu}{dx}$ assez régulières et σ localement uniformément elliptique).

Par ailleurs, pour D vérifiant une hypothèse plus faible que celle de 'contenu de Minkowski', Chen a construit un brownien réfléchi réversible fortement markovien dans une compactification $\tilde{D}$ de D qui, comme celle de Kuramochi, rend $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$ régulière. Ce brownien réfléchi réversible admet la décomposition en semi-martingale suivante :

$$X_t = X_o + B_t + \int_o^t \vec{n}(X_s)\ dL_s$$

où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire défini en presque tout point du bord de $\tilde{D}$. Par analogie avec le cas où D est Lipschitz, on dit encore que $\vec{n}$ est une 'normale intérieure'.

Si σ est uniformément elliptique et $p = \dfrac{d\mu}{dx}$ encadrée par deux constantes strictement positives, on déduit de la décomposition du brownien réfléchi dans $\tilde{D}$ celle d'une diffusion réfléchie μ-réversible de matrice σ dans $\tilde{D}$:

$$X_t = X_o + \int_o^t \sigma(X_s)\ dB_s + \int_o^t \frac{\nabla.(\sigma^*\sigma p)}{2p}(X_s)\ ds + \int_o^t (\sigma^*\sigma\vec{n})(X_s)\ p(X_s)\ dL_s$$

La réflexion a lieu ici dans la direction 'conormale' $\sigma^*\sigma\vec{n}$, où $\vec{n}$ est la 'normale' construite par le brownien.

Nous étudions ici le cas où σ n'est pas supposé elliptique. A partir de la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) = \left\{ f \in L^2(D,\mu) \quad / \quad \sigma\nabla f \in L^2(D,\mu) \right\} \\ \forall f,g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \quad \mathcal{E}^s(f,g) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D \sigma\nabla f.\sigma\nabla g\ d\mu \end{cases}$$

dont on montre que c'est une forme de Dirichlet, on construit la loi Q^s d'un processus réfléchi μ-réversible dans $\overline{D}$, dont le semi-groupe de transition est le semi-groupe de Markov associé à $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$. Par un raisonnement analogue à celui de [PW94], on montre que Q^s est la loi d'une semi-martingale. Pour pouvoir étudier le terme de réflexion en utilisant la normale $\vec{n}$ de Chen, on se place ensuite sur la compactification $\tilde{D}$, en supposant $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ régulière sur $\tilde{D}$. Le processus associé se décompose alors en fonctionnelles additives (cf [Fuk80]) et par identification avec la décomposition en semi-martingale, on montre que la réflexion a bien lieu dans la direction conormale et on obtient l'expression de la mesure de Revuz.

Cet article est organisé de la façon suivante :

La partie 2.2 introduit l'espace

$$H(D,\mu,a\mu) = \left\{ f \in L^2(D,\mu) \quad / \quad \sigma\nabla f \in L^2(D,\mu) \right\}$$

qui sera le domaine de la forme $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$, rappelle les liens qui existent entre formes de Dirichlet, semi-groupes de Markov et processus, et présente la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$.

Dans la partie 2.3, on construit une suite d'approximations de la forme $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ par des formes de Dirichlet régulières $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$. On étudie les lois Q^n des diffusions associées aux $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ et on en donne une décomposition en semi-martingale. La partie 2.4 est consacrée à l'étude de la suite $(Q^n)_n$ dont on montre qu'elle converge faiblement vers la loi de processus Q^s associée à $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$. On démontre dans la partie suivante que Q^s est la loi d'une semi-martingale, à condition que D vérifie une hypothèse du type "contenu de Minkowski".

Dans la partie 2.6, après avoir présenté la normale $\vec{n}$ et la mesure régulière α construites par Chen sur le bord d'une compactification $\tilde{D}$ de D, on décompose le processus associé à $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ en fonctionnelles additives. En identifiant avec la décomposition en semi-martingale déjà obtenue à la partie 2.5, on isole le terme de réflexion, dont on montre qu'il est associé à la mesure régulière sur le bord $\frac{1}{2}\sigma^*\sigma\, \vec{n}\; p\; d\alpha$. Ceci est fait sous l'hypothèse que $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est régulière sur la compactification $\tilde{D}$.

Les cas où nous savons montrer que cette hypothèse est vérifiée sont énumérés dans la partie 2.7. Mais la question de savoir si cette hypothèse est vérifiée dans le cas général reste un problème ouvert.

2.2 La forme de Dirichlet

2.2.1 Les espaces fonctionnels

Dans toute la suite, on travaillera dans $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 1$. Si D est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on note $\mathcal{C}(D)$ l'ensemble des fonctions continues sur D, $\mathcal{C}_b(D)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur D, et $\mathcal{C}_c(D)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans D. $\mathcal{C}^n(D)$ est l'espace des fonctions n fois continûment différentiables sur D, $\mathcal{C}^n_b(D)$ celui des fonctions de $\mathcal{C}^n(D)$ bornées ainsi que leurs n premières dérivées et $\mathcal{C}^n_c(D)$ celui des fonctions de $\mathcal{C}^n(D)$ à support compact dans D. Lorsque f sera une fonction à valeurs vectorielles ou matricielles, on dira que f est $\mathcal{C}^n(D)$ (resp. $\mathcal{C}^n_b(D)$, $\mathcal{C}^n_c(D)$, etc) si tous ses coefficients le sont.

Si $f \in \mathcal{C}^1(D)$, on note $\nabla f = (\partial_i f)_{1\leq i\leq d}$ son gradient et $\nabla . f = \sum_{i=1}^d \partial_i f$ sa divergence. Si a est une fonction $\mathcal{C}^1$ de D à valeurs dans l'espace des matrices $d \times d$, $\nabla . a$ désignera le vecteur $\left(\sum_{i=1}^d \partial_i a_{ij}\right)_{1\leq j\leq d}$.

Pour toute la suite, on fixe D, domaine (i.e. ouvert connexe) de $\mathbb{R}^d$.

On se donne une application $\sigma : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{S}_d$ où $\mathcal{S}_d$ désigne l'ensemble des matrices $d \times d$ et on note $a = \sigma^*\sigma$.

On se donne également $p : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $p > 0$ sur D et $\displaystyle\int_D p\; dx = 1$. La probabilité μ sur D est définie par $d\mu(x) = p(x)\; dx$

On met sur σ et p les hypothèses suivantes :

$$(\mathrm{H\ S\ P}) \qquad \begin{array}{l} \sigma \in \mathcal{C}^2_b(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^d) \\ p \in \mathcal{C}^1_b(D) \\ et \displaystyle\int_D \frac{\nabla p}{p} . a \frac{\nabla p}{p}\; p\; dx < +\infty \ \textit{(condition d'énergie finie)} \end{array}$$

Comme d'habitude, on note $L^2(D,\mu)$ l'espace des fonctions (plus exactement des classes de fonctions pour l'égalité $\mu - p.p.$) de carré intégrable par rapport à μ. $L^2(D,\mu)$ est un espace de Hilbert et on l'identifie avec son dual.

Comme p est continue bornée strictement positive sur D, si on note dx la mesure de Lebesgue, on remarque que pour tout compact K de D, p vérifie

$$0 < \min_K p \leq p \leq \max_K p < +\infty \qquad \text{sur } K$$

et donc les normes $\| \ \|_{L^2(K,dx)}$ et $\| \ \|_{L^2(K,\mu)}$ sont équivalentes et les espaces $L^2(K, dx)$ et $L^2(K, \mu)$ égaux. En particulier, toute fonction de $L^2(D, \mu)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur tout compact de D.

Définition 2.2.1 *Si $f \in L^2(D, \mu)$, on dit que $\sigma\nabla f \in L^2(D, \mu)$ "au sens des distributions sur D" si il existe $g \in L^2(D, \mu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(D) \qquad \int_D \varphi(x)\ g(x)\ dx = -\int_D \nabla.(\varphi\sigma^*)(x)\ f(x)\ dx$$

et dans ce cas on dit que $g = \sigma\nabla f$ "au sens des distributions sur D".

Dans la suite, "au sens des distributions sur D" sera sous-entendu chaque fois qu'on utilisera la notation $\sigma\nabla$.

Remarque 2.2.2 : Si $\sigma\nabla f$ existe, elle est forcément unique (en tant qu'élément de $L^2(D, \mu)$). D'autre part, si $f \in \mathcal{C}^1(D)$, ∇f et donc $\sigma\nabla f$ sont également définies au sens des dérivées classiques. Une simple intégration par parties prouve que les deux définitions coïncident.

Définition 2.2.3 *On note $H(D, \mu, a\mu)$ l'espace des fonctions f de $L^2(D, \mu)$ telles que $\sigma\nabla f$ est défini dans $L^2(D, \mu)$:*

$$H(D, \mu, a\mu) = \left\{ f \in L^2(D, \mu) \quad / \quad \sigma\nabla f \in L^2(D, \mu) \right\}$$

et on met sur $H(D, \mu, a\mu)$ le produit scalaire

$$\forall f, g \in H(D, \mu, a\mu) \quad (f, g)_{H(D,\mu,a\mu)} = \int_D fg\ d\mu + \int_D (\sigma\nabla f).(\sigma\nabla g)\ d\mu$$

et la norme $\| \ \|_{H(D,\mu,a\mu)}$ correspondante.

Pour pouvoir étudier les propriétés de l'espace $H(D, \mu, a\mu)$, démontrons d'abord un premier résultat de convergence pour la norme $\| \ \|_{H(D,\mu,a\mu)}$.

On utilise une suite régularisante : Notons J une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $0 \leq J \leq 1$, supp $J \subset \overline{B(0,1)}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} J(x)\ dx = 1$.

On définit la suite régularisante $(J_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ par : $J_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^d} J\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ pour $\varepsilon > 0$.

Elle a la propriété suivante :

Lemme 2.2.4 *Soient D' et Δ des ouverts bornés de D tels que $D' \subset \overline{D'} \subset \Delta \subset \overline{\Delta} \subset D$. Soit f une fonction de $H(D, \mu, a\mu)$ nulle hors de D'.*
Pour tout ε inférieur à $d(D', \partial\Delta)$, $J_\varepsilon * f$ définie par $(J_\varepsilon * f)(x) = \displaystyle\int_D J_\varepsilon(x - y) f(y) dy$ est $\mathcal{C}_c^\infty(\Delta)$. De plus, quand ε tend vers 0, $J_\varepsilon * f$ converge vers f dans $H(D, \mu, a\mu)$.

Preuve: Montrons d'abord que $J_\varepsilon * f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Delta)$.

Puisque $\overline{\Delta}$ est compact dans D, les normes $\| \;\|_{L^2(\overline{\Delta},dx)}$ et $\| \;\|_{L^2(\overline{\Delta},\mu)}$ sont équivalentes. En particulier, comme $f \in L^2(\overline{\Delta},\mu)$, $f \in L^2(\overline{\Delta},dx)$ donc $f \in L^1_{loc}(\overline{\Delta},dx)$. Le lemme 2.18(b) de [Ada75] assure alors que $J_\varepsilon * f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Delta)$.

On veut maintenant montrer que

$$\|J_\varepsilon * f - f\|_{H(D,\mu,a\mu)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Comme f et $\sigma\nabla f$ appartiennent à $L^2(\Delta,\mu) = L^2(\Delta,dx)$, d'après le lemme 2.18(c) de [Ada75], on sait que $J_\varepsilon * f$ et $J_\varepsilon * (\sigma\nabla f)$ convergent respectivement vers f et $\sigma\nabla f$ dans $L^2(\Delta,dx)$, donc dans $L^2(\Delta,\mu)$. Et comme f et $\sigma\nabla f$ sont à support dans D', cette convergence a également lieu dans $L^2(D,\mu)$.

Pour montrer que

$$\begin{aligned}
&\|J_\varepsilon * f - f\|^2_{H(D,\mu,a\mu)} \\
&\quad \leq \; 3\|J_\varepsilon * f - f\|^2_{L^2(D,\mu)} + 3\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * f) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla f)\|^2_{L^2(D,\mu)} \\
&\qquad + 3\;\|J_\varepsilon * (\sigma\nabla f) - \sigma\nabla f\|^2_{L^2(D,\mu)}
\end{aligned}$$

tend vers 0 quand ε tend vers 0, il suffit donc de montrer que

$$\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * f) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla f)\|^2_{L^2(D,\mu)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Pour pouvoir se ramener au cas où f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, on établit d'abord le résultat suivant :

Pour tout ε de $]0; \min(d(D',\partial\Delta), d(\Delta,\partial D))[$, pour toute fonction g de $H(D,\mu,a\mu)$ à support dans D', on a :

$$\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * g) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla g)\|^2_{L^2(D,\mu)} \leq C^{ste}\|g\|^2_{L^2(D',dx)}$$

où C^{ste} est un nombre qui ne dépend que de d, σ, p et J.

$$\begin{aligned}
&\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * g) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla g)\|^2_{L^2(D,\mu)} \\
&\quad = \int_\Delta \left|\sigma(x)\nabla\left(\int_{D'} J_\varepsilon(x-y)\;g(y)\;dy\right) - \int_{D'} J_\varepsilon(x-y)\;(\sigma\nabla g)(y)\;dy\right|^2 p(x)\;dx \\
&\quad = \int_\Delta \left|\sigma(x)\int_{D'} \nabla J_\varepsilon(x-y)\;g(y)\;dy + \int_{D'} \nabla.(\sigma^* J_\varepsilon(x-\cdot))(y)\;g(y)\;dy\right|^2 p(x)\;dx
\end{aligned}$$

par définition de $\sigma\nabla g$, puisque $J_\varepsilon(x-\cdot) \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$ pour tout x de Δ.

$$= \int_\Delta \left|\int_{B(x,\varepsilon)} g(y)\;[\sigma(x)-\sigma(y)]\;\nabla J_\varepsilon(x-y) + g(y)\;J_\varepsilon(x-y)\;\nabla.\sigma^*(y)\;dy\right|^2 p(x)\;dx$$

où $B(x,\varepsilon)$ est la boule fermée de centre x et de rayon ε

On majore cette expression en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * g) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla g)\|^2_{L^2(D,\mu)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_\Delta \varepsilon^d \operatorname{vol}(B(0,1)) \int_{B(x,\varepsilon)} |g(y)\ [\sigma(x)-\sigma(y)]\ \nabla J_\varepsilon(x-y) \\
&\qquad + g(y)\ J_\varepsilon(x-y)\ \nabla.\sigma^*(y)|^2\ dy\ p(x)\ dx
\end{aligned}$$

où $\operatorname{vol}(B(0,1))$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon^d \operatorname{vol}(B(0,1)) \int_\Delta \int_{B(x,\varepsilon)} 2\ g^2(y)\ d\ \|\nabla\sigma\|^2_\infty\ |x-y|^2\ |\nabla J_\varepsilon(x-y)|^2 \\
&\qquad + 2\ g^2(y)\ J^2_\varepsilon(x-y)\ d\ \|\nabla\sigma\|^2_\infty\ dy\ p(x)\ dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\varepsilon^d \operatorname{vol}(B(0,1))\ d\ \|\nabla\sigma\|^2_\infty \|p\|_\infty \\
&\qquad \int_D g^2(y) \int_\Delta |\nabla J_\varepsilon(x-y)|^2\ \varepsilon^2 + J^2_\varepsilon(x-y)\ dx\ dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\varepsilon^d \operatorname{vol}(B(0,1))\ d\ \|\nabla\sigma\|^2_\infty \|p\|_\infty \\
&\qquad \int_D g^2(y) \int_{\mathbb{R}^d} \left|\frac{1}{\varepsilon^d}\ \frac{1}{\varepsilon}\ \nabla J\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 \varepsilon^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon^d} J\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^2\ dx\ dy
\end{aligned}$$

Enfin,on effectue le changement de variable $x \leftarrow \frac{x}{\varepsilon}$ pour obtenir :

$$\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * g) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla g)\|^2_{L^2(D,\mu)}$$

$$\leq 2 \operatorname{vol}(B(0,1))\ d\ \|\nabla\sigma\|^2_\infty \|p\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla J|^2 + J^2\ dx\right) \|g\|^2_{L^2(D',dx)}$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

Puisque $\mathcal{C}^\infty_c(D')$ est dense dans $L^2(D',dx)$, il ne nous reste plus à montrer que

$$\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * f) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla f)\|^2_{L^2(D,\mu)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

pour $f \in \mathcal{C}^\infty_c(D')$.

$$\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * f) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla f)\|^2_{L^2(D,\mu)}$$

$$= \int_D \left|\int_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon(x-y)\ [\sigma(x)-\sigma(y)]\ \nabla f(y)\ dy\right|^2 p(x)\ dx$$

$$\leq \int_D \varepsilon^d |B(0,1)| \int_{\mathbb{R}^d} J^2_\varepsilon(x-y)\ \|\nabla\sigma\|^2_\infty\ |x-y|^2\ |\nabla f|^2(y)\ dy\ p(x)\ dx$$

Puisque J est inférieure à 1 sur $\mathbb{R}^d$, on a la majoration :

$$\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * f) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla f)\|^2_{L^2(D,\mu)}$$

$$\leq \varepsilon^d |B(0,1)|\ \|\nabla\sigma\|^2_\infty \|p\|_\infty \int_D \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon^d} J_\varepsilon(x-y)\ \varepsilon^2\ |\nabla f|^2(y)\ dy\ dx$$

$$\leq \varepsilon^2 |B(0,1)|\ \|\nabla\sigma\|^2_\infty \|p\|_\infty\ \|J_\varepsilon * |\nabla f|^2\|_{L^1(D,dx)}$$

et comme $|\nabla f|^2 \in L^1(D,dx)$, $\|J_\varepsilon * |\nabla f|^2\|_{L^1(D,dx)}$ tend quand ε tend vers 0 vers $\| \; |\nabla f|^2 \; \|_{L^1(D,dx)}$, donc $\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * f) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla f)\|_{L^2(D,\mu)}$ converge vers 0.

Ceci termine la preuve du lemme 2.2.4

∎

Une première conséquence de ce lemme est de donner plusieurs définitions équivalentes de $\sigma\nabla f$:

Proposition 2.2.5 *Pour une fonction $f \in L^2(D,\mu)$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

i. $\exists g_1 \in L^2(D,\mu) \quad / \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(D) \quad \int_D \varphi \; g_1 \; dx = -\int_D \nabla.(\varphi\sigma^*) \; f \; dx$

ii. $\exists g_2 \in L^2(D,\mu) \quad / \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D) \quad \int_D \varphi \; g_2 \; dx = -\int_D \nabla.(\varphi\sigma^*) \; f \; dx$

iii. $\exists g_3 \in L^2(D,\mu) \quad / \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(D)$

$$\int_D \varphi \; g_3 \; d\mu = -\int_D \nabla.(\varphi\sigma^*) \; f \; d\mu - \int_D \varphi \; \sigma\frac{\nabla p}{p} \; f \; d\mu$$

Les fonctions g_1, g_2 et g_3 ainsi définies sont uniques, et elles sont égales à $\sigma\nabla f$.

Preuve: L'unicité de g_1, g_2 et g_3 est immédiate, elle découle de la densité de $\mathcal{C}_c^1(D)$ dans $L^2(D,\mu)$ (ou de $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ dans $L^2(K,dx)$ pour tout compact K de D dans le cas de g_2).

$(i) \Rightarrow (iii)$: Supposons que f vérifie (i) et prenons $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(D)$. Comme φp appartient à $\mathcal{C}_c^1(D)$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_D \varphi \; g_1 \; p \; dx &= -\int_D \nabla.(\varphi p\sigma^*) \; f \; dx \\
&= -\int_D \nabla.(\varphi\sigma^*) \; f \; p \; dx - \int_D \varphi \; \sigma\nabla p \; f \; dx \\
&= -\int_D \nabla.(\varphi\sigma^*) \; f \; d\mu - \int_D \varphi \; \sigma\frac{\nabla p}{p} \; f \; d\mu
\end{aligned}$$

donc f vérifie (iii) et $g_3 = g_1$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Si f vérifie (iii) et si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$, la fonction $\dfrac{\varphi}{p}$ appartient à $\mathcal{C}_c^1(D)$, donc :

$$\begin{aligned}
\int_D \varphi\ g_3\ dx &= \int_D \varphi\ g_3\ \frac{\varphi}{p}\ d\mu \\
&= -\int_D \nabla.(\frac{\varphi}{p}\ \sigma^*)\ f\ d\mu - \int_D \frac{\varphi}{p}\ \sigma\frac{\nabla p}{p}\ f\ d\mu \\
&= -\int_D \frac{1}{p}\ \nabla.(\varphi\sigma^*)\ f\ p\ dx - \int_D \varphi\ \sigma(-\frac{\nabla p}{p^2})\ f\ p\ dx \\
&\qquad - \int_D \varphi\ \sigma\frac{\nabla p}{p}\ f\ dx \\
&= -\int_D \nabla.(\varphi\sigma^*)\ f\ dx
\end{aligned}$$

donc f vérifie (ii) et $g_2 = g_3$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Supposons que f vérifie (ii). Pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(D)$, on peut trouver des ouverts bornés D' et Δ de D tels que supp $\varphi \subset D' \subset \overline{D'} \subset \Delta \subset \overline{\Delta} \subset D$. Le lemme 2.2.4 assure alors que $\forall \varepsilon < d(D', \partial\Delta)\quad J_\varepsilon * \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Delta)$ et $J_\varepsilon * \varphi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{H(D,\mu,a\mu)} \varphi$.

Par définition de g_2 :

$$\begin{aligned}
\int_D (J_\varepsilon * \varphi)\ g_2\ dx &= -\int_D \nabla.((J_\varepsilon * \varphi)\sigma^*)\ f\ dx \\
&= -\int_D (J_\varepsilon * \varphi)(\nabla.\sigma^*)\ f\ dx - \int_D \sigma\nabla(J_\varepsilon * \varphi)\ f\ dx
\end{aligned}$$

Et comme $J_\varepsilon*\varphi$ et $\sigma\nabla(J_\varepsilon*\varphi)$ convergent vers φ et $\sigma\nabla\varphi$ dans $L^2(D,\mu)$ et donc dans $L^2(\Delta, dx)$, on peut faire tendre ε vers 0 dans l'égalité précédente et on obtient :

$$\int_D \varphi\, g_2\ dx = -\int_D \varphi\ (\nabla.\sigma^*)\ f\ dx - \int_D \sigma\nabla\varphi\ f\ dx = -\int_D \nabla.(\varphi\sigma^*)\ f\ dx$$

ce qui montre que (i) est vraie, avec $g_1 = g_2$.

On a montré que (i), (ii) et (iii) étaient équivalentes et que $g_1 = g_2 = g_3$. Comme par définition $g_1 = \sigma\nabla f$, la proposition est démontrée.

∎

Proposition 2.2.6 *Si $f \in H(D,\mu,a\mu)$ et $g \in \mathcal{C}_b^1(D)$ alors $fg \in H(D,\mu,a\mu)$ et $\sigma\nabla(fg) = g\ \sigma\nabla f + f\ \sigma\nabla g$.*

Preuve: Les hypothèses mises sur f et g (et le fait que σ est bornée) assurent que $fg \in L^2(D,\mu)$ et que $g\ \sigma\nabla f + f\ \sigma\nabla g \in L^2(D,\mu)$. De plus, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(D)$:

$$\begin{aligned}
\int_D \varphi\ (g\ \sigma\nabla f + f\ \sigma\nabla g)\ dx &= -\int_D \nabla.(\varphi\ g\ \sigma^*)\ f\ dx + \int_D \varphi\ \sigma\nabla g\ f\ dx \\
&= -\int_D \nabla.(\varphi\ \sigma^*)\ fg\ dx
\end{aligned}$$

car $\nabla.(\varphi\ g\ \sigma^*) = \nabla.(\varphi\ \sigma^*)\ g + \varphi\ \sigma\nabla g$ puisque ces trois fonctions sont $\mathcal{C}^1$. Par définition de $\sigma\nabla(fg)$, on a donc

$$\sigma\nabla(fg) = g\ \sigma\nabla f + f\ \sigma\nabla g$$

∎

Si σ est uniformément elliptique et p uniformément minorée par un nombre strictement positif, $H(D,\mu,a\mu)$ est égal à $H^1(D)$.Même quand σ et p peuvent dégénérer, $H(D,\mu,a\mu)$ conserve certaines propriétés classiques de $H^1(D)$. En particulier :

Proposition 2.2.7 *L'espace $H(D,\mu,a\mu)$ est un espace de Hilbert.*

et

Théorème 2.2.8 *Le sous-espace $\mathcal{C}^\infty(D) \cap H(D,\mu,a\mu)$ est dense dans l'espace de Hilbert $H(D,\mu,a\mu)$.*

La proposition 2.2.7 est aisée à démontrer, en utilisant la définition de $\sigma\nabla$ et la complétude de $L^2(D,\mu)$:

Preuve: Il faut montrer que $(H(D,\mu,a\mu), \|\ \ \|_{H(D,\mu,a\mu)})$ est complet.
Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans $H(D,\mu,a\mu)$. Les suites $(u_n)_n$ et $(\sigma\nabla u_n)_n$ sont de Cauchy dans $L^2(D,\mu)$, donc elles convergent et leurs limites respectives f et g appartiennent à $L^2(D,\mu)$.
Pour montrer que $(u_n)_n$ converge vers f pour la norme $\|\ \ \|_{H(D,\mu,a\mu)}$, il suffit de montrer que $g = \sigma\nabla f$ au sens des distributions sur D.
Pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(D)$:

$$\begin{aligned}
\int_D \varphi\ g\ dx &= \int_D \frac{\varphi}{p}\ g\ p\ dx \quad \text{et comme} \quad \frac{\varphi}{p} \in L^2(D,\mu)\ : \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_D \frac{\varphi}{p}\ \sigma\ \nabla u_n\ p\ dx \\
&= -\lim_{n\to+\infty} \int_D \nabla.(\varphi\sigma^*)\ u_n\ dx \\
&= -\lim_{n\to+\infty} \int_D \left(\frac{1}{p}\nabla.(\varphi\sigma^*)\right) u_n\ p\ dx \\
&= -\int_D \left(\frac{1}{p}\nabla.(\varphi\sigma^*)\right) f\ p\ dx \quad \text{car} \quad \frac{1}{p}\nabla.(\varphi\sigma^*) \in L^2(D,\mu) \\
&= -\int_D \nabla.(\varphi\sigma^*) f\ dx
\end{aligned}$$

donc $g = \sigma\nabla f$, ce qui prouve que f est la limite de $(u_n)_n$ dans $H(D,\mu,a\mu)$, et donc que $H(D,\mu,a\mu)$ est complet.

∎

Pour démontrer le théorème 2.2.8 , on utilise le lemme 2.2.4

Fixons $u \in H(D,\mu,a\mu)$ et $\eta > 0$.

On veut construire $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(D)$ telle que $\|u-\Phi\|_{H(D,\mu,a\mu)} \leq \eta$

Notons $D'_k = D''_{k+1} - \overline{D''_{k-1}}$ où $D''_k = \left\{x \in D \quad / \quad |x| < k \text{ et } d(x,\partial D) > \frac{1}{k}\right\}$.

La famille d'ouverts $(D'_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ recouvre D donc d'après le th 3.14 de [Ada75], il existe une collection Ψ de fonctions ψ de $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ telle que :

- $\forall \psi \in \Psi \quad 0 \leq \psi \leq 1$
- Pour tout compact K de D, le nombre de $\psi \in \Psi$ non identiquement nulles sur K est fini.
- $\forall \psi \in \Psi \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \quad / \quad \text{supp } \psi \subset D'_k$
- $\forall x \in D \quad \sum_{\psi\in\Psi} \psi(x) = 1 \qquad$ (il s'agit d'une somme finie)

On note ψ_k la somme (finie car $\overline{D'_k}$ est un compact de D) des $\psi \in \Psi$ vérifiant $\text{supp } \psi \subset D'_k$ et $\text{supp } \psi \not\subset D'_{k-1}$. On a alors $\psi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(D'_k)$ et $\forall x \in D \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(x) = 1$.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$:

Grâce à la proposition 2.2.6, on sait que $\psi_k u \in H(D,\mu,a\mu)$ et que $\sigma\nabla(\psi_k u) = \sigma(\nabla\psi_k)\, u + \psi_k\, \sigma\nabla u$.

D'autre part, $\text{supp } (\psi_k u) \subset D'_k$ donc on peut appliquer le lemme 2.2.4 à $\psi_k u$, D'_k et $\Delta_k = D'_{k-1} \cup D'_k \cup D'_{k+1}$ et on obtient

$$\forall \varepsilon \in \left]0; \tfrac{1}{k+2} - \tfrac{1}{k+1}\right[\quad J_\varepsilon * (\psi_k u) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Delta_k)$$

$$\text{et } J_\varepsilon * (\psi_k u) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{H(D,\mu,a\mu)} \psi_k u$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit $\varepsilon_k \in \left]0; \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right[$ tel que

$$\|J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u) - \psi_k u\|_{H(D,\mu,a\mu)} \leq \frac{\eta}{2^k}$$

La fonction $\Phi = \sum_{k=1}^{+\infty} J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u)$ est alors $\mathcal{C}^\infty$ sur D (car la somme est finie au voisinage de tout point de D).

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\|\Phi - u\|_{H(D,\mu,a\mu)} &= \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u) - \psi_k u \right\|_{H(D,\mu,a\mu)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u) - \psi_k u\|_{H(D,\mu,a\mu)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\eta}{2^k} = \eta
\end{aligned}$$

donc le théorème est démontré.

Remarque 2.2.9 : Dans la définition de $H(D,\mu,a\mu)$ et dans les démonstrations qui suivent, on n'utilise pas le fait que la mesure μ est de masse totale finie. En particulier, si on note dx la mesure de Lebesgue, $H(D,dx,a\,dx)$ est défini et c'est un espace de Hilbert qui admet $\mathcal{C}^\infty(D)\cap H(D,dx,a\,dx)$ comme sous-espace dense.

Remarque 2.2.10 : Pour les besoins des sections ultérieures, on a choisi ici de travailler avec un σ très régulier. Cependant, la définition de $H(D,\mu,a\mu)$ reste valide, et les résultats précédents vrais, si σ est seulement bornée à dérivée bornée.

2.2.2 Formes et semi-groupes

Dans la suite, on dira que $(\mathcal{E}^1,\mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ est une *forme* sur $L^2(D,\mu)$ si $\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)$ est un sous-espace dense de $L^2(D,\mu)$ et $\mathcal{E}^1$ une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)$.

Si $(\mathcal{E}^1,\mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ et $(\mathcal{E}^2,\mathcal{D}(\mathcal{E}^2))$ sont deux formes sur $L^2(D,\mu)$, $(\mathcal{E}^2,\mathcal{D}(\mathcal{E}^2))$ est une *extension* de $(\mathcal{E}^1,\mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ si on a :

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)\subset\mathcal{D}(\mathcal{E}^2)\quad\text{et}\quad\forall f\in\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)\quad\mathcal{E}^2(f,f)=\mathcal{E}^1(f,f)$$

La forme $(\mathcal{E}^1,\mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ sera dite *fermée* si $\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)$ muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)}=\sqrt{\mathcal{E}^1(f,f)+\|f\|^2_{L^2(D,\mu)}}$$

est un espace de Hilbert.

Elle sera dite fermable si elle a une extension $(\mathcal{E}^2,\mathcal{D}(\mathcal{E}^2))$ qui est une forme fermée sur $L^2(D,\mu)$.

Critère : La forme $(\mathcal{E}^1,\mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ est fermable si et seulement si toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)$ telle que $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(D,\mu)}0$ et $\mathcal{E}^1(u_n-u_m,u_n-u_m)\xrightarrow[n,m\to+\infty]{}0$ vérifie $\mathcal{E}^1(u_n,u_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Si $(\mathcal{E}^1,\mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ est fermable, elle admet une plus petite extension fermée $(\overline{\mathcal{E}^1},\mathcal{D}(\overline{\mathcal{E}^1}))$ définie par : $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{E}^1})$ est le complété de $\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)$ pour $\|\ \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)}$ dans $L^2(D,\mu)$ et $\forall u\in\mathcal{D}(\overline{\mathcal{E}^1})$, $\overline{\mathcal{E}^1}(u,u)=\lim_{n\to+\infty}\mathcal{E}^1(u_n,u_n)$ où $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)$ qui converge vers u en norme $\|\ \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)}$.

La forme $(\mathcal{E}^1,\mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ sera dite *markovienne* si pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction $\Phi_\varepsilon:\mathbb{R}\longrightarrow[-\varepsilon;1+\varepsilon]$ telle que $\forall t\in[0;1]\quad\Phi_\varepsilon(t)=t$, $\forall t<t'\quad 0\le\Phi_\varepsilon(t')-\Phi_\varepsilon(t)\le t'-t$ et

$$\forall u\in\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)\quad\Phi_\varepsilon\circ u\in\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)\quad\text{et}\quad\mathcal{E}^1(\Phi_\varepsilon\circ u,\Phi_\varepsilon\circ u)\le\mathcal{E}^1(u,u)$$

Définition 2.2.11 *On dit que la forme $(\mathcal{E}^1,\mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ est une forme de Dirichlet si elle est markovienne et fermée.*

En particulier, comme la plus petite extension fermée d'une forme markovienne fermable est markovienne (cf [Fuk80] th 2.1.1) c'est une forme de Dirichlet.

Les principales propriétés que peut avoir une forme de Dirichlet sont les suivantes :

La forme de Dirichlet $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ est dite *régulière* si $\mathcal{C}_c(D) \cap \mathcal{D}(\mathcal{E})$ est dense dans $\mathcal{C}_c(D)$ pour la norme uniforme $\| \ \|_\infty$ et dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ pour la norme $\| \ \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E})}$.

Elle est dite *locale* si
$\forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \qquad f, g$ à supports compacts disjoints $\Rightarrow \mathcal{E}(f,g) = 0$

A une forme fermée sont associés un semi-groupe fortement continu, une résolvante fortement continue et un générateur. Rappelons ici brièvement leurs définitions. Pour toute précision ou justification, on se référera à [Fuk80].

Définition 2.2.12 *Soit $(T_t)_{t>0}$ une famille d'opérateurs linéaires symétriques de domaines $L^2(D,\mu)$. On dit que $(T_t)_{t>0}$ est un semi-groupe fortement continu si :*

- $\forall s, t > 0 \quad T_t T_s = T_{t+s}$ *(propriété de semi-groupe)*
- $\forall t > 0 \quad \forall u \in L^2(D,\mu) \quad \|T_t u\|_{L^2(D,\mu)} \leq \|u\|_{L^2(D,\mu)}$ *(propriété de contraction)*
- $\forall u \in L^2(D,\mu) \quad T_t u \xrightarrow[t \to 0]{L^2(D,\mu)} u$ *(continuité forte)*

Définition 2.2.13 *Soit $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ une famille d'opérateurs linéaires symétriques de domaines $L^2(D,\mu)$. On dit que $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ est une résolvante fortement continue si :*

- $\forall \alpha, \beta > 0 \quad R_\alpha - R_\beta + (\alpha - \beta) R_\alpha R_\beta = 0$ *(propriété de résolvante)*
- $\forall \alpha > 0 \quad \forall u \in L^2(D,\mu) \quad \|\alpha R_\alpha u\|_{L^2(D,\mu)} \leq \|u\|_{L^2(D,\mu)}$ *(propriété de contraction)*
- $\forall u \in L^2(D,\mu) \quad \alpha R_\alpha u \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{L^2(D,\mu)} u$ *(continuité forte)*

Définition 2.2.14 *Un opérateur auto-adjoint négatif défini sur un sous-espace dense de $L^2(D,\mu)$ est appelé un générateur.*

A un semi-groupe fortement continu $(T_t)_{t>0}$, on associe le générateur $A = \Theta\left((T_t)_{t>0}\right)$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(A) = \left\{ u \in L^2(D,\mu) \quad / \quad \dfrac{T_t u - u}{t} \text{ converge dans } L^2(D,\mu) \text{ quand } t \to 0 \right\} \\ \forall u \in \mathcal{D}(A) \quad Au = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{T_t u - u}{t} \end{array} \right.$$

Θ est une bijection de l'ensemble des semi-groupes fortement continus sur $L^2(D,\mu)$ vers l'ensemble des générateurs sur $L^2(D,\mu)$. Sa réciproque est donnée par :

$$\Theta^{-1}(A) = (\exp(tA))_{t>0}$$

A une résolvante fortement continue $(R_\alpha)_{\alpha>0}$, on associe également le générateur $A = \Xi\left((R_\alpha)_{\alpha>0}\right)$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(A) = R_\alpha(L^2(D,\mu)) \\ \forall u \in \mathcal{D}(A) \quad Au = \alpha u - R_\alpha^{-1} u \end{array} \right.$$

(ceci est indépendant du $\alpha > 0$ choisi)

Ξ est une bijection de l'ensemble des résolvantes fortement continues sur $L^2(D,\mu)$ vers l'ensemble des générateurs sur $L^2(D,\mu)$, de réciproque :

$$\Xi^{-1}(A) = \left((\alpha - A)^{-1}\right)_{\alpha>0}$$

Il existe également une bijection Υ entre l'ensemble des générateurs sur $L^2(D,\mu)$ et l'ensemble des formes fermées sur $L^2(D,\mu)$, définie par :

$$\begin{aligned}(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E})) = \Upsilon\left((A,\mathcal{D}(A))\right) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}\left(\sqrt{-A}\right) \\ \forall u,v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad \mathcal{E}(u,v) = \left(\sqrt{-A}u, \sqrt{-A}v\right)_{L^2(D,\mu)} \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}) \\ \forall u \in \mathcal{D}(A) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad \mathcal{E}(u,v) = (-Au,v)_{L^2(D,\mu)} \end{array}\right.\end{aligned}$$

Ces différentes bijections permettent d'associer à une forme fermée $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ sur $L^2(D,\mu)$ un générateur $(A,\mathcal{D}(A))$, un semi-groupe fortement continu $(T_t)_{t>0}$ et une résolvante fortement continue $(R_\alpha)_{\alpha>0}$.

Les affirmations suivantes sont alors équivalentes :

- $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ est markovienne (i.e. c'est une forme de Dirichlet)
- $\forall t>0 \qquad \forall u \in L^2(D,\mu) \quad 0 \le u \le 1 \quad \mu-p.s. \Rightarrow 0 \le T_t u \le 1 \quad \mu-p.s.$
- $\forall \alpha>0 \qquad \forall u \in L^2(D,\mu) \quad 0 \le u \le 1 \quad \mu-p.s. \Rightarrow 0 \le \alpha R_\alpha u \le 1 \quad \mu-p.s.$

Enfin, on peut associer à la forme de Dirichlet $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ la loi Q faiblement markovienne dont le semi-groupe de transition est $(T_t)_{t>0}$:
$\forall f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathcal{C}_b(\mathcal{D})$ et $\forall 0 \le t_1 \le \ldots \le t_k$

$$E^Q\left(f_1(X_{t_1})\, f_2(X_{t_2}) \ldots f_k(X_{t_k})\right) = \int_D f_1\, T_{t_2-t_1}\left(f_2\, T_{t_3-t_2}(\ldots f_{k-1}\, T_{t_k-t_{k-1}}(f_k))\ldots\right)\, d\mu$$

Essentiellement, la régularité de $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ correspond à la forte markoviannité de Q (plus exactement, elle est équivalente au fait que Q est la loi d'un processus de Hunt) et la propriété locale correspond à la continuité des trajectoires Q-presque sûrement (lorsque la forme est régulière). Ce lien est détaillé dans [Fuk80] chap 4.

2.2.3 La forme de Dirichlet $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$

On définit la forme $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ sur $L^2(D,\mu)$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) = H(D,\mu,a\mu) \\ \forall f,g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \quad \mathcal{E}^s(f,g) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D \sigma\nabla f.\sigma\nabla g\, d\mu \end{array}\right.$$

La norme $\|\ \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^s)}$ est équivalente à la norme $\|\ \|_{H(D,\mu,a\mu)}$, et $H(D,\mu,a\mu)$ est un espace de Hilbert pour cette norme, donc $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est une forme fermée par définition.

Pour montrer que $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est markovienne, il suffit de montrer que c'est la plus petite extension fermée d'une forme markovienne.

Considérons la forme $(\mathcal{E}^c, \mathcal{D}(\mathcal{E}^c))$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{D}(\mathcal{E}^c) & = & \mathcal{C}^\infty(D) \cap H(D,\mu,a\mu) \\ & = & \left\{f \in \mathcal{C}^\infty(D) \cap L^2(D,\mu) \quad / \quad \frac{1}{2}\int_D \nabla f.a\nabla f \; d\mu < +\infty\right\} \\ \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^c) & & \mathcal{E}^c(f,f) = \frac{1}{2}\int_D \nabla f.a\nabla f \; d\mu \end{array}\right.$$

Vérifions que $(\mathcal{E}^c, \mathcal{D}(\mathcal{E}^c))$ est markovienne :
Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \to [-\varepsilon; 1+\varepsilon]$ $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\varphi(t) = t$ sur $[0,1]$ et $0 \leq \varphi' \leq 1$.
Si $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^c)$:

$$\begin{array}{rcl} \int_D \nabla(\varphi \circ f).a\nabla(\varphi \circ f) \; d\mu & = & \int_D (\varphi' \circ f)^2 \nabla f.a\nabla f \; d\mu \\ & \leq & \int_D \nabla f.a\nabla f \; d\mu < +\infty \end{array}$$

donc $\varphi \circ f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^c)$ et $\mathcal{E}^c(\varphi \circ f, \varphi \circ f) \leq \mathcal{E}^c(f,f)$, ce qui assure que $(\mathcal{E}^c, \mathcal{D}(\mathcal{E}^c))$ est markovienne.

La forme $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est une extension de $(\mathcal{E}^c, \mathcal{D}(\mathcal{E}^c))$, et c'est la plus petite car $\mathcal{D}(\mathcal{E}^c)$ est dense dans $\mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$ pour la norme $\| \; \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^s)}$ (cf th 2.2.8). Par conséquent, $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est markovienne, c'est donc une forme de Dirichlet sur $L^2(D,\mu)$.

Remarque 2.2.15 : Lorsqu'on travaille sur $\mathbb{R}^d$ tout entier et pour $\sigma \equiv Id$, on peut essayer de caractériser les fonctions du domaine de $\mathcal{E}^s$ en terme de Gâteaux-dérivabilité locale, comme dans [AR89]. Voir aussi chap 3 pour un exposé plus élémentaire dans le cas $\mathbb{R}^d$.

Ici, la présence du bord empêche d'adopter cette approche.

On note $(T_t^s)_{t>0}$, $(R_\alpha^s)_{\alpha>0}$, et $(A^s, \mathcal{D}(A^s))$ respectivement le semi-groupe, la résolvante et le générateur associés.

Il est immédiat que $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ possède la propriété locale, par contre elle n'est pas régulière a priori. Pour étudier la loi Q^s associée à $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$, une première idée est d'approcher cette forme non régulière par des formes $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ régulières, et de montrer que les lois Q^n associées convergent vers Q^s. C'est ce que nous ferons aux sections 2.3, 2.4 et 2.5 Cela permet de montrer que Q^s est la loi d'une semi-martingale. Une autre idée est de se placer sur une compactification $\tilde{D}$ de D sur laquelle $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est régulière, comme nous le ferons à la section 2.6. Les deux approches sont complémentaires puisque de la décomposition en semi-martingale on déduit la forme du terme de réflexion au bord de $\tilde{D}$.

Avant d'aborder la section suivante, nous établissons une condition suffisante de régularité qui servira par la suite et un résultat de maximalité de $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ sous la condition de Hörmander.

2.2.4 A propos de la régularité de $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$

On sait déjà que $\mathcal{C}^\infty(D) \cap H(D,\mu,a\mu)$ est dense dans $H(D,\mu,a\mu)$.

Le fait que $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ soit une forme de Dirichlet assure que (cf [Fuk80] th 1.4.2)

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (-n) \vee (u \wedge n) \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$$
$$\text{et } (-n) \vee (u \wedge n) \xrightarrow[n \to +\infty]{\| \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E})}} u$$

donc $L^\infty(D) \cap H(D, \mu, a\mu)$ est dense dans $H(D, \mu, a\mu)$.

Et de plus, on peut vérifier dans la démonstration du théorème 2.2.8 que si $u \in H(D, \mu, a\mu)$ est bornée, la fonction $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(D)$ qui l'approche l'est aussi. Par conséquent, $L^\infty(D) \cap \mathcal{C}^\infty(D) \cap H(D, \mu, a\mu)$ est dense dans $H(D, \mu, a\mu)$.

On peut en déduire que dans le cas où la frontière de D ne joue aucun rôle, soit parce qu'elle est vide (cas où $D = \mathbb{R}^d$), soit parce que a et p décroissent très vite à son approche, $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est régulière.

Construisons d'abord la "distance régularisée à D^c " (cf [Ste70] p171).

Proposition 2.2.16 *Il existe une fonction $\delta : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ayant les propriétés suivantes :*

- *δ est $\mathcal{C}^\infty$ sur D*
- *$\nabla\delta$ est bornée sur D*
- $\exists\ C_1, C_2 > 0 \quad / \quad \forall x \in D \quad C_1\ d(x, D^c) \leq \delta(x) \leq C_2\ d(x, D^c)$

Voici deux cas simples où $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est régulière :

Proposition 2.2.17

i. Si $D = \mathbb{R}^d$ alors $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace dense de $H(\mathbb{R}^d, \mu, a\mu)$.

ii. De même, si $D \neq \mathbb{R}^d$ et s'il existe une fonction $\alpha :]0; \sup_D \delta[\longrightarrow]0; +\infty[$ continue telle que $\displaystyle\int_x^{\sup_D \delta} \frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}}\, dy \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$ et $\forall x \in D \quad (\nabla\delta.a\nabla\delta\ p)(x) \leq \alpha(\delta(x))$ alors $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ est un sous-espace dense de $H(D, \mu, a\mu)$.

Preuve: Démontrons ce résultat dans le cas où $D \neq \mathbb{R}^d$:

Il suffit de montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ est dense dans $L^\infty(D) \cap \mathcal{C}^\infty(D) \cap H(D, \mu, a\mu)$ pour la norme $\| \|_{H(D,\mu,a\mu)}$. Soit Φ un élément de $L^\infty(D) \cap \mathcal{C}^\infty(D) \cap H(D, \mu, a\mu)$ et soit $\varepsilon > 0$.

Posons $\beta(x) = \displaystyle\int_x^{\sup_D \delta} \frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}}\, dy$ et $\ell_n = \beta^{-1}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les conditions mises sur α, ℓ_n décroît vers 0 quand $n \to +\infty$.

On choisit une fonction $\xi \quad \mathcal{C}^\infty$ décroissante sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{I}_{x \leq 0} \leq \xi \leq \mathbb{I}_{x \leq 1}$. Et on pose pour $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$\xi_{m,n}(x) = \xi(\|x\| - m)\ \xi(\beta(\delta(x)) - n)$$

et

$$K_{m,n} = \{\ x \in D\ /\ \|x\| \leq m \ \text{ et } \ \delta(x) \geq \ell_n\ \}$$

La fonction $\xi_{m,n}$ est $\mathcal{C}^1$ à support compact dans D, égale à 1 sur $K_{m,n}$ et nulle sur $D - K_{m+1,n+1}$. Elle a pour dérivée :

$$\begin{aligned}(\nabla\xi_{m,n})(x) &= (\nabla\|x\|)\ \xi'(\|x\|-m)\ \xi(\beta(\delta(x))-n)\\ &\quad + \xi(\|x\|-m)\ (\nabla\delta)(x)\left(\frac{-1}{\sqrt{\alpha(\delta(x))}}\right)\xi'(\beta(\delta(x))-n)\end{aligned}$$

Les fonctions $\xi_{m,n}\Phi$ sont des fonction $\mathcal{C}^1_c(D)$. Vérifions qu'elles convergent vers Φ en norme $\|\ \|_{H(D,\mu,a\mu)}$:

$$\begin{aligned}&\|\Phi - \xi_{m,n}\Phi\|^2_{H(D,\mu,a\mu)}\\ &\leq \int_D (1-\xi_{m,n})^2\ \Phi^2\ p\ dx + 2\int_D (1-\xi_{m,n})^2\ \|\sigma\nabla\Phi\|^2\ p\ dx\\ &\quad + 2\int_D \Phi^2\ \|\sigma\nabla\xi_{n,m}\|^2\ p\ dx\\ &\quad \text{(en utilisant } (a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|\Phi - \xi_{m,n}\Phi\|^2_{H(D,\mu,a\mu)}\\ &\leq \int_{D-K_{m,n}} \Phi^2\ p\ dx + 2\int_{D-K_{m,n}} \nabla\Phi.a\nabla\Phi\ p\ dx\\ &\quad + 4\|a\|_\infty\|\xi'\|^2_\infty \int_{m\leq\|x\|\leq m+1} \Phi^2\ p\ dx\\ &\quad + 4\ \|\Phi\|^2_\infty\|\xi'\|^2_\infty \int_{\substack{\|x\|\leq m+1\\ \ell_{n+1}\leq\delta(x)\leq\ell_n}} (\nabla\delta.a\nabla\delta)(x)\ \frac{1}{\alpha(\delta(x))}\ p\ dx\\ &\leq \left(1+4\|a\|_\infty\|\xi'\|^2_\infty\right)\int_{D-K_{m,n}} \Phi^2\ p\ dx\\ &\quad + 2\int_{D-K_{m,n}} \nabla\Phi.a\nabla\Phi\ p\ dx\\ &\quad + 4\ \|\Phi\|^2_\infty\|\xi'\|^2_\infty \int_{\substack{\|x\|\leq m+1\\ \ell_{n+1}\leq\delta(x)\leq\ell_n}} dx\\ &\leq \left(2+4\|a\|_\infty\|\xi'\|^2_\infty\right)\int_{\|x\|\geq m} (\Phi^2 + \nabla\Phi.a\nabla\Phi)\ p\ dx\\ &\quad + \left(2+4\|a\|_\infty\|\xi'\|^2_\infty + 4\|\Phi\|^2_\infty\|\xi'\|^2_\infty\right)\int_{\substack{\|x\|\leq m+1\\ \delta(x)\leq\ell_n}} \left(\Phi^2\ p + (\nabla\Phi.a\nabla\Phi+1)\ p + 1\right)\ dx\end{aligned}$$

Comme $\Phi \in H(D,\mu,a\mu)$, on peut trouver $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\int_{\|x\|\geq m_0} (\Phi^2 + \nabla\Phi.a\nabla\Phi)\ p\ dx \leq \varepsilon$$

D'autre part, $\int_{\|x\|\le m_0+1}\Big(\Phi^2\ p+(\nabla\Phi.a\nabla\Phi+1)\ p+1\Big)\ dx<+\infty$ et $\ell_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc on peut trouver $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\int_{\substack{\|x\|\le m_0+1\\ \delta(x)\le \ell_{n_0}}}\Big(\Phi^2\ p+(\nabla\Phi.a\nabla\Phi+1)\ p+1\Big)\ dx\le\varepsilon$$

On a alors

$$\|\Phi-\xi_{m_0,n_0}\Phi\|^2_{H(D,\mu,a\mu)}\le C^{ste}\varepsilon$$

où C^{ste} ne dépend que de Φ, a et ξ.

Comme $\xi_{m_0,n_0}\Phi\in\mathcal{C}^1_c(D)$, ceci prouve que $\mathcal{C}^1_c(D)$ est dense dans $H(D,\mu,a\mu)$.

Comme, d'autre part, $\mathcal{C}^\infty_c(D)$ est dense dans $\mathcal{C}^1_c(D)$ pour la norme de $H^1(D)$, donc pour la norme de $H(D,\mu,a\mu)$ puisque σ et p sont bornées, la preuve de l'assertion *(ii)* est finie.

Dans le cas où $D=\mathbb{R}^d$, β n'est plus nécessaire, il suffit de poser $\xi_m(x)=\xi(\|x\|-m)$ et on montre de la même façon que $(\xi_m\Phi)_m$ est une suite de $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ qui converge dans $H(\mathbb{R}^d,\mu,a\mu)$ vers Φ.

∎

Remarque 2.2.18 : La démonstration précédente n'utilise pas le fait que μ est de masse totale finie. Dans le prolongement de la remarque 2.2.9, on peut donc noter qu'on a aussi démontré ici que $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H(\mathbb{R}^d,dx,a\,dx)$.

En général, $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ n'est pas régulière sur D. On peut étendre $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ à $\overline{D}$ en posant $\mu(\partial\overline{D})=0$, ce qui permet d'identifier $L^2(D,\mu)$ et $L^2(\overline{D},\mu)$ (cf section 2.6.1). Voici un cas où $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ ainsi définie sur $\overline{D}$ est régulière :

On dit que D a la propriété de segment s'il vérifie :

$$\forall x\in\partial D\quad \begin{array}{l}\exists U_x \text{ voisinage ouvert de } x\\ \exists y_x\in\mathbb{R}^d-\{0\}\end{array}\quad / \quad \begin{array}{l}\forall z\in\overline{D}\cap U_x\\ \forall t\in]0,1[\end{array}\quad z+ty_x\in D$$

Si D a la propriété de segment, alors la forme de Dirichlet associée au brownien réfléchi dans $\overline{D}$ (i. e. $\mathcal{E}^s$ avec $\sigma=Id$ et $p=1$) est régulière sur $\overline{D}$. En effet, le domaine de cette forme est $H^1(D)$ et la propriété de segment entraîne la densité dans $H^1(D)$ de l'ensemble des restrictions à D des fonctions $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ (cf [Ada75]). De même, si D a la propriété de segment, toute forme $\mathcal{E}^s$ associée à une matrice de diffusion a uniformément elliptique et une densité p uniformément minorée par un nombre strictement positif est régulière sur $\overline{D}$ (car $\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))=H^1(D)$).

Mais dans de nombreux cas, $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ n'est pas régulière sur $\overline{D}$. On peut alors chercher une fermeture $\tilde{D}$ de D, autre que la fermeture euclidienne $\overline{D}$, sur laquelle elle soit régulière. Voici un exemple, emprunté à Chen [Che93], où cette fermeture $\tilde{D}$ peut être décrite de façon explicite :

Exemple :

On se place en dimension 2 et on prend pour ouvert connexe D le disque unité privé d'un rayon :

$$D=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \ /\ \ x^2+y^2<1 \text{ et } (x>0 \text{ ou } y\ne 0)\Big\}$$

et pour σ et p les fonctions constantes valant Id et $\frac{1}{\pi}$ sur tout $\mathbb{R}^d$. La forme de Dirichlet $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ a alors pour domaine $H(D, dx, dx) = H^1(D)$. Elle n'est pas régulière sur $\overline{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;/\;\; x^2+y^2 \leq 1\right\}$ puisque la fonction $f(r,\theta) = r\theta$ (en coordonnées polaires) est un élément de $H^1(D)$ qui n'est pas limite dans $H^1(D)$ d'une suite de fonctions continues à support dans $\overline{D}$. Intuitivement, la compactification euclidienne est mauvaise car elle confond les "deux cotés" du rayon manquant. La forme $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ sera par contre régulière sur $\tilde{D} = D \cup \partial\tilde{D}$ où

$$\tilde{D} = \left\{(x,0^+) \;/\; -1 < x \leq 0\right\} \cup \left\{(x,0^-) \;/\; -1 < x \leq 0\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;/\;\; x^2+y^2 = 1\right\}$$

(voir Chen [Che93] et aussi [Che92] pour plus de détails et une généralisation à tous les domaines "pseudo Jordan").

Dans le cas où $\sigma = Id$ et $p = 1$ sur D borné, il existe toujours (au moins) une compactification $\tilde{D}$ de D sur laquelle $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est régulière (cf [Che93] section 3, et les références qui s'y trouvent). Cette propriété s'étend immédiatement au cas où σ est uniformément elliptique et p uniformément minorée par un nombre strictement positif, et même (cf prop 2.7.3) au cas où σ est uniformément elliptique et p vérifie (H S P).

Conjecture 2.2.19 *$H^1(D)$ est dense dans $H(D, \mu, a\mu)$ dès lors que (σ, p) vérifie (H S P).*

(Il est même vraisemblable que $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ soit la plus petite extension fermée de $(\mathcal{E}^s, H^1(D)))$

Si cette affirmation est vraie, toute compactification $\tilde{D}$ qui rend régulière la forme associée au brownien réfléchi (i.e. $\sigma = Id$ et $p = 1$) rendra également régulière $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ pour σ et p vérifiant (H S P) quelconques. Nous n'avons pas de contre-exemple à cette affirmation, mais nous ne savons pas la démontrer dans le cas général. (voir à la section 2.7 quelques cas simples où nous savons la démontrer).

2.2.5 Sous la condition de Hörmander

On se place ici dans le cas où σ et p sont $\mathcal{C}^\infty$ et vérifient la condition de Hörmander. On va alors pouvoir caractériser $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ en montrant qu'elle est maximale.

Rappelons d'abord la condition de Hörmander. On se base sur [Hör85] chap 22.2, p 353 à 357. Le théorème général est le suivant :

Si les L_i sont des champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur D vérifiant
$dimVect\{L_{j_0}, [L_{j_1}, L_{j_2}], [L_{j_1}, [L_{j_2}, L_{j_3}]], \ldots\} = d$ en tout point x de D (i.e. l'algèbre de Lie engendrée par les L_i est de dimension d en tout point) et si $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(D)$ alors $\sum_{i=1}^{d} L_i^2 f + L_0 f - \alpha f \in H^k_{loc}(D)$ implique $f \in H^k_{loc}(D)$.

On prend :

$$Lf = \frac{\nabla.(ap\nabla f)}{2p} = \frac{1}{2}\sum_{ijk} \sigma_{ki}\partial_i(\sigma_{kj}\partial_j f) + \sigma_{kj}\frac{\partial_i(\sigma_{ki}p)}{p}\partial_j f = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} L_k^2 f + L_0 f$$

où $\sigma_i = (\sigma_{ij})_j$, $L_k f = \sigma_{k}.\nabla f$ et $L_0 f = \dfrac{\nabla.(\sigma^* p)}{2p}\sigma\nabla f$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.2.20 *Si on suppose que $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(D)$, que $p \in \mathcal{C}^\infty(D)$ et que la condition de Hörmander est vérifiée dans D alors toute solution (au sens des distributions) de l'équation $(L-\alpha)f = 0$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(D)$.*

En intégrant par parties dans la relation :

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(D) \quad \mathcal{E}^s(f,f) = \frac{1}{2}\int_D \nabla f.a\nabla f\, d\mu = -(f, A^s f)_{L^2(D,\mu)}$$

on observe que le générateur $(A^s, \mathcal{D}(A^s))$ associé à $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ coïncide sur $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ avec l'opérateur L défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(D) \quad Lf = \frac{\nabla.(ap\nabla f)}{2p}$$

La proposition suivante assure que si σ et p sont $\mathcal{C}^\infty(D)$ et si la condition de Hörmander est vérifiée, $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est maximale au sens de [Fuk80] §2.3.

Proposition 2.2.21 *Si $(B, \mathcal{D}(B))$ est une extension auto-adjointe markovienne négative de $(L, \mathcal{C}_c^\infty(D))$ alors la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}^B, \mathcal{D}(\mathcal{E}^B))$ de générateur $(B, \mathcal{D}(B))$ vérifie*

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}^B) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \quad et \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^B) \quad \mathcal{E}^B(f,f) \geq \mathcal{E}^s(f,f)$$

Preuve: (analogue à celle du th 2.3 de [PW94])
On fixe $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^B)$ et on veut montrer que $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$
On note $(\mathcal{E}^L, \mathcal{D}(\mathcal{E}^L))$ la plus petite extension fermée (et donc markovienne) de la forme $\left(-(\cdot, L\cdot)_{L^2(D,\mu)}, \mathcal{C}_c^\infty(D)\right)$ (dont on vérifie aisément qu'elle est markovienne fermable).

Pour chaque $\alpha > 0$, on note $\mathcal{E}_\alpha^B(f,g) = \mathcal{E}^B(f,g) + \alpha(f,g,)_{L^2(D,\mu)}$. Le produit scalaire ainsi défini induit sur $\mathcal{D}(\mathcal{E}^B)$ une norme équivalente à $\| \; \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^B)}$.

On décompose l'espace de Hilbert $\left(\mathcal{D}(\mathcal{E}^B), \sqrt{\mathcal{E}_\alpha^B}\right)$ en

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}^B) = \mathcal{D}(\mathcal{E}^L) \oplus (\mathcal{N}_\alpha \cap \mathcal{D}(\mathcal{E}^B)) \text{ où } \mathcal{N}_\alpha = \{u \in \mathcal{D}(L^*) \quad / \quad (\alpha - L^*)u = 0\}$$

(on peut le faire d'après le lemme 2.3.2 de [Fuk80])
Par conséquent $f = f_o + u$ où $f_o \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^L)$ et $u \in (\mathcal{N}_\alpha \cap \mathcal{D}(\mathcal{E}^B))$ sont uniques.

- $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est une extension fermée de $\left(-(\cdot, L\cdot)_{L^2(D,\mu)}, \mathcal{C}_c^\infty(D)\right)$ donc de $(\mathcal{E}^L, \mathcal{D}(\mathcal{E}^L))$ donc $\mathcal{D}(\mathcal{E}^L) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$ et $f_o \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$.
- $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^B)$ donc $u \in L^2(D,\mu)$
  $u \in \mathcal{N}_\alpha$ donc u vérifie

$$\forall g \in \mathcal{C}_c^\infty(D) \quad \int_D u\left(\alpha g - \frac{\nabla.(ap\nabla g)}{2p}\right) d\mu = 0$$

et au sens des distributions : $\left(\frac{\nabla.(ap\nabla\ )}{2p} - \alpha\right) u = 0$. Puisqu'on a supposé ici σ et p $\mathcal{C}^\infty$ et la condition de Hörmander vérifiée, on peut en déduire que $u \in \mathcal{C}^\infty(D)$.

En suivant la même démarche que dans [PW94], on obtient que $\mathcal{E}^s(u,u) \leq \mathcal{E}^B(u,u) < +\infty$ d'où $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$.
Par conséquent $f = f_o + u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$ et $\mathcal{D}(\mathcal{E}^B) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$.

- La décomposition étant orthogonale, on peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^B_\alpha(f,f) &= \mathcal{E}^B_\alpha(f_o,f_o) + \mathcal{E}^B_\alpha(u,u) \\ &\leq \mathcal{E}^s_\alpha(f_o,f_o) + \mathcal{E}^s_\alpha(u,u) \end{aligned}$$

car $f_o \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^L) \Rightarrow \mathcal{E}^L(f_o,f_o) = \mathcal{E}^s(f_o,f_o) = \mathcal{E}^B(f_o,f_o)$ et $\mathcal{E}^s(u,u) \leq \mathcal{E}^B(u,u)$.
Il existe une décomposition orthogonale analogue pour $\left(\mathcal{D}(\mathcal{E}^s), \sqrt{\mathcal{E}^s_\alpha}\right)$:

$$f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \quad \Rightarrow \quad \exists! h_o \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^L) \quad \exists! h_1 \in (\mathcal{N}_\alpha \cap \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)) \quad / \quad f = h_o + h_1$$

$(\mathcal{N}_\alpha \cap \mathcal{D}(\mathcal{E}^B)) \subset (\mathcal{N}_\alpha \cap \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ donc par unicité : $h_o = f_o$ et $h_1 = u$ ce qui donne $\mathcal{E}^s_\alpha(f,f) = \mathcal{E}^s_\alpha(f_o,f_o) + \mathcal{E}^s_\alpha(u,u)$ et

$$\mathcal{E}^B(f,f) \geq \mathcal{E}^s(f,f)$$

∎

Corollaire 2.2.22 *Sous l'hypothèse de Hörmander, et si σ et p sont $\mathcal{C}^\infty(D)$, $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est l'unique forme de Dirichlet extension de $(\mathcal{E}^c, \mathcal{D}(\mathcal{E}^c))$.*

2.3 La construction des approximations

On veut ici approcher la forme non-régulière $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ par une suite $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))_n$ de formes de Dirichlet régulières. On montrera à la section suivante la convergence des lois associées Q^n vers la loi Q^s associée à $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$.

L'idée est d'approcher la probabilité réversible μ du processus réfléchi qu'on veut construire par une suite de probabilités $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On fait en sorte que les processus réversibles de matrice de diffusion σ et de marginales μ_n n'atteignent pas le bord de D en temps fini.

2.3.1 $(\mu_n)_n$, suite d'approximations de μ

On définit la fonction ρ_n par :

$$\forall x \in D \quad \rho_n(x) = \exp(-\exp(\frac{1}{n\delta(x)}))$$

et on la prolonge par 0 hors de D. ρ_n est $\mathcal{C}^\infty$ bornée avec toutes ses dérivées bornées sur $\mathbb{R}^d$ (i.e. $\rho_n \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d)$) et

$$\forall x \in D \quad \rho_n(x) \text{ tend en croissant vers } \frac{1}{e} \text{ quand } n \to +\infty$$

Cette croissance des ρ_n est très importante pour la suite. En particulier :

Si on pose $\gamma_n = \left[\int_D \rho_n p \, dx\right]^{-1}$, la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en décroissant vers $\gamma_\infty = e$ quand $n \to +\infty$.

On note μ_n la probabilité sur D définie par $d\mu_n(x) = \gamma_n \; \rho_n(x) \; p(x) \; dx$. La suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en variation vers μ.

2.3.2 La forme de Dirichlet approchée $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$

On définit $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ à partir de μ_n comme $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ à partir de μ :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{E}^n) = H(D, \mu_n, a\mu_n) = \left\{ f \in L^2(D, \mu_n) \quad / \quad \sigma\nabla f \in L^2(D, \mu_n) \right\} \\ \\ \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^n) \quad \mathcal{E}^n(f, g) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_D \sigma\nabla f . \sigma\nabla g \; d\mu_n \end{cases}$$

Les résultats des parties 2.2.1 et 2.2.3 prouvent que $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ est une forme de Dirichlet. Elle est locale par construction et régulière d'après la proposition 2.2.17. On note $(T_t^n)_{t>0}$, $(R_\alpha^n)_{\alpha>0}$ et $(A^n, \mathcal{D}(A^n))$ le semi-groupe, la résolvante et le générateur correspondants. Construisons la loi Q^n associée à $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$:

On compactifie D en lui adjoignant un point cimetière Δ. D'après [Fuk80] chap 4, il existe un processus de Hunt $\left(\Omega, (\mathcal{F}^Y)_{t\in[0,+\infty]}, (Y_t)_{t\in[0,+\infty]}, (P_x^n)_{x\in D\cup\{\Delta\}}\right)$ d'espace d'états $D \cup \{\Delta\}$ muni de sa tribu borélienne, réversible sous $P_{\mu_n} = \int_D P_x^n \, d\mu_n$, et vérifiant

$$\forall f \in L^2(D, \mu_n) \cap L^\infty(D) \quad E^{P_{\mu_n}}(f(Y_t)) = T_t^n f(x) \quad \mu_n - p.s.$$

On note ζ le temps d'explosion de la trajectoire : $\zeta(\omega) = \inf\{t \geq 0 \; / \; Y_t(\omega) = \Delta\}$. Le th 4.5.3(iv) de [Fuk80] assure que l'on peut choisir le processus Y pour qu'il vérifie :

$$\forall x \in D \quad P_x^n\left(t \to Y_t \text{ continue sur } [0, \zeta[\right) = 1$$

et

$$\forall x \in D \quad P_x^n\left(\lim_{t\nearrow\zeta} Y_t \in D \text{ et } \zeta < +\infty\right) = 0$$

donc Y est à valeurs dans $\mathcal{C}([0, +\infty[, D \cup \{\Delta\})$ a priori.

Puisque Y est un processus de Hunt : $\forall t > \zeta(\omega) \quad Y_t(\omega) = \Delta$ donc

$$\begin{aligned} P_{\mu_n}(\zeta < +\infty) &= P_{\mu_n}(\exists k \in \mathbb{N} \quad / \quad Y_k = \Delta) \\ &= \lim_{k\to+\infty} P_{\mu_n}(Y_k = \Delta) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \mu_n(\Delta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On note Q^n et $Q^{n,x}$ les probabilités images de P_{μ_n} et P^n_x par $Y_{|[0,+\infty[}$. $(Q^{n,x})_{x\in D\cup\{\Delta\}}$ est une famille fortement markovienne de probabilités sur $\mathcal{C}([0,+\infty[, D\cup\{\Delta\})$ muni de sa tribu borélienne et de la filtration (régularisée à droite et complétée) donnée par son processus canonique X. Elle vérifie :

$$Q^n = \int_D Q^{n,x}\ d\mu_n$$

$$E^{Q^n}\left(f_1(X_{t_1})\ f_2(X_{t_2})\dots f_k(X_{t_k})\right) = \int_D T^n_{t_1}\Big(f_1\ T^n_{t_2-t_1}\Big(f_2\ T^n_{t_3-t_2}(\dots f_{k-1}\ T^n_{t_k-t_{k-1}}(f_k))\dots\Big)\Big)\ d\mu_n$$

(donc Q^n est associée à la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$)
et

$$Q^n(\inf\{t\geq 0 \quad / \quad X_t\notin D\} < +\infty) = 0$$

2.3.3 Décomposition en semi-martingale sous Q^n

Puisque Q^n est associée à $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$, intuitivement elle doit avoir pour matrice de diffusion σ et pour drift $\dfrac{\nabla.(a\gamma_n\rho_n p)}{2\gamma_n\rho_n p}$. Fixons $T>0$ quelconque. On va résoudre sur $[0,T]$ l'équation

$$X_t = X_o + \int_o^t \sigma(X_s)dW_s + \int_o^t \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p)}{2\rho_n p}\right)(X_s)\ ds \qquad (En)$$

avec la loi initiale μ_n et vérifier qu'elle a une unique solution, qui est égale à $Q^n_{|[0,T]}$.

On cherche une solution faible, c'est-à-dire une loi sur $\left(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d), (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}\right)$ sous laquelle

$$X_. - X_o - \int_o^{.} \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p)}{2\rho_n p}\right)(X_s)\ ds$$

est une martingale L^2 de processus croissant $\int_o^{.} a(X_s)\ ds$ (en notant $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ la filtration, régularisée à droite et complétée, engendrée par le processus canonique X sur $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$.

A cause de la croissance rapide de $\dfrac{\nabla\rho_n}{\rho_n}(x)$ au bord de D, cette équation ne vérifie pas les hypothèses des théorèmes classiques. Pour montrer l'existence d'une loi solution, on utilisera un théorème " à la Girsanov " de [CL94] (voir aussi [CL95a]).

Réécrivons (En) sous la forme :

$$X_t = X_o + \int_o^t \sigma(X_s)dW_s + \int_o^t \left(\frac{\nabla.a}{2}\right)(X_s)\ ds + \int_o^t \left(a.\frac{\nabla(\rho_n p)}{2\rho_n p}\right)(X_s)\ ds$$

Avant de pouvoir utiliser l'analogue du théorème de Girsanov, il nous faut résoudre

$$X_t = X_o + \int_o^t \sigma(X_s)dW_s + \int_o^t \left(\frac{\nabla.a}{2}\right)(X_s)\ ds \quad (E)$$

Les fonctions σ et $\nabla.a$ sont bornées lipschitziennes sur $\mathbb{R}^d$ donc (E) a une unique solution trajectorielle pour chaque loi initiale ν vérifiant $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 d\nu(x) < +\infty$. On note P^x la loi de la solution correspondant à $\nu = \delta_x$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, et P^n la loi de la solution correspondant à $\nu = \mu_n$ (On suppose ici que tous les μ_n sont de variance finie, par exemple que p est de variance finie ou que D est borné).

La famille $(P^x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ est fortement markovienne et vérifie $P^n = \int_{\mathbb{R}^d} P^x \, d\mu_n(x)$. De plus, $(P^x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ est l'unique solution du problème de martingale associé à l'opérateur $\left(A = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}\partial_{ij} \; + \frac{1}{2} \sum_{ij} (\partial_j a_{ij}) \; \partial_i, \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \right)$.

Définissons $b_n : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ par $b_n = \dfrac{\nabla(\rho_n p)}{2\rho_n p} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\nabla \rho_n}{\rho_n} + \dfrac{\nabla p}{p}\right)$ où $\dfrac{\nabla p}{p}$ et $\dfrac{\nabla \rho_n}{\rho_n}$ sont prolongées par 0 hors de D.

Le théorème 4.29 de [CL94] assure alors que :

Théorème 2.3.1

i. Le processus $Z_t^n = \exp\left(\int_o^t b_n(X_s) dM_s - \frac{1}{2} \int_o^t (b_n.ab_n)(X_s) \; ds \right)$ *où* $M_s = X_s - X_o - \int_o^t \left(\frac{\nabla.a}{2}\right)(X_s) \; ds$ *est bien défini pour* $t \in [0,T]$ *et est une* $(\mathcal{F}_t)_t$*-martingale.*

ii. La probabilité $\mathcal{Q}^n$ *sur* $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ *définie par* $\dfrac{d\mathcal{Q}^n}{dP^n}|_{\mathcal{F}_t} = Z_t^n$ *a pour marginale* μ_n *à chaque instant* $t \in [0,T]$ *(i.e. la* $\mathcal{Q}^n$*-loi de* X_t *est égale à* μ_n*).*

iii. $\mathcal{Q}^n$ *est solution en loi de l'équation* (En) *avec la loi initiale* μ_n*.*

Preuve: Il faut montrer que la condition d'énergie finie

$$\int_{\mathbb{R}^d} (b_n.ab_n) \; d\mu_n(x) < +\infty$$

et l'équation de Fokker-Planck faible :
$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \quad \forall \; 0 \le s \le t \le T$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} f(x,t) \; d\mu_n(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x,s) \; d\mu_n(x) \\ &= \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_u f + Af + \nabla f.ab_n)(x,u) \; d\mu_n(x) du \end{aligned}$$

sont vérifiées.

Condition d'énergie finie :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\nabla p}{p}.a\frac{\nabla p}{p}\right)(x) \, \gamma_n \, \rho_n(x) \, p(x) \; dx \le \frac{\gamma_n}{e} \int_D \left(\frac{\nabla p}{p}.a\frac{\nabla p}{p}\right)(x) \, p(x) \; dx < +\infty$$

par hypothèse sur p et

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\nabla \rho_n}{\rho_n}.a\frac{\nabla \rho_n}{\rho_n}\right)(x) \; d\mu_n(x) = \gamma_n \int_D \nabla\delta.a\nabla\delta \; \left(\frac{e^{\frac{1}{n\delta}}}{n\delta^2}\right)^2 e^{-e^{\frac{1}{n\delta}}} p \; dx < +\infty$$

car a , p et $\nabla\delta$ sont bornées sur D et $x \longmapsto x^4 e^{\frac{2}{n}x} e^{-e^{\frac{x}{n}}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, $\int_{\mathbb{R}^d} (b_n.ab_n)\ d\mu_n(x)$ est finie.

Équation de Fokker-Planck faible : Fixons $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x,t)\ d\mu_n(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x,s)\ d\mu_n(x)\ ds = \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} \partial_u f(x,u)\ d\mu_n(x)$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} (Af + \nabla f.ab_n)(x,u)\ d\mu_n(x) \\
&= \frac{\gamma_n}{2} \int_D \left(\sum_{ij} a_{ij}(\partial_{ij} f)\rho_n p + (\partial_j a_{ij})(\partial_i f)\rho_n p + (\partial_i f) a_{ij} \partial_j(\rho_n p) \right)(x)\ dx \\
&= \frac{\gamma_n}{2} \int_D \left(\sum_{ij} (a_{ij}\rho_n p)(\partial_{ij} f) + (\partial_j (a_{ij}\rho_n p))(\partial_i f) \right)(x)\ dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

car $a_{ij}\rho_n p$ peut être prolongée en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$ (puisque ρ_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$ et nulle hors de D).

Donc l'équation de Fokker-Planck faible est vérifiée.

Enfin, puisque P^n est markovienne et Z^n multiplicative, $\mathcal{Q}^n$ est markovienne (cf [Sha88] th 24.36) et donc, au vu de [CL94] prop 4.6 , $\mathcal{Q}^n$ est solution en loi de (En).

■

Remarque 2.3.2 : La preuve précédente montre en fait le résultat suivant :
Pour toute fonction f de $\mathcal{C}_c^\infty(D)$

$$f(X_t) - f(X_o) - \int_o^t \frac{1}{2} (\nabla.a\nabla f)(X_s)\ ds - \int_o^t \left(\nabla f.a \frac{\nabla(\rho_n p)}{2\rho_n p} \right)(X_s)\ ds$$

est une $\mathcal{Q}^n$-martingale de carré intégrable.

Le résultat suivant prouve que Q^n est égale à $\mathcal{Q}^n$ sur $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ et donne donc une décomposition en semi-martingale de X sous Q^n.

Théorème 2.3.3 *Pour tout $t > 0$, Q^n vérifie :*

$$X_t = X_o + N_t^n + \int_o^t \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p)}{2\rho_n p} \right)(X_s)\ ds \quad \forall t \in [0,T] \quad Q^n - p.s.$$

où N^n est une Q^n-martingale L^2 de processus croissant $\int_o^\cdot a(X_s)\ ds$.

De plus $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ est l'unique extension markovienne fermée de $(\frac{1}{2}\int_D \nabla f.a\nabla f\ d\mu_n, \mathcal{C}_c^\infty(D))$

Preuve: Il suffit de montrer que $Q^n_{|_{[0,T]}} = \mathcal{Q}^n$.

De la relation $\frac{d}{dt}T^n_t|_{t=t_o} = A^n T^n_{t_o} = T^n_{t_o} A^n$ dans $L^2(D, \mu_n)$, on déduit :

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty_c(D) \quad \forall h \text{ bornée sur } D$$

$$\begin{aligned}
&E^{Q^n}\left(\left[f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t A^n f(X_u)\, du\right] h(X_s)\right) \\
&= E^{Q^n}\left(\left[T^n_{t-s} f(X_s) - f(X_s) - \int_o^{t-s} T^n_u A^n f(X_s)\, du\right] h(X_s)\right) \\
&= \int_D \left[T^n_{t-s} f - f - \int_o^{t-s} T^n_u A^n f\, du\right] h\, d\mu_n \\
&= \int_D \left[T^n_{t-s} f - f - \int_o^{t-s} \frac{d}{du} T^n_u f\, du\right] h\, d\mu_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t A^n f(X_u) du$ est une martingale sous Q^n.

En intégrant par parties, on voit que le générateur A^n de $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ est égal à $\frac{\nabla.(a\rho_n p \nabla\ \ )}{2\rho_n p}$ sur $\mathcal{C}^\infty_c(D)$, donc le processus :

$$f(X_t) - f(X_o) - \int_o^t \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p \nabla f)}{2\rho_n p}\right)(X_s)\, ds$$

est une martingale L^2 sous Q^n de processus croissant $\int_o^{\cdot} (\nabla f.a\nabla f)(X_s)\, ds$.

La remarque 2.3.2 assure que $\mathcal{Q}^n$ est solution du même problème de martingales.

Or si K est un compact à bord lisse de D, et si $\tau_K = \inf\{t \geq 0 \quad / \quad X_t \in K^c\}$, l'équation

$$X_{t\wedge\tau_K} - X_o - \int_o^t \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p)}{2\rho_n p}\right)(X_{s\wedge\tau_K})\, ds = \int_o^{t\wedge\tau_K} \sigma(X_s) dW_s \quad t \in [0,T]$$

a une unique solution trajectorielle car on peut prolonger $\frac{\nabla.(a\rho_n p)}{2\rho_n p} = \frac{1}{2}\left(\nabla.a + a\frac{\nabla\rho_n}{\rho_n} + a\frac{\nabla p}{p}\right)$ en une fonction $\mathcal{C}^\infty_b(\mathrm{IR}^d)$.

Par conséquent, le processus $(X_{t\wedge\tau_K})_{t\in[0,T]}$ a même loi sous $\mathcal{Q}^n$ et sous Q^n.

En particulier $\mathcal{Q}^n(\tau_K \leq t) = Q^n(\tau_K \leq t)$.

On sait (cf [Che93] lemme 2.4) qu'on peut trouver une suite croissante $(K_r)_r$ de compacts à bords lisses telle que $\cup_r \nearrow K_r = D$.

Pour chaque $t \in [0,T]$:

$$\mathcal{Q}^n(\sup_r \tau_K \le t) = Q^n(\sup_r \tau_K \le t)$$

et en faisant tendre t vers T :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^n(\inf\{t>0 \ / \ X_t \notin D\} \le T) &= \mathcal{Q}^n(\sup_r \tau_K \le T) \\
&= Q^n(\sup_r \tau_K \le T) \\
&= Q^n(\inf\{t>0 \ / \ X_t \notin D\} \le T) = 0 \\
&\quad \text{puisque } \zeta = +\infty \ \ Q^n - p.s.
\end{aligned}$$

Fixons $0 \le t_1 \le \ldots \le t_k \le T$ et $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}
& E^{\mathcal{Q}^n}\left(f_1(X_{t_1}) \ldots f_k(X_{t_k})\right) \\
&= \lim_{r \to +\infty} E^{\mathcal{Q}^n}\left(f_1(X_{t_1 \wedge \tau_{K_r}}) \ldots f_k(X_{t_k \wedge \tau_{K_r}})\right) \\
&\quad \text{car } \inf\{t>0 \ / \ X_t \notin D\} > T \ \ \mathcal{Q}^n - p.s. \\
&= \lim_{r \to +\infty} E^{Q^n}\left(f_1(X_{t_1 \wedge \tau_{K_r}}) \ldots f_k(X_{t_k \wedge \tau_{K_r}})\right) \\
&\quad \text{car } X_{. \wedge \tau_K} \text{ a même loi sous } \mathcal{Q}^n \text{ et sous } Q^n \\
&= E^{Q^n}\left(f_1(X_{t_1}) \ldots f_k(X_{t_k})\right) \\
&\quad \text{car } \inf\{t>0 \ / \ X_t \notin D\} > T \ \ Q^n - p.s.
\end{aligned}$$

Donc les probabilités $\mathcal{Q}^n$ et Q^n sont égales.

La même démonstration montre que la famille de probabilités associée à toute extension markovienne fermée de $(\frac{1}{2}\int_D \nabla f.a\nabla f \ d\mu_n, \mathcal{C}_c^\infty(D))$ est égale à $(Q^{n,x})_x$, donc que $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ est l'unique extension markovienne fermée de $(\frac{1}{2}\int_D \nabla f.a\nabla f \ d\mu_n, \mathcal{C}_c^\infty(D))$.

∎

La proposition précédente assure, entre autres, que le temps d'atteinte de ∂D sous $\mathcal{Q}^n$ est infini. On peut obtenir directement ce résultat par une méthode probabiliste. C'est ce qui est fait dans la démonstration suivante :

Proposition 2.3.4 *Le temps d'atteinte de D^c sous $\mathcal{Q}^n$ est p.s. infini, i.e. $\mathcal{Q}^n(\xi < +\infty)$ où $\xi = \inf\{t \in [0,T] \ / \ X_t \in D^c\}$.*

Preuve: (cf la preuve du th 5.1 de [PW94] (step 3))

Première étape Si a est bornée et uniformément elliptique sur D , si M est une martingale sous P^n de carré intégrable et de processus croissant $\int_o^{\cdot} a(X_s)\, ds$ alors pour P^n-presque tout X :

$$\exists\, \varepsilon_a(X) > 0 \ \ \exists\, C_a > 0 \ \ / \ \ 0 < t-s < \varepsilon_a(X) \Rightarrow \|M_t - M_s\|^2 \le C_a\,(t-s) \ln \frac{1}{t-s}$$

Justifions cette affirmation :

On procède coordonnée par coordonnée, en effectuant un changement de temps.

$(M_t^i)_t$ est une P^n-martingale à valeurs réelles, dont le processus croissant $\beta(t) = \int_o^t a_{ii}(X_s)\, ds$ est une fonction strictement croissante car

$$\forall x \in D \quad 0 < \lambda_a < a_{ii}(x) < \|a\|_\infty < +\infty$$

$\lim_{t \to +\infty} \beta(t) = +\infty$ et on peut définir

$$\beta^{-1}(t) = \inf\{s \geq 0 \quad / \quad \int_o^s a_{ii}(X_u) du > t\}$$

Le théorème de changement de temps assure que $\left(M^i_{\beta^{-1}(t)}\right)_t$ est un mouvement brownien sous P^n , donc :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0<t-s<\varepsilon} \frac{|M^i_{\beta^{-1}(t)} - M^i_{\beta^{-1}(s)}|^2}{(t-s)\ln \frac{1}{t-s}} = 1 \quad P^n - p.s.$$

ce qui se traduit par : $\exists \mathcal{N}_a^i \subset \mathcal{C}([0,1]) \;\; / \;\; P^n(\mathcal{N}_a^i) = 0$ et

$$\begin{array}{l} \forall X \notin \mathcal{N}_a^i \quad \exists \varepsilon^i(X) > 0 \quad / \\ 0 < t - s < \varepsilon^i(X) \Rightarrow |M^i_{\beta^{-1}(t)} - M^i_{\beta^{-1}(s)}|^2 \leq 2(t-s)\ln \frac{1}{t-s} \end{array}$$

Comme $x \longrightarrow x \ln \frac{1}{x}$ est croissante au voisinage de 0 et comme $\beta_t - \beta_s = \int_s^t a_{ii}(X_u) du \leq \|a\|_\infty (t-s)$, on en déduit pour $X \notin \mathcal{N}_a^i$:

$$\begin{array}{rcrcl} 0 < t - s < \frac{\varepsilon^i(X)}{\|a\|_\infty} & \Rightarrow & \multicolumn{3}{l}{0 < \beta(t) - \beta(s) < \varepsilon^i(X)} \\ & \Rightarrow & |M_t^i - M_s^i|^2 & \leq & 2(\beta(t)-\beta(s)) \ln \frac{1}{\beta(t)-\beta(s)} \\ & & & \leq & 2\|a\|_\infty (t-s) \ln \frac{1}{\|a\|_\infty (t-s)} \\ & & & \leq & C_a^i (t-s) \ln \frac{1}{t-s} \end{array}$$

Il suffit alors de poser $\varepsilon_a(X) = \min_i \frac{\varepsilon^i(X)}{\|a\|_\infty}$, $\mathcal{N}_a = \bigcup_i \mathcal{N}_a^i$ et $C_a = \sum_i C_a^i$ pour avoir hors du P^n-négligeable $\mathcal{N}_a$:

$$0 < t - s < \varepsilon_a(X) \Rightarrow \|M_t - M_s\|^2 \leq C_a (t-s) \ln \frac{1}{t-s}$$

Deuxième étape Le résultat précédent est toujours vrai si on enlève l'hypothèse d'uniforme ellipticité : Si a est bornée (uniformément elliptique ou non) sur D , et si M est une martingale sous P^n de processus croissant $\int_o^\cdot a(X_s)\, ds$ alors pour P^n-presque tout X :

$$\exists\, \varepsilon_a(X) \;\; \exists\, C_a > 0 \;\; / \;\; 0 < t-s < \varepsilon_a(X) \Rightarrow \|M_t - M_s\|^2 \leq C_a (t-s) \ln \frac{1}{t-s}$$

Preuve : On note I la matrice identité sur $\mathbb{R}^d$. Quitte à étendre l'espace, il existe un mouvement brownien d-dimensionnel W sous P^n. M est la somme des martingales $M - W$ et W qui ont pour processus croissants $\int_o^\cdot \left(a - 2(a)^{1/2} + I\right)(X_s)\, ds$ et $\int_o^\cdot I\, ds$. Comme $a - 2(a)^{1/2} + I$ et I sont uniformément elliptiques, le résultat de la première étape s'applique directement.

Troisième étape On applique le résultat de la deuxième étape à la P^n-martingale $\left(X_t - X_o - \int_o^t \left(\frac{\nabla.a)}{2}\right)(X_s)\ ds\right)_t$. Pour P^n-presque tout X :

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{0<t-s<\varepsilon} \frac{\|X_t - X_s\|}{\sqrt{(t-s)\ln\frac{1}{t-s}}} &\leq \sqrt{C_a} + \lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{0<t-s<\varepsilon} \frac{\|\int_s^t \left(\frac{\nabla.a}{2}\right)(X_s)\ ds\|}{\sqrt{(t-s)\ln\frac{1}{t-s}}} \\
&\leq \sqrt{C_a} + \lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{0<t-s<\varepsilon} \frac{\|\nabla.a\|_\infty (t-s)}{2\sqrt{(t-s)\ln\frac{1}{t-s}}} \\
&\leq \sqrt{C_a} + \frac{\|\nabla.a\|_\infty}{2} \lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}} \\
&\leq \sqrt{C_a} + 0
\end{aligned}$$

Donc P^n-p.s. sur $(0<\xi<+\infty)$:

$$\forall s \in]\xi - \varepsilon(X), \xi[\qquad \|X_\xi - X_s\|^2 \leq C_a(\xi - s)\ln\frac{1}{\xi - s}$$

X étant continu, X_ξ appartient p.s. au bord de D , d'où les inégalités :

$$\begin{aligned}
\rho_n(X_s) = e^{-e^{\frac{1}{n\delta}}}(X_s) &\leq C^{ste}\ \delta^2(X_s) \\
&\leq C^{ste}\ d(X_s, \partial D)^2 \\
&\leq C^{ste}\ \|X_\xi - X_s\|^2 \\
&\leq C^{ste}\ (\xi - s)\ln\tfrac{1}{\xi - s}
\end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{1}{\rho_n(X_s)} \geq \left(C^{ste}(\xi - s)\ln\frac{1}{\xi - s}\right)^{-1}$$

Puisque $\int_\varepsilon^1 \left(u\ln\frac{1}{u}\right)^{-1} du \nearrow +\infty$ quand $\varepsilon \searrow 0$, on obtient le résultat :

$$\int_0^t \frac{1}{\rho_n(X_s)}\ ds \nearrow +\infty \text{ quand } t \nearrow \xi \quad P^n - p.s. \text{ sur } (0<\xi<+\infty)$$

Dernière étape Il reste à en déduire que $\mathcal{Q}^n(\xi < +\infty)$. On note $\theta_k = \inf\{t \in [0,T] \quad / \quad \int_0^t \frac{1}{\rho_n(X_s)}\ ds \geq k\}$. D'après le résultat précédent :

$$P^n\left((\theta_k \leq \xi) \cap (0<\xi<+\infty)\right) = P^n\left(0<\xi<+\infty\right)$$

$$\text{donc } P^n\left((\sup_k \theta_k \leq \xi) \cap (0<\xi<+\infty)\right) = P^n\left(0<\xi<+\infty\right)$$

et puisque $\mathcal{Q}^n$ est absolument continue par rapport à P^n :

$$\mathcal{Q}^n(0<\xi<+\infty)=\mathcal{Q}^n\left((\sup_k \theta_k\leq\xi)\cap(0<\xi<+\infty)\right)\leq\mathcal{Q}^n(\sup_k\theta_k<+\infty)$$

$$\begin{aligned}\text{Or}\quad \forall k\in\mathbb{N}^*\quad k\ \mathcal{Q}^n(\theta_k\leq t) &= k\ \mathcal{Q}^n\left(\int_0^t\frac{1}{\rho_n(X_s)}\,ds\geq k\right)\\ &\leq E^{\mathcal{Q}^n}\left(\int_0^t\frac{1}{\rho_n(X_s)}\,ds\right)\\ &\leq \int_0^t\int_D\frac{1}{\rho_n(x)}\,d\mu_n(x)\,ds=t<+\infty\end{aligned}$$

donc $\mathcal{Q}^n(\sup_k\theta_k\leq t)=\lim_{k\to+\infty}\searrow\mathcal{Q}^n(\theta_k\leq t)=0$. On en déduit immédiatement que $\mathcal{Q}^n(\sup_k\theta_k<+\infty)=0$, $\mathcal{Q}^n(0<\xi<+\infty)=0$ et comme $\mathcal{Q}^n(\xi=0)=\mu_n(\partial D)=0$ on obtient :

$$\mathcal{Q}^n(\xi<+\infty)=0$$

∎

2.4 La convergence des approximations

Notre but est de montrer que la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge étroitement vers une probabilité Q^s sur $\mathcal{C}([0,T],\overline{D})$ associée à la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ sur $L^2(D,\mu)$.

On montre d'abord la tension de la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathcal{C}([0,T],\overline{D})$. On en déduit la convergence faible dans $L^2(D,\mu)$ d'une sous-suite de $(T_t^nf)_n$ pour chaque $f\in\mathcal{C}_b(D)$.

La croissance de la suite $(\rho_n)_n$, qui assure que les domaines $\mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$ sont emboîtés de façon décroissante, permet de montrer que "$\mathcal{E}^s(\ ,\ )=e\sup_n\frac{1}{\gamma_n}\mathcal{E}^n(\ ,\ )$".

De cette convergence des $(\mathcal{E}^n,\mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ et de la convergence faible de $(T_t^nf)_n$, on déduit la convergence forte dans $L^2(D,\mu)$ des résolvantes $(R_\alpha^nf)_n$ vers R_α^sf , puis la convergence forte dans $L^2(D,\mu)$ de $(T_t^nf)_n$ vers T_t^sf . Ceci assure que la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une unique valeur d'adhérence, donc qu'elle est convergente, et que sa limite est markovienne de semi-groupe T^s.

2.4.1 La tension de $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Proposition 2.4.1 *Pour chaque $T>0$, la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite tendue de probabilités sur $\mathcal{C}([0,T],\overline{D})$ et chacune de ses valeurs d'adhérences $Q^{v.a.}$ est réversible de mesure μ.*

Preuve: On pose

$$\begin{aligned}\overline{X}_t &= X_{T-t}\\ N_t^n &= X_t-X_o-\int_o^t\left(\frac{\nabla.(a\rho_np)}{2\rho_np}\right)(X_s)\,ds\\ \text{et } \overline{N_t^n} &= \overline{X}_t-\overline{X}_o-\int_o^t\left(\frac{\nabla.(a\rho_np)}{2\rho_np}\right)(\overline{X}_s)\,ds\end{aligned}$$

Un calcul rapide donne : $X_t = X_o + \frac{1}{2}\left(N_t^n + \overline{N}_{T-t}^n - \overline{N}_T^n\right)$

Pour montrer que $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est tendue, il suffit donc de montrer que la suite des lois de $\left(X_o, N^n, \overline{N}^n\right)$ sous Q^n est tendue .

- La suite des lois de X_o sous Q^n est $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est tendue car elle converge en variation vers μ .
- N^n est une Q^n-martingale de carré intégrable pour chaque n donc d'après le th 6.4.13 de [JS87] la suite des lois de N^n sous Q^n est tendue dès que celle des lois de $\sum_i \left\langle (N^n)^i \right\rangle = \sum_i \int_o^{\cdot} a_{ii}(X_s)\ ds$ sous (Q^n) l'est.

  On utilise le th 8.2 de [Bil69] :

  * $t \to \int_o^t \sum_i a_{ii}(X_s)\ ds$ est continue Q^n-p.s. car a est bornée.

  * $\sum_i \langle (N^n)^i \rangle_o = 0$

  * $\forall \eta, \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in]0,1[\quad \exists n_o \in \mathbb{N}^* \quad /$

  $$\forall n \leq n_o \quad Q^n\left(\sup_{|t-s|<\delta}\left|\int_s^t \sum_i a_{ii}(X_u)\ du\right| \geq \varepsilon\right) < \eta$$

  (il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{||a||_\infty}$)

  Donc la suite des lois de $\int_o^t \sum_i a_{ii}(X_s)\ ds$ sous Q^n est tendue et celle des lois de N^n aussi.
- Puisque Q^n est réversible , $\overline{N}^n$ est une Q^n-martingale pour la filtration rétrograde de processus croissant $\int_o^{\cdot} a\left(\overline{X}_s\right)\ ds$, donc le même raisonnement assure que la suite des lois de $\overline{N}^n$ sous Q^n est tendue.

Un produit d'ensembles relativement compacts étant relativement compact, la suite des lois de $\left(X_o, N^n, \overline{N}^n\right)$ sous (Q^n) est tendue, donc $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est.

Notons $Q^{v.a.}$ la limite d'une sous-suite $(Q^{n(k)})_k$ de $(Q^n)_n$.

$$\text{La projection } \pi_t : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ x & \longrightarrow & x_t \end{array} \text{ est continue}$$

$$\text{donc } Q^{v.a.} \circ \pi_t^{-1} = \lim_{k\to+\infty} Q^{n(k)} \circ \pi_t^{-1} = \lim_{k\to+\infty} \mu_{n(k)} = \mu$$

donc la loi de X_t sous $Q^{v.a.}$ est μ pour tout $t \in [0,T[$.

De même, la continuité des $\pi_{t_1,\cdots,t_j} : x \longrightarrow (x_{t_1},\cdots,x_{t_j})$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $t_1,\cdots,t_j \in [0,T]^j$, jointe à la réversibilité de Q^n, entraîne que $Q^{v.a.}$ est réversible.

∎

Corollaire 2.4.2 *Puisque la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est tendue sur $\mathcal{C}([0,T],\overline{D})$ pour tout $T > 0$, elle est relativement compacte sur $\mathcal{C}([0,T],\overline{D})$ pour tout $T > 0$, donc relativement compacte sur $\mathcal{C}([0,+\infty[,\overline{D})$.*

2.4.2 Convergence des $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ vers $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$

Pour chaque x de D, $(\rho_n(x))_n$ est une suite croissante, donc la suite des $L^2(D, \mu_n)$ est décroissante.

Si $m \leq n$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$:

$$\frac{1}{\gamma_m} \int_D \nabla f . a \nabla f \ d\mu_m \leq \frac{1}{\gamma_n} \int_D \nabla f . a \nabla f \ d\mu_n$$

donc

$$\forall \alpha \geq 0 \quad \frac{1}{\gamma_m} \mathcal{E}_\alpha^m(f,f) \leq \frac{1}{\gamma_n} \mathcal{E}_\alpha^n(f,f)$$

(Rappelons que $\mathcal{E}_\alpha^n(f,f) = \mathcal{E}^n(f,f) + \alpha \|f\|^2_{L^2(D,\mu_n)}$)

Si $m \leq n$ et $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$:

Comme $f \in L^2(D, \mu_n)$, $f \in L^2(D, \mu_m)$ et f est limite pour la norme $\sqrt{\mathcal{E}_1^n}$ d'une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(D)$.

D'après l'inégalité précédente, f est aussi limite pour la norme $\sqrt{\mathcal{E}_1^m}$ de la même suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, donc $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^m)$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \forall m \leq n \in \mathbb{N}^* \quad & \mathcal{D}(\mathcal{E}^n) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^m) \\ & \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^n) \quad \frac{1}{\gamma_m} \mathcal{E}^m(f,f) \leq \frac{1}{\gamma_n} \mathcal{E}^n(f,f) \end{aligned}$$

et ceci permet de montrer que :

Proposition 2.4.3 $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ *est la limite des* $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ *en le sens suivant :*

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) = \left\{ f \in L^2(D,\mu) \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \searrow \mathcal{D}(\mathcal{E}^n) \quad / \quad \sup_n \frac{1}{\gamma_n} \mathcal{E}^n(f,f) < +\infty \right\} \\ \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \quad \mathcal{E}^s(f,f) = e \sup_n \frac{1}{\gamma_n} \mathcal{E}^n(f,f) = e \lim_{n \to +\infty} \nearrow \frac{1}{\gamma_n} \mathcal{E}^n(f,f) \end{cases}$$

Preuve: La croissance p.s. des ρ_n vers $\frac{1}{e}$ et le théorème de Beppo-Levi permettent d'écrire que :

$$\frac{1}{e} \int_D |\sigma \nabla f|^2 \ d\mu = \int_D |\sigma \nabla f|^2 (\sup_n \rho_n) p \ dx = \sup_n \int_D |\sigma \nabla f|^2 \ d\mu_n$$

d'où le résultat énoncé.

∎

2.4.3 Convergence des Q^n vers Q^s

Le but de cette section, inspirée de [Che93], est de démontrer que la suite $(Q^n)_n$ approxime bien Q^s. Plus exactement :

Proposition 2.4.4 *La suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge étroitement vers la probabilité Q^s associée à $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$.*

Pour démontrer ce résultat, on va étudier toutes les valeurs d'adhérences de la suite relativement compacte $(Q^n)_n$ et constater qu'elles sont égales.

On choisit une de ces valeurs d'adhérences et on la note $Q^{v.a.}$. Pour simplifier les notations, on appelle encore $(Q^n)_n$ la sous-suite qui converge vers $Q^{v.a.}$ et $(T^n)_n$, $(R^n)_n$ les sous-suites de semi-groupes et de résolvantes correspondantes.

Établissons d'abord les lemmes suivants, dans lesquels f désigne une fonction bornée sur$D$ fixée.

Lemme 2.4.5 $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad T_t^n f \xrightarrow[n\to+\infty]{} T_t^{v.a.} f$ *faiblement dans* $L^2(D, \mu)$ *où* $T_t^{v.a.} f(x) = E^{Q^{v.a.}}(f(X_t)|X_o = x)$ *est définie μ-p.s. (car $Q^{v.a.}$ est μ-stationnaire, cf proposition 2.4.1)*

Preuve: Tout d'abord, si $f \in \mathcal{C}_b(D)$, la convergence en variations de μ_n vers μ et la convergence étroite de Q^n vers $Q^{v.a.}$ impliquent que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \forall g \in \mathcal{C}_b(D)$$
$$\left|\int_D g\ T_t^n f\ d\mu - \int_D g\ T_t^{v.a.} f\ d\mu\right|$$

$$\leq \left|\int_D g\ T_t^n f\ d(\mu - \mu_n) + E^{Q^n}(g(X_o)f(X_t)) - E^{Q^{v.a.}}(g(X_o)f(X_t))\right|$$

$$\leq \|g\|_\infty \|f\|_\infty \int_D d|\mu_n - \mu| + \left|E^{Q^n}(g(X_o)f(X_t)) - E^{Q^{v.a.}}(g(X_o)f(X_t))\right|$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'autre part, si f est bornée (continue ou non), on peut trouver une suite $(f_k)_k$ de fonctions $\mathcal{C}_b(D)$ uniformément bornées par $\|f\|_\infty$ telle que $(f_k)_k$ converge dans $L^2(D, \mu)$ vers f. Pour $t \in \mathbb{R}^+$ et $g \in \mathcal{C}_b(D)$:

$$\left|\int_D g\ T_t^n f\ d\mu - \int_D g\ T_t^{v.a.} f\ d\mu\right|$$

$$\leq \left|\int_D g\ T_t^n (f - f_k)\ d\mu\right| + \left|\int_D g\ T_t^{v.a.}(f - f_k)\ d\mu\right| + \left|\int_D g\ (T_t^n f_k - T_t^{v.a.} f_k)\ d\mu\right|$$

Le premier terme du membre de droite peut être majoré par

$$\|g\|_\infty\ (2\|f)\|_\infty \int_D d|\mu_n - \mu| + \|g\|_\infty \frac{\gamma_1}{e}\ \|f - f_k\|_{L^2(D,\mu)}$$

et le second par $\|g\|_\infty \ \|f-f_k\|_{L^2(D,\mu)}$ donc on peut trouver un k assez grand, puis un n assez grand dépendant de k, pour que $\left|\int_D g\ T_t^n f\ d\mu - \int_D g\ T_t^{v.a.} f\ d\mu\right|$ soit aussi petit qu'on veut.

Le résultat s'en déduit par densité de $\mathcal{C}_b(D)$ dans $L^2(D,\mu)$. ∎

Lemme 2.4.6 $\forall \alpha > 0$ *$R_\alpha^n f$ converge faiblement dans $L^2(D,\mu)$ et on appelle $R_\alpha^{v.a.} f$ sa limite.*

Preuve: On sait que

$$R_\alpha^n f = \int_o^{+\infty} e^{-\alpha t}\ T_t^n f\ dt \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$$

$$\|\alpha R_\alpha^n f\|_{L^2(D,\mu)} \leq \|f\|_{L^2(D,\mu)}$$

$$\text{et } \forall g \in L^2(D,\mu) \quad \mathcal{E}_\alpha^n\,(R_\alpha^n f, g) = (f,g,)_{L^2(D,\mu_n)}$$

Soit $g \in L^2(D,\mu)$

$$\begin{aligned} \int_D g\ R_\alpha^n f\ d\mu &= \int_D \int_o^{+\infty} g\ T_t^n f\ e^{-\alpha t}\ dt\ d\mu \\ &= \int_o^{+\infty} e^{-\alpha t} \int_D g\ T_t^n f\ d\mu\ dt \end{aligned}$$

et puisque $T_t^n f$ converge faiblement dans $L^2(D,\mu)$ vers $T_t^{v.a.} f$:

$$\forall g \in L^2(D,\mu) \quad \int_D g\ R_\alpha^n f\ d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_o^{+\infty} e^{-\alpha t} \int_D g\ T_t^{v.a.} f\ d\mu\ dt$$

De plus, comme $\left|\int_o^{+\infty} e^{-\alpha t} \int_D g\ T_t^{v.a.} f\ d\mu\ dt\right| \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2(D,\mu)}\|g\|_{L^2(D,\mu)}$ l'opérateur $g \longrightarrow \int_o^{+\infty} e^{-\alpha t} \int_D g\ T_t^{v.a.} f\ d\mu\ dt$ est linéaire continu sur $L^2(D,\mu)$ et grâce au théorème de représentation de Riesz, on a :

$$\exists! R_\alpha^{v.a.} f \in L^2(D,\mu) \ \ / \ \ \forall g \in L^2(D,\mu) \quad \int_D g\ R_\alpha^{v.a.} f\ d\mu = \int_o^{+\infty} e^{-\alpha t} \int_D g\ T_t^{v.a.} f\ d\mu\ dt$$

et $\|R_\alpha^{v.a.} f\|_{L^2(D,\mu)} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2(D,\mu)}$. On a alors :

$$R_\alpha^n f \xrightarrow[n\to+\infty]{} R_\alpha^{v.a.} f \text{ faiblement dans } L^2(D,\mu)$$

∎

Lemme 2.4.7 $\forall \alpha > 0 \quad R_\alpha^{v.a.} f = R_\alpha^s f$

Preuve: Montrons d'abord que $R_\alpha^{v.a.}f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$. Si $j \leq k \leq l \in \mathbb{N}^*$: $R_\alpha^k f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^k) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^j)$ et $R_\alpha^l f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^l) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^j)$ donc

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_\alpha^j \left(R_\alpha^l f - R_\alpha^k f, R_\alpha^l f - R_\alpha^k f\right) \\
&\quad \leq \frac{\gamma_j}{\gamma_k}\left(\mathcal{E}_\alpha^k\left(R_\alpha^l f, R_\alpha^l f\right) - 2\mathcal{E}_\alpha^k\left(R_\alpha^l f, R_\alpha^k f\right) + \mathcal{E}_\alpha^k\left(R_\alpha^k f, R_\alpha^k f\right)\right) \\
&\quad \leq \frac{\gamma_j}{\gamma_l}\Big(f, R_\alpha^l f,\Big)_{L^2(D,\mu_l)} - 2\frac{\gamma_j}{\gamma_k}\Big(f, R_\alpha^l f,\Big)_{L^2(D,\mu_k)} + \frac{\gamma_j}{\gamma_k}\Big(f, R_\alpha^k f,\Big)_{L^2(D,\mu_k)} \\
&\quad \leq \frac{\gamma_j}{e}\left(\Big(f, R_\alpha^l f,\Big)_{L^2(D,\mu)} - 2\Big(f, R_\alpha^l f,\Big)_{L^2(D,\mu)} + \Big(f, R_\alpha^k f,\Big)_{L^2(D,\mu)}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{\alpha}\frac{\gamma_j}{e}\|f\|_\infty^2 \|\mu - \mu_l\|_{var} + 3\frac{1}{\alpha}\frac{\gamma_j}{e}\|f\|_\infty^2\|\mu - \mu_k\|_{var} \\
&\quad \xrightarrow[k,l\to+\infty]{} 0 \text{ d'après le lemme 2.4.6}
\end{aligned}
$$

donc $\left(R_\alpha^k f\right)_k$ est une suite de Cauchy dans le Hilbert $\left(\mathcal{D}(\mathcal{E}^j), \sqrt{\mathcal{E}_\alpha^j}\right)$. Elle converge donc dans $\mathcal{D}(\mathcal{E}^j)$ vers sa limite faible $R_\alpha^{v.a.}f$.
On en déduit que

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad R_\alpha^{v.a.}f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^j)$$

et que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_\alpha^j\left(R_\alpha^{v.a.}f, R_\alpha^{v.a.}f\right) &= \lim_{k\to+\infty} \mathcal{E}_\alpha^j\left(R_\alpha^k f, R_\alpha^k f\right) \\
&\leq \liminf_{k\to+\infty} \frac{\gamma_j}{\gamma_k}\Big(f, R_\alpha^k f,\Big)_{L^2(D,\mu_k)} \\
&\leq \frac{\gamma_j}{e}\lim_{k\to+\infty}\Big(f, R_\alpha^k f,\Big)_{L^2(D,\mu)} \\
&\leq \frac{\gamma_1}{e}(f, R_\alpha^{v.a.}f,)_{L^2(D,\mu)} \\
&\leq \frac{\gamma_1}{e}\frac{1}{\alpha}\left\|f^2\right\|_{L^2(D,\mu)}
\end{aligned}
$$

D'où le résultat :

$$R_\alpha^{v.a.}f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \text{ et } \mathcal{E}_\alpha^s\left(R_\alpha^{v.a.}f, R_\alpha^{v.a.}f\right) \leq \frac{\gamma_1}{e}\frac{1}{\alpha}\left\|f^2\right\|_{L^2(D,\mu)}$$

Montrons maintenant que $R_\alpha^{v.a.}f = R_\alpha^s f$.

$$\mathcal{E}_\alpha^j\left(R_\alpha^j f - R_\alpha^{v.a.}f, R_\alpha^j f - R_\alpha^{v.a.}f\right)$$

$$= \mathcal{E}_\alpha^j\left(R_\alpha^j f, R_\alpha^j f\right) - 2\mathcal{E}_\alpha^j\left(R_\alpha^j f, R_\alpha^{v.a.}f\right) + \mathcal{E}_\alpha^j\left(R_\alpha^{v.a.}f, R_\alpha^{v.a.}f\right)$$

$$\leq \left(f, R_\alpha^j f,\right)_{L^2(D,\mu_j)} - 2(f, R_\alpha^{v.a.}f,)_{L^2(D,\mu_j)} + \liminf_{k\to+\infty} \frac{\gamma_j}{\gamma_k}\mathcal{E}_\alpha^k\left(R_\alpha^k f, R_\alpha^k f\right)$$

$$\leq \left(f, R_\alpha^j f,\right)_{L^2(D,\mu)} - 2(f, R_\alpha^{v.a.}f,)_{L^2(D,\mu)} + 3\|f\|_\infty^2\|\mu - \mu_j\|_{var}$$

$$+\frac{\gamma_j}{e}\liminf_{k\to+\infty}\left[\left(f, R_\alpha^k f,\right)_{L^2(D,\mu)} + \frac{1}{\alpha}\|f\|_\infty^2\|\mu-\mu_k\|_{var}\right]$$

$$\xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$$

d'où on déduit que si $g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\alpha^s\left(R_\alpha^{v.a.}f, g\right) &= \lim_{j\to+\infty}\frac{e}{\gamma_j}\mathcal{E}^j\left(R_\alpha^{v.a.}f, g\right) + \alpha(R_\alpha^{v.a.}f, g,)_{L^2(D,\mu_j)} \\
&\quad -\alpha\int_D (R_\alpha^{v.a.}f)\ g\ (\gamma_j\rho_j p - p)\ dx \\
&= \lim_{j\to+\infty}\mathcal{E}_\alpha^j\left(R_\alpha^{v.a.}f, g\right) \\
&= \lim_{j\to+\infty}\mathcal{E}_\alpha^j\left(R_\alpha^j f, g\right) \\
&= \lim_{j\to+\infty}(f, g,)_{L^2(D,\mu_j)} \\
&= (f, g,)_{L^2(D,\mu)} \\
&= \mathcal{E}_\alpha^s\left(R_\alpha^s f, g\right)
\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$R_\alpha^{v.a.}f = R_\alpha^s f$$

∎

Lemme 2.4.8 *Pour dt-presque tout t de $[0,T]$* $\quad T_t^n f \xrightarrow[n\to+\infty]{} T_t^s f$ *fortement dans* $L^2(D,\mu)$

Preuve: On appelle $\mathcal{L}$ une partie dénombrable dense de $L^2(D,\mu)$. D'après le lemme précédent, on a

$$\forall\alpha > 0 \quad \forall g \in \mathcal{L} \quad \int_o^{+\infty} e^{-\alpha t}\int_D g\ T_t^{v.a.}f\ d\mu\ dt = \int_o^{+\infty} e^{-\alpha t}\int_D g\ T_t^s f\ d\mu\ dt$$

donc pour chaque fonction g de $\mathcal{L}$ on peut trouver un borélien de mesure de Lebesgue $2T$ dans $[0,2T]$ tel que si t appartient à ce borélien $\int_D g\ T_t^{v.a.} f\ d\mu = \int_D g\ T_t^s f\ d\mu$. L'intersection $\mathcal{H}'_f$ de ces boréliens est encore de mesure de Lebesgue $2T$ dans $[0,2T]$ et vérifie :

$$\forall t \in \mathcal{H}'_f \quad \forall g \in \mathcal{L} \quad (g, T_t^{v.a.} f,)_{L^2(D,\mu)} = (g, T_t^s f,)_{L^2(D,\mu)}$$

donc $\forall t \in \mathcal{H}'_f \quad T_t^{v.a.} f = T_t^s f \quad \mu - p.s.$
On note $\mathcal{H}_f = \mathcal{H}'_f \cap \frac{1}{2}\mathcal{H}'_f$. Grâce au lemme 2.4.5, pour t dans $\mathcal{H}_f$ on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_D (T_t^n f)^2\ d\mu &= \lim_{n\to+\infty} \int_D f T_{2t}^n f\ d\mu \\
&= \int_D f T_{2t}^{v.a.} f\ d\mu \\
&= \int_D f T_{2t}^s f\ d\mu \\
&= \int_D (T_t^s f)^2\ d\mu
\end{aligned}$$

donc $T_t^n f$ converge fortement dans $L^2(D,\mu)$ vers $T_t^s f$ pour t dans $\mathcal{H}_f$. ∎

Remarque 2.4.9 : Quitte à remplacer $\mathcal{H}_f$, dans la preuve qui précède, par l'intersection des $\mathcal{H}_g$ pour g dans une partie dénombrable dense de $L^\infty(D,\mu)$, on peut considérer que $\mathcal{H}_f$ est indépendant de f.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 2.4.4.

Preuve: On note $\mathcal{H}$ le complémentaire d'un négligeable de $[0,T]$ qui vérifie :

$$\forall t \in \mathcal{H} \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(D) \quad T_t^n f \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(D,\mu)} T_t^s f$$

Fixons $0 \le t_1 \le \ldots \le t_k \le T$ et $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathcal{C}_b(\mathcal{D})$. On notera $s_i = t_{i+1} - t_i$.
Si tous les s_i appartiennent à $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
&E^{Q^{v.a.}}\left(f_1(X_{t_1})\ f_2(X_{t_2}) \ldots f_k(X_{t_k})\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} E^{Q^n}\left(f_1(X_{t_1})\ f_2(X_{t_2}) \ldots f_k(X_{t_k})\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_D f_1\ T_{s_1}^n \left(f_2\ T_{s_2}^n(\ldots f_{k-1}\ T_{s_{k-1}}^n(f_k))\ldots\right)\ d\mu \\
&= \int_D f_1\ T_{s_1}^s \left(f_2\ T_{s_2}^s(\ldots f_{k-1}\ T_{s_{k-1}}^s(f_k))\ldots\right)\ d\mu
\end{aligned}$$

à cause de la convergence forte L^2 des $T_{s_i}^n f_i$ vers les $T_{s_i}^s f_i$.

Si les s_i ne sont pas éléments de $\mathcal{H}$, ils sont limites d'une suite d'éléments de $\mathcal{H}$. Comme X est p.s. continu sous $Q^{v.a.}$, comme les f_i sont continues bornées sur D, et comme $(T_t^s)_t$ est fortement continu, le résultat précédent est encore vrai.

Donc $Q^{v.a.} = Q^s$, puisque Q^s est définie par

$$E^{Q^s}\left(f_1(X_{t_1})\ f_2(X_{t_2})\dots f_k(X_{t_k})\right) = \int_D f_1\ T^s_{s_1}\left(f_2\ T^s_{s_2}(\dots f_{k-1}\ T^s_{s_{k-1}}(f_k))\dots\right)\ d\mu$$

Puisque toutes les valeurs d'adhérence $Q^{v.a.}$ de la suite $(Q^n)_n$ sont égales à Q^s, $(Q^n)_n$ est convergente de limite Q^s.

∎

Remarque 2.4.10 : Il ne semble pas possible de démontrer de façon probabiliste la convergence de $(Q^n)_n$ vers Q^s. Dans [PW94], la démonstration de la convergence forte des semi-groupes associés aux $\mathcal{E}^n$ (pris en une fonction f et en un instant t) utilise le fait que les densités de transition des processus approximants convergent dans $L^2(D,\mu)$ vers celle du processus limite. Mais cette convergence des densités de transition découle de l'uniforme ellipticité de a sur tout compact de D. Une démarche semblable (ou l'utilisation de [LZ88]) nous était interdite puisque nous n'avons pas supposé l'uniforme ellipticité locale de a.

2.5 Décomposition en semi-martingale sous Q^s

On suppose désormais qu'en plus de l'hypothèse (H S P), l'hypothèse suivante est vérifiée :

$$\text{(H P W)} \qquad \textit{et} \qquad \begin{array}{ll} (i) & a\dfrac{\nabla p}{p} \ \textit{est continue sur}\ \overline{D} \\ (ii) & \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \liminf_n \displaystyle\int_{D\cap B(0,m)} |\nabla \rho_n|\ d\mu < +\infty \end{array}$$

où $B(0,m)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon m.

Remarque 2.5.1 : La condition (H P W)(ii) est à peine plus faible que la condition (62) qui apparaît dans l'énoncé du th 6.1 de [PW94]. Dans la preuve de 6.1, la condition (62) n'est d'ailleurs utilisée que sous sa forme (H P W)(ii). Une condition suffisante pour que (H P W)(ii) soit vérifiée est que la frontière de D soit de contenu de Minkowski $(d-1)$-dimensionnel supérieur dans D fini, i.e.

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{dx\left(\{x \in D \ \ / \ \ d(x, \partial D \cap B(0,m) \leq \varepsilon\}\right)}{\varepsilon} < +\infty$$

(cf [PW94] remarque 6.2)

Notre but est de montrer que sous ces hypothèses, Q^s est la loi d'une semi-martingale. Pour cela, nous allons suivre, en la modifiant quelque peu, la démarche de [PW94]. Nous travaillons sur la réalisation canonique des processus, ce qui allège certains points.

On se place sur l'espace $\Omega^{\mathbb{N}} = \left(\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d)\right)^{\mathbb{N}}$ dont on note $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des fonctions coordonnées. $\Omega^{\mathbb{N}}$ est muni de la filtration $\left(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}_t\right)_{t\in[0,1]}$ définie par $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}_t =$

$\sigma(X^n_u, n \in \mathbb{N}, 0 \leq u \leq t)$ et de la filtration rétrograde $\mathcal{G}^{\mathbb{N}}_t = \sigma(X^n_u, n \in \mathbb{N}, t \leq u \leq T)$ (régularisées à droite et complétées). On met sur $\Omega^{\mathbb{N}}$ la probabilité $Q = \bigotimes_{n=0}^{+\infty} Q^n$, de façon à ce que les $X^n(\omega) = \omega_n$ soient indépendantes et de loi Q^n sous Q.

Comme dans la démonstration de la proposition 2.4.1, on définit la martingale

$$N^n_t = X^n_t - X^n_o - \int_o^t \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p)}{2\rho_n p} \right) (X^n_s)\, ds$$

de processus croissant $\int_o^\cdot a(X^n_s)\, ds$ et la martingale

$$\overline{N}^n_t = X^n_{T-t} - X^n_T - \int_o^t \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p)}{2\rho_n p} \right) (X^n_{T-s})\, ds$$

de processus croissant $\int_o^\cdot a(X^n_{T-s})\, ds$. On sait alors que la suite $\left(X^n, X^n_o, N^n, \overline{N}^n\right)_n$ est tendue. Quitte à se restreindre à une sous-suite, qu'on note encore $\left(X^n, X^n_o, N^n, \overline{N}^n\right)_n$, on peut considérer qu'elle converge en loi vers une limite $\left(X^l, X^l_o, N^l, \overline{N}^l\right)$. On sait alors que X^l a pour loi Q^s sous Q. On note $\left(\mathcal{F}^l_t\right)_{t\in[0,T]}$ la filtration définie par $\mathcal{F}^l_t = \sigma(X^l_u, 0 \leq u \leq t)$ et $\left(\mathcal{G}^l_t\right)_{t\in[0,T]}$ la filtration rétrograde correspondante.

Montrons d'abord le résultat suivant :

Lemme 2.5.2 *Sous Q, N^l est une $\left(\mathcal{F}^l_t\right)_t$-martingale L^2 continue de processus croissant $\int_o^\cdot a(X^l_s)\, ds$. De même, $\overline{N}^l$ est une $\left(\mathcal{G}^l_t\right)_t$-martingale L^2 continue de processus croissant $\int_o^\cdot a(X^l_{1-s})\, ds$.*

Preuve: $({N^n}_{t\wedge T})_{t\in[0,+\infty]}$ est une suite de martingales locales continues sur $[0,+\infty]$ pour la filtration $\left(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}_{t\wedge T}\right)_{t\in[0,+\infty]}$, de processus croissant $\langle {N^n}_{\cdot\wedge T}\rangle = \int_o^{\cdot\wedge T} a(X^n_s)\, ds$.

Les $\langle {N^n}_{\cdot\wedge T}\rangle$ sont continus sur $[0,+\infty]$, nuls en 0 et uniformément bornés, donc d'après le théorème 12 de [MZ84] (voir aussi [LZ88]) :

$N^l_{\cdot\wedge T}$ est une martingale locale continue par rapport à sa filtration naturelle $\left(\sigma(N^l_{u\wedge T}, 0 \leq u \leq t)\right)_{t\in[0,+\infty]}$. Son processus croissant est $\left\langle N^l_{\cdot\wedge T}\right\rangle = \int_o^{\cdot\wedge T} a(X^l_s)\, ds$.

Le fait que $\left\langle N^l_{\cdot\wedge T}\right\rangle$ soit borné assure que la martingale locale N^l est en fait une martingale L^2 sur $[0,T]$. Pour terminer, il suffit donc de montrer que N^l est $\left(\mathcal{F}^l_t\right)_{t\in[0,T]}$-adaptée.

On note $(D_k)_k$ une suite croissante d'ouverts relativement compacts de D telle que $\forall k \quad \overline{D_k} \subset D_{k+1}$ et $\cup_k D_k = D$.

On décompose N^l_t en :

$$N^l_t = \int_o^t \mathbb{1}_{D_k}(X^l_s)\, dN^l_s + \int_o^t \mathbb{1}_{D_k^c}(X^l_s)\, dN^l_s$$

et on vérifie que

$$\begin{aligned}
&E^Q\left(\left|\int_o^t \mathbb{I}_{D_k^c}(X_s^l)\, dN_s^l\right|^2\right) \\
&\quad\leq\ E^Q\left(\int_o^t \mathbb{I}_{D_k^c}(X_s^l)\, Tr(a(X_s^l)\, ds\right) \\
&\quad\leq\ \int_o^t \int_{D_k^c} Tr(a(x))\, d\mu(x)\, ds \text{ car } X^l \text{ a pour loi } Q^s \text{ sous } Q. \\
&\quad\leq\ t\ d\ \|a\|_\infty\ \mu(D_k^c) \\
&\qquad \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

donc il existe une sous-suite $(D_k^t)_k$ de $(D_k)_k$, dépendant de t, telle que

$$\int_o^t \mathbb{I}_{(D_k^t)^c}(X_s^l)\, dN_s^l \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad Q-p.s.$$

ce qui assure que

$$N_t^l = \lim_{k\to+\infty} \int_o^t \mathbb{I}_{D_k^t}(X_s^l)\, dN_s^l \quad Q-p.s.$$

Il suffit donc de montrer que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $\int_o^{\cdot} \mathbb{I}_{D_k}(X_s^l)\, dN_s^l$ est $\left(\mathcal{F}_t^l\right)_{t\in[0,T]}$-adapté. Fixons k et choisissons $u \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$ telle que $u(x) = x$ sur $\overline{D_k}$. On note Du la dérivée de u.

On utilise d'abord la formule d'Itô pour obtenir :

$$\begin{aligned}
u(X_t^n) &= u(X_o^n) + \int_o^t Du(X_s^n)\, d{N^n}_s \\
&\quad + \int_o^t Du\ \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^n)\, ds + \int_o^t Du\ \frac{a\nabla\rho_n}{2\rho_n}(X_s^n)\, ds
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

et on cherche la limite en loi de chacun des termes de cette expression.

D'après le théorème 2.2 de [KP91], la convergence en loi de (X^n, N^n) vers $\left(X^l, N^l\right)$ implique celle de $\left(X^n, N^n, \int_o^t Du(X_s^n)\, d{N^n}_s\right)$ vers

$$\left(X^l, N^l, \int_o^t Du(X_s^l)\, dN_s^l\right)$$

et donc

$$\left(u(X_t^n), u(X_o^n), \int_o^t Du(X_s^n)\, d{N^n}_s\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \left(u(X_t^l), u(X_o^l), \int_o^t Du(X_s^l)\, dN_s^l\right)$$

D'autre part, comme $Du\dfrac{\nabla.(ap)}{2p}$ est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$, la fonction

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longrightarrow \int_o^t Du\ \frac{\nabla.(ap)}{2p}(x_s)\, ds
\end{aligned}$$

est continue et par conséquent

$$\int_o^t Du\ \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^n)\, ds \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \int_o^t Du\ \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^l)\, ds$$

Enfin, la majoration

$$\begin{aligned}\left|\int_o^t Du\,\frac{a\nabla\rho_n}{2\rho_n}(X^n_s)\,ds\right| &= \left|\int_o^t \left(Du\,\frac{a\nabla\delta}{2n\delta^2}\exp(\frac{1}{n\delta})\right)(X^n_s)\,ds\right| \\ &\leq \frac{t\|Du\|_\infty\|a\|_\infty\|\nabla\delta\|_\infty}{2n\left(\inf_\Delta\delta\right)^2}\exp(\frac{1}{\inf_\Delta\delta})\end{aligned}$$

où Δ est le support de u, permet d'affirmer que le terme $\int_o^t Du\,\frac{a\nabla\rho_n}{2\rho_n}(X^n_s)\,ds$ converge Q-p.s. vers 0, et donc converge en loi vers 0.

On peut donc passer à la limite dans (2.5.1), et on obtient

$$u(X^l_t) = u(X^l_o) + \int_o^t Du(X^l_s)\,dN^l_s + \int_o^t Du\,\frac{\nabla.(ap)}{2p}(X^l_s)\,ds$$

D'où on conclut que le processus $\int_o^\cdot Du(X^l_s)\,dN^n{}_s$ est $\left(\mathcal{F}^l_t\right)_{t\in[0,T]}$-adapté.

Comme

$$\int_o^t 1\!\!1_{D_k}(X^l_s)\,dN^l_s = \int_o^t 1\!\!1_{D_k}(X^l_s)\,Du(X^l_s)\,dN^n{}_s$$

le processus $\int_o^\cdot 1\!\!1_{D_k}(X^l_s)\,dN^l_s$ est également $\left(\mathcal{F}^l_t\right)_{t\in[0,T]}$-adapté, ce qui termine la preuve pour N^l.

Le résultat énoncé pour $\overline{N}^l$ s'obtient par le même raisonnement, en remplaçant partout $\mathcal{F}_t$ par $\mathcal{G}_t$ et X^l_t par X^l_{T-t}.

∎

On montre ensuite que X^l est une semi-martingale sous Q.

Lemme 2.5.3 *Il existe un processus à variation bornée V^l, $\left(\mathcal{F}^l_t\right)_t$-adapté et continu, tel que :*

$$X^l_t = X^l_o + N^l_t + \int_o^t \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X^l_s)\,ds + V^l_t \quad \forall t\in[0,T] \quad Q-p.s. \tag{2.5.2}$$

Preuve: Pour $m\in\mathbb{N}^*$, on se donne $u\in\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $u(x)=x$ sur $B(0,m)$ et supp $u\subset B(0,m+1)$. On procède de façon analogue à la démonstration du lemme 2.5.2, en étudiant la convergence en loi de chacun des termes de l'expression :

$$\begin{aligned}u(X^n_t) &= u(X^n_o) + \int_o^t Du(X^n_s)\,dN^n{}_s \\ &\quad + \int_o^t Du\,\frac{\nabla.(ap)}{2p}(X^n_s)\,ds + \int_o^t Du\,\frac{a\nabla\rho_n}{2\rho_n}(X^n_s)\,ds \end{aligned}\tag{2.5.3}$$

On peut à nouveau utiliser le théorème 2.2 de [KP91] qui assure que :

$$\left(u(X^n_t), u(X^n_o), \int_o^t Du(X^n_s)\,dN^n{}_s\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \left(u(X^l_t), u(X^l_o), \int_o^t Du(X^l_s)\,dN^l_s\right)$$

Comme a, $\nabla.a$ et $a\dfrac{\nabla p}{p}$ sont supposées continues bornées sur $\overline{D}$, la fonction

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{C}([0,1],\overline{D}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \int_o^t Du\ \frac{\nabla.(ap)}{2p}(x_s)\ ds \end{array}$$

est continue, donc

$$\int_o^t Du\ \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^n)\ ds \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \int_o^t Du\ \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^l)\ ds$$

Il reste à montrer que le dernier terme de (2.5.3) converge en loi vers un processus à variation bornée. Or ce terme vérifie :

$$\begin{aligned} \forall t\geq 0 \qquad & \sup_{n\in I} E^Q\left(\int_o^t \left|Du\ \frac{a\nabla\rho_n}{2\rho_n}\right|(X_s^n)\ ds\right) \\ &= \sup_{n\in I}\frac{t}{2}\ \gamma_n\ \int_{D\cap B(0,m+1)} |Du\ a\nabla\rho_n|\,(x)\ p(x)\ dx \\ &\leq \frac{t}{2}\ \|Du\|_\infty\|a\|_\infty\gamma_1\sup_{n\in I}\int_{D\cap B(0,m+1)}|\nabla\rho_n|\,(x)\ p(x)\ dx \end{aligned}$$

L'hypothèse (H P W)(ii) implique qu'il existe une partie infinie I de $\mathbb{N}^*$ telle que $\sup_{n\in I}\int_{D\cap B(0,m+1)}|\nabla\rho_n|\,(x)\ p(x)\ dx<+\infty$. Il existe donc une sous-suite de la suite $\left(\int_o^t Du\ \frac{a\nabla\rho_n}{2\rho_n}(X_s^n)\ ds\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est uniformément bornée en espérance et qui, d'après [MZ84] corollaire 9, converge en loi vers un processus à variation bornée $V^{l,m}$ qui vérifie

$$E^Q\left(\int_o^t\left|dV^{l,m}\right|\right)\leq\frac{t}{2}\ \|Du\|_\infty\|a\|_\infty\gamma_1\sup_{n\in I}\int_{D\cap B(0,m+1)}|\nabla\rho_n|\,(x)\,p(x)\ dx<+\infty$$

Pour Q-presque tout ω, on a donc : $\forall t\in[0,T]$

$$u(X_t^l)=u(X_o^l)+\int_o^t Du(X_s^l)\ dN_s^l+\int_o^t Du\ \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^l)\ ds+V_t^{l,m}$$

Comme $u(x)=x$ sur $B(0,m)$, en notant $\tau_m=\inf\{t\geq 0\quad/\quad|X_t^l|\geq m\}$, on obtient :

$$u(X_{t\wedge\tau_m}^l)=u(X_o^l)+\int_o^{t\wedge\tau_m} dN_s^l+\int_o^{t\wedge\tau_m}\frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^l)\ ds+V_{t\wedge\tau_m}^{l,m}$$

Ceci étant vrai pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, on peut faire tendre m vers $+\infty$. τ_m tend alors vers $+\infty$ et on a :

$$X_t^l=X_o^l+N_t^l+\int_o^t\frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^l)\ ds+V_t^l\quad\forall t\in[0,T]\quad Q-p.s.\ (2.5.4)$$

où V^l est définie en utilisant la consistance de la suite $\left(V_{\cdot\wedge\tau_m}^{l,m}\right)_m$: $\forall m\in\mathbb{N}^*\quad V_{\cdot\wedge\tau_m}^l=V_{\cdot\wedge\tau_m}^{l,m}\quad Q-p.s.$.

Le processus V^l est à variation bornée par construction, et continu $\left(\mathcal{F}_t^l\right)_t$-adapté d'après (2.5.4)

∎

Remarque 2.5.4 : Si D est un ouvert borné, on peut trouver une constante C_{sup} indépendante de m telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{2}\,\|Du\|_\infty \|a\|_\infty \gamma_1 \sup_{n\in I} \int_{D\cap B(0,m+1)} |\nabla \rho_n|(x)\ p(x)\ dx \leq C_{sup} < +\infty$$

Le processus limite $V^{l,m}$ vérifie alors :

$$\begin{aligned} E^Q\left(\int_o^t |dV_s^l|\right) &= \sum_m E^Q\left(\int_o^t |dV_s^{l,m}|\ \mathbb{I}_{\tau_{m-1}<t\leq\tau_m}\right) \\ &\leq t\ C_{sup} \sum_m Q\left(\tau_{m-1} < t \leq \tau_m\right) \leq t\ C_{sup} < +\infty \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.5.3, X^l est une semi-martingale sous Q. Notre but étant de montrer que le processus canonique X sur $\Omega = \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ est une semi-martingale sous Q^s, il nous faut "transporter" les résultats précédents par l'application :

$$\begin{aligned} X^l : \left(\Omega^{\mathbb{N}^*}, \left(\mathcal{F}_t^{\mathbb{N}}\right)_t\right) &\longrightarrow (\Omega, (\mathcal{F}_t)_t) \\ \omega &\longrightarrow X^l(\omega) \end{aligned}$$

On sait que $Q^s = Q \circ (X^l)^{-1}$.

Comme N^l et V^l sont $\left(\mathcal{F}_t^l\right)_t$-adaptés sur $\Omega^{\mathbb{N}^*}$, il existe des processus N et V sur Ω tels que pour tout $t \in [0,T]$:

$$N_t(X^l) = N_t^l \quad \text{et} \quad V_t(X^l) = V_t^l \quad Q - p.s.$$

De plus, puisque les trajectoires $t \longrightarrow N_t(X^l)$ sont Q-p.s. continues, les trajectoires $t \longrightarrow N_t$ le sont Q^s-p.s. Le processus N, et de même le processus V, sont donc des processus continus.

V est à variation bornée $Q^s - p.s.$ puisque V^l l'est $Q - p.s.$.

Enfin, si on fixe $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_k \leq s \leq t \leq 1$ et $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} E^{Q^s}\left(N_t\ f_1(X_{s_1})\ f_2(X_{s_2})\ldots f_k(X_{s_k})\right) &= E^Q\left(N_t(X_t^l)\ f_1(X_{s_1}^l)\ f_2(X_{s_2}^l)\ldots f_k(X_{s_k}^l)\right) \\ &= E^Q\left(E^Q\left(N_t^l|\mathcal{F}_s^l\right)\ f_1(X_{s_1}^l)\ f_2(X_{s_2}^l)\ldots f_k(X_{s_k}^l)\right) \\ &= E^Q\left(N_s(X^l)\ f_1(X_{s_1}^l)\ f_2(X_{s_2}^l)\ldots f_k(X_{s_k}^l)\right) \\ &= E^{Q^s}\left(N_s\ f_1(X_{s_1})\ f_2(X_{s_2})\ldots f_k(X_{s_k})\right) \end{aligned}$$

donc N est une martingale locale sous Q^s.

Comme, de même, $N^2 - \int_o^\cdot a(X_s)\ ds$ est une martingale locale sous Q^s, N est en fait une martingale L^2 de processus croissant $\int_o^\cdot a(X_s)\ ds$.

L'égalité (2.5.2) se traduit alors immédiatement par

$$X_t = X_o + N_t + \int_o^t \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s)\ ds + V_t \quad \forall t \in [0,T] \quad Q^s - p.s.$$

ce qui prouve que X est une semi-martingale sous Q^s.

Remarque 2.5.5 : Si D est un ouvert borné, d'après la remarque 2.5.4 on a :

$$E^{Q^s}\left(\int_o^1 |dV_s|\right) = E^Q\left(\int_o^1 |dV_s^l|\right) < +\infty$$

X est alors une Q^s-quasi-martingale au sens de [CFW93] prop 1.1. En prenant $\sigma = Id$ et $p = 1$ (qui vérifient (H P W)(i)), on voit que le brownien réfléchi dans $\overline{D}$ est une quasi-martingale. Le th 1.1 de [CFW93] permet d'en déduire que D est un ensemble de Caccioppoli fort, i. e.

$$\exists C > 0 \quad / \quad \forall g \in H^1(D) \cap \mathcal{C}_b(D) \quad \forall i \in \{1, \cdots, d\} \quad \int_D \frac{\partial g}{\partial x_i}\ dx \leq C \|g\|_\infty$$

Donc tout ouvert borné qui vérifie (HPW)(ii) est un ensemble de Caccioppoli fort.

2.6 Étude du terme de réflexion

On cherche ici à identifier la façon dont la diffusion réfléchie réversible de loi Q^s se réfléchit au bord de l'ouvert D. Dans le cas où le bord de D est lisse (au moins $\mathcal{C}^2$) et non caractéristique, cette réflexion est conormale, c'est-à-dire que la mesure de Revuz associée au terme de réflexion est $a\vec{n}\ p\ d\alpha$, où $\vec{n}$ est la normale intérieure au bord de D et α la mesure de surface sur le bord de D. Dans le cas où le bord de D n'est plus lisse, mais vérifie les hypothèses sous lesquelles Chen a construit le brownien réfléchi dans D (cf [Che93]), on veut montrer que ceci est toujours vrai, à condition de définir $\vec{n}\ d\alpha$ comme la mesure de Revuz du brownien réfléchi dans D.

Rappelons d'abord la façon dont Chen construit la normale et la mesure sur le bord de D à partir du brownien réfléchi.

2.6.1 Rappel des résultats de Chen

On fait sur D les hypothèses suivantes :

(H C) *D est borné et il existe une suite croissante $(D_k)_k$ d'ouverts relativement compacts à bords $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall k \quad \overline{D_k} \subset D_{k+1}$, $\cup_k D_k = D$ et $\sup_k \alpha_k(\partial D_k) < +\infty$ où α_k est la mesure de surface sur le bord ∂D_k de D_k.*

Remarque 2.6.1 : Une condition suffisante pour qu'une telle suite $(D_k)_k$ existe est que l'hypothèse de contenu de Minkowski énoncée à la section 2.5 (remarque 2.5.1) soit vérifiée (cf [Che93] lemme 2.5). Une condition nécessaire est que D soit un ensemble de Caccioppoli fort (cf [CFW93] th 5.1).

On définit sur D la forme de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{H}) = H^1(D) \\ \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{H}) \quad \mathcal{H}(f,f) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D |\nabla f|^2 \, dx \end{cases}$$

qui est locale mais non régulière sur D.

D'après [Che93] section 3, il existe une compactification $\tilde{D}$ de D sur laquelle $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$ est régulière. Plus exactement, $\tilde{D}$ est un compact dont D est un ouvert dense, la topologie de $\tilde{D}$ induit sur D la topologie euclidienne, et on étend la mesure de Lebesgue à $\tilde{D}$ en posant :

$$\text{Pour tout } A \text{ borélien de } \tilde{D} \quad dx(A) := dx(A \cap D)$$

On peut ainsi identifier $L^2(\tilde{D}, dx)$ et $L^2(D, dx)$. $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$, construite sur $L^2(D, dx)$, est alors définie sur $L^2(\tilde{D}, dx)$, on dit qu'on a défini $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$ sur $\tilde{D}$. La compactification $\tilde{D}$ est choisie pour que $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$ soit régulière sur $\tilde{D}$.

De plus on peut choisir $\tilde{D}$ pour que pour chaque $i \in \{1, \cdots, d\}$, la fonction de D dans $\mathbb{R}$ $x \to x_i$ se prolonge à $\tilde{D}$ de façon continue. On note π^i ce prolongement. La fonction $\pi := (\pi^1, \cdots, \pi^d)$ envoie $\tilde{D}$ sur $\overline{D}$ et $\partial\tilde{D}$ sur $\partial\overline{D}$ (excepté un ensemble de $\partial\tilde{D}$ de $\mathcal{H}$-capacité nulle).

On note $\left(\Omega, (\mathcal{F}_t^W)_t, \tilde{W}, (P_x)_{x \in \tilde{D}}\right)$ la diffusion réfléchie réversible associée à $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$ (voir dans [Fuk80] la correspondance entre diffusion réfléchie réversible et forme de Dirichlet régulière locale).

Sous les hypothèses (HC), la suite des mesures vectorielles $(\vec{n}_k \; d\alpha_k)_k$, oú $\vec{n}_k$ est la normale intérieure au bord de D_k, converge faiblement vers une mesure $\vec{n} d\alpha$, où α est une mesure scalaire positive portée par le bord de $\tilde{D}$ et $\vec{n}$ un vecteur unitaire défini α-p.p. sur $\partial\tilde{D}$.

Le brownien réfléchi $W = \pi \circ \tilde{W}$ dans $\overline{D}$ admet alors la décomposition suivante (cf [Che93] th 4.4) :

$$W_t = W_o + B_t + \int_o^t \vec{n}(\tilde{W}_s) dL_s \quad \forall t \geq 0 \quad P_x - p.s.$$

pour tout x de $\tilde{D}$ (hors d'un ensemble de $\partial\tilde{D}$ de $\mathcal{H}$-capacité nulle) où B est une martingale fonctionnelle additive (en abrégé MAF) brownienne de $\tilde{W}$ et L la fonctionnelle additive continue positive (en abrégé PCAF) de $\tilde{W}$ associée à la mesure régulière $\frac{1}{2}\alpha$ (cf [Fuk80] chap 5).

Enfin, la "normale intérieure $\vec{n}$ définie par le brownien réfléchi" vérifie la formule de Green (cf [Che93] th 4.5) :
$\forall f, g \in H^1(D) \cap L^\infty(D) \quad / \quad \nabla g \in H^1(D) \cap L^\infty(D)$

$$\int_D f(x) \Delta g(x) \; dx + \int_D \nabla f(x) . \nabla g(x) \; dx = - \int_{\partial\tilde{D}} f(x) \; \nabla g(x) . \vec{n}(x) \; d\alpha(x)$$

Remarque 2.6.2 : Il n'y a pas nécessairement unicité de la compactification $\tilde{D}$ qui rend $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$ régulière. Mais ce qui suit est valable pour toute compactification $\tilde{D}$ ayant les propriétés énoncées précédemment.

2.6.2 La famille fortement markovienne associée à $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$

On veut décomposer la diffusion réfléchie associée à $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ en utilisant $\vec{n}$. Il faut pour cela que $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ soit régulière sur $\tilde{D}$. On fait donc ici, outre les hypothèses (H S P) et (H P W), l'hypothèse (H C) qui assure l'existence de $\vec{n}$ et l'hypothèse suivante sous laquelle $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est régulière sur $\tilde{D}$:

(H R) $\quad$ *$H^1(D)$ est dense dans $H(D,\mu,a\mu)$*
(cf la section 2.7 pour une étude détaillée de cette hypothèse)
Puisque la forme $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est régulière, locale, et a la propriété supplémentaire :
$\forall u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \quad / \quad u, v$ à supports compacts

$$v \text{ constant sur un voisinage de } \operatorname{supp}(u) \Longrightarrow \mathcal{E}^s(u,v) = 0$$

on sait qu'il existe une famille $(Q^{s,x})_{x\in\tilde{D}}$ fortement markovienne et μ-réversible sur $\Big(\mathcal{C}([0,T],\tilde{D}), (\tilde{\mathcal{F}}_t)_t\Big)$, où $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}$ est la filtration (régularisée à droite et complétée) donnée par le processus canonique $\tilde{X}$ sur $\mathcal{C}([0,T],\tilde{D})$, telle que :

$$\forall f \in L^2(D,\mu) \text{ bornée} \qquad E^{Q^{s,x}}\Big(f(\tilde{X}_t)\Big) = T_t^s f(x) \quad \mu - p.s.$$

Q^s est alors par construction l'image de $Q^{s,\mu} = \int_{\tilde{D}} Q^{s,x}\, d\mu(x)$ par π.

Proposition 2.6.3 *Pour $\mathcal{E}^s$-quasi tout x de $\tilde{D}$*

$$Q^{s,x}\left(\int_o^{+\infty} \mathbb{1}_{\partial\tilde{D}}(\tilde{X}_s)\, ds > 0\right) = 0$$

Preuve: (cf preuve du lemme 3.1 de [Che93])

Posons $\theta(x) = E^{Q^{s,x}}\left(\int_o^{+\infty} \mathbb{1}_{\partial\tilde{D}}(\tilde{X}_s)\, ds\right)$.

$$\int_{\tilde{D}} \theta(x)\, d\mu(x) = E^{Q^{s,\mu}}\left(\int_o^{+\infty} \mathbb{1}_{\partial\tilde{D}}(\tilde{X}_s)\, ds\right) = \int_o^{+\infty}\int_{\tilde{D}} \mathbb{1}_{\partial\tilde{D}}(x)\, d\mu(x)\, ds = 0$$

donc $\theta = 0 \quad \mu - p.s.$ sur $\tilde{D}$.

θ est une fonction 0-excessive (i. e. $T_t\theta \le \theta$ et $T_t\theta(x) \to \theta(x)$ quand $t \to 0$ pour tout $x \in \tilde{D}$), donc d'après [BG68] prop II 4.2 elle est finement continue sur $\tilde{D}$. On en déduit (cf [Fuk80] lemme 4.2.4) que θ est nulle $\mathcal{E}^s$-quasi partout sur $\tilde{D}$. Ceci implique le résultat annoncé, puisque une fonction positive d'espérance nulle est nulle *p.p.*. ∎

2.6.3 La décomposition en fonctionnelles additives

Fixons $i \in \{1, \cdots, d\}$.

La fonction π^i est continue sur $\tilde{D}$ et vérifie $\pi^i(x) = x_i$ et $\nabla\pi^i(x) = (\partial_j\pi^i = \delta_{ij})_{1\le j\le d}$ sur D. On a supposé ici D borné, donc π^i est bornée et $\pi^i \in H(D,\mu,a\mu)$.

On peut alors utiliser [Fuk80], sections 5.1 et 5.2, pour décomposer la fonctionnelle additive

$$A_t^i = \pi^i(\tilde{X}_t) - \pi^i(\tilde{X}_o)$$

D'après [Fuk80] th 5.2.2 , A^i se décompose de façon unique en

$$A^i = M^i + U^i$$

où M^i est une martingale fonctionnelle additive (cf [Fuk80] chap 5.2 II) et U^i une fonctionnelle additive continue d'énergie nulle (cf [Fuk80] chap 5.2 III).

La fonction $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,+\infty[,\tilde{D}) & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,+\infty[,\overline{D}) \\ (t \to \tilde{X}_t) & \longrightarrow & (t \to \pi(\tilde{X}_t)) \end{array}$, qu'on note encore π, est continue sur $\mathcal{C}([0,+\infty[,\tilde{D})$ et injective sur l'ensemble

$$\left\{ \tilde{X} \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\tilde{D}) \quad / \quad \int_o^{+\infty} \mathbb{1}_{\partial\tilde{D}}(\tilde{X}_s)\, ds = 0 \right\}$$

qui est de probabilité 1 sous $Q^{s,\mu}$. Il est donc licite de définir $\tilde{M}$ et $\tilde{U}$ $\quad Q^s$-p.s. sur $\mathcal{C}([0,+\infty[,\overline{D})$ par :

$$\tilde{M}_t(\pi(\tilde{X})) = M_t(\tilde{X}) \quad \text{ et } \quad \tilde{U}_t(\pi(\tilde{X})) = U_t(\tilde{X})$$

Par un raisonnement identique à celui qui permet de passer de (N^l, V^l) à (N, V) (cf fin de la section 2.5), on vérifie que $\tilde{M}$ est une Q^s-martingale et que la variation quadratique de $\tilde{U}$ sous Q^s est égale à celle de U sous $Q^{s,\mu}$, qui est nulle puisque U est d'énergie nulle (d'après [Fuk80] (5.2.10)).

Comme

$$\left(\pi(\tilde{X})\right)_t - \left(\pi(\tilde{X})\right)_o = \tilde{M}_t(\pi(\tilde{X})) + \tilde{U}_t(\pi(\tilde{X})) \quad \forall t \in [0,+\infty[\quad Q^{s,\mu} - p.s.$$

on a la décomposition :

$$X_t - X_o = \tilde{M}_t(X) + \tilde{U}_t(X) \quad \forall t \in [0,+\infty[\quad Q^s - p.s.$$

ce qui, en identifiant avec la décomposition en semi-martingale obtenue à la section 2.5, donne :

$$\tilde{M}_t(X) + \tilde{U}_t(X) = N_t + \int_o^t \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s)\, ds + V_t \quad \forall t \in [0,T] \quad Q^s - p.s.$$

Le terme $\int_o^{\cdot} \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s)\, ds + V$ est à variation bornée, donc de variation quadratique nulle. La martingale

$$\tilde{M}(X) - N = \int_o^{\cdot} \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s)\, ds + V - \tilde{U}(X)$$

est de variation quadratique nulle, donc elle est nulle.

En utilisant la remarque 2.5.5, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall T > 0 \qquad E^{Q^{s,\mu}}\left(\int_o^T |dU_s|\right) &= E^{Q^s}\left(\int_o^T |d\tilde{U}_s|\right) \\ &= E^{Q^s}\left(\int_o^T \left|\frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s)\right|\, ds + \int_o^T |dV_s|\right) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

2.6.4 Les termes à variation bornée

Une fonctionnelle additive F qui est à variation bornée au sens usuel (i.e. $\int_o^T |dF_s| < +\infty \quad \forall T > 0 \quad Q^{s,\mu} - p.s.$) est à variation bornée au sens de [Fuk80] p 143 :
Il existe un borélien $\mathcal{N}$ de $\tilde{D} \cup \{\Delta\}$ de capacité nulle tel que

$$\forall x \in \tilde{D} \cup \{\Delta\} - \mathcal{N} \quad Q^{s,x}(s \to F_s \text{ à variation bornée sur } [0,T] \quad \forall T > 0) = 1$$

Justification :
On note $F_t^+ = \int_o^t |dF_s|$ la variation totale de F sur $[0,t]$ et on pose : $\theta(x) = Q^{s,x}\left(\exists t > 0 \ / \ F_t^+ = +\infty\right)$. La fonction θ vérifie

$$\int_{\tilde{D}} \theta(x)\, d\mu(x) = Q^{s,\mu}\left(\exists t > 0 \ / \ F_t^+ = +\infty\right) = 0$$

puisque F est à variation bornée au sens usuel. On en déduit que $\theta = 0 \quad \mu - p.s.$ sur $\tilde{D}$. Comme θ est une fonction 0-excessive, donc finement continue, elle est nulle $\mathcal{E}^s$-quasi partout sur $\tilde{D}$.

U^i est à variation bornée au sens usuel, donc à variation bornée au sens de [Fuk80]. Il existe donc une mesure régulière signée μ_{U^i} associée à U^i. Elle est somme des deux mesures régulières signées μ_{J^i} et μ_{K^i} associée aux fonctionnelles additives à variation bornée $J^i = \int_o^{\cdot} \sum_j \frac{\partial_j(a_{ij}p)}{2p}(\pi(\tilde{X}_s))\, ds$ et $K^i = U^i - J^i$.

La mesure μ_{J^i} est facile à identifier. Elle vérifie par définition :
$\forall t > 0 \quad \forall f, h$ boréliennes positives sur $\tilde{D}$

$$\int_{\tilde{D}} E^{Q^{s,x}}\left(\int_o^t f(\tilde{X}_s) \sum_j \frac{\partial_j(a_{ij}p)}{2p}(\pi(\tilde{X}_s))\, ds\right) h(x)\, d\mu(x) = \int_o^t \int_{\tilde{D}} T_s^s h\ f\ d\mu_{J^i}\ ds$$

En prenant $h \equiv 1$, et donc $T_s^s h \equiv 1$ puisque la diffusion de loi $Q^{s,\mu}$ est conservative, on obtient :
$\forall t > 0 \quad \forall f$ borélienne positive sur $\tilde{D}$

$$\begin{aligned} t \int_{\tilde{D}} f\ d\mu_{J^i} &= E^{Q^{s,\mu}}\left(\int_o^t f(\tilde{X}_s) \sum_j \frac{\partial_j(a_{ij}p)}{2p}(\pi(\tilde{X}_s))\, ds\right) \\ &= t \int_{\tilde{D}} f \sum_j \frac{\partial_j(a_{ij}p)}{2p}\, d\mu \end{aligned}$$

donc $d\mu_{J^i} = \sum_j \frac{\partial_j(a_{ij}p)}{2p}\, d\mu$.

Pour déterminer la mesure régulière $d\mu_{K^i} = d\mu_{U^i} - \sum_j \frac{\partial_j(a_{ij}p)}{2p}\, d\mu$ associée au terme de réflexion K^i, il suffit donc d'identifier μ_{U^i}.

2.6.5 Identification de la mesure de Revuz

On utilise pour cela le lemme 2.2 de [Che93]. Puisque $E^{Q^s}\left(\int_o^1 |dU_s^i|\right) < +\infty$, on sait que $|\mu_{U^i}|(\tilde{D}) < +\infty$ et donc

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \cap L^\infty(\tilde{D}) \quad \mathcal{E}^s(\pi^i, f) = -\int_{\tilde{D}} f \; d\mu_{U^i}$$

On en déduit que
$\forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \cap L^\infty(\tilde{D})$

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{D}} f \; d\mu_{K^i} &= -\mathcal{E}^s(\pi^i, f) - \int_D \sum_j \frac{\partial_j(a_{ij}p)}{2p} \; f \; d\mu \\
&= -\frac{1}{2}\int_D \sum_j a_{ij} \; p \; \partial_j f + \partial_j(a_{ij} \; p) \; f \; dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_D \sum_j \partial_j(a_{ij} \; p \; f) \; dx \\
&= -\frac{1}{2}\sum_j \int_D \nabla\pi^j.\nabla(a_{ij} \; p \; f) \; dx
\end{aligned}$$

et on utilise la formule de Green établie par Chen (cf [Che93] th 4.5) : La fonction π^j et sa dérivée sont $H^1(D)$ bornée. a_{ij} et p sont $H^1(D)$ bornée, donc si f l'est aussi le produit a_{ij} p f est $H^1(D)$ borné. On a alors :
$\forall f \in H^1(D) \cap L^\infty(\tilde{D})$

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{D}} f \; d\mu_{K^i} &= -\frac{1}{2}\sum_j \int_{\tilde{D}} a_{ij} \; p \; f \; \nabla\pi^j.(-\vec{n}) \; d\alpha \\
&= \frac{1}{2}\int_{\tilde{D}} \sum_j f \; p \; a_{ij} \; (\vec{n})_j \; d\alpha \\
&= \frac{1}{2}\int_{\tilde{D}} f \; (a\vec{n})_i \; p \; d\alpha
\end{aligned}$$

Ceci est vrai en particulier pour $f \in \mathcal{C}(\tilde{D}) \cap H^1(D)$, et donc par densité pour toute $f \in \mathcal{C}(\tilde{D})$, puisque $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$ est régulière. Par conséquent

$$d\mu_{K^i} = \frac{1}{2}(a\vec{n})_i p \; d\alpha$$

2.6.6 Conclusion

Le résultat précédent étant vrai pour chaque $i \in \{1, \cdots, d\}$, la diffusion réfléchie $\pi(\tilde{X})$ à valeurs dans $\overline{D}$ admet la décomposition suivante :

$$\pi(\tilde{X}_t) = \pi(\tilde{X}_o) + M_t(\tilde{X}) + \int_o^t \frac{\nabla.(ap)}{2p}(\pi(\tilde{X}_s)) \; ds + K_t(\tilde{X}) \quad \forall t \in [0,T] \quad Q^{s,x} - p.s.$$
$$\text{pour } \mathcal{E}^s\text{-quasi-tout } x \text{ de } \tilde{D}$$

où $M(\tilde{X})$ est une $Q^{s,\mu}$-martingale L^2 de processus croissant $\int_o^\cdot a(\pi(\tilde{X}_s)) \; ds$ et $K(\tilde{X})$ une fonctionnelle additive à variation bornée de mesure régulière associée $\frac{1}{2} \; a\vec{n} \; p \; d\alpha$.

Le fait que $\frac{1}{2}\, a\vec{n}\; p\; d\alpha$ soit portée par le bord de $\tilde{D}$ assure que $K.(\tilde{X})$ vérifie

$$K_t(\tilde{X}) = \int_o^t \mathbb{I}_{\tilde{X}_s \in \partial\tilde{D}}\, dK_s(\tilde{X}) \quad \forall t \in [0,T] \quad Q^{s,x} - p.s.$$

pour $\mathcal{E}^s$-quasi-tout x de $\tilde{D}$.

2.7 Des cas où $H^1(D)$ est dense dans $H(D,\mu,a\mu)$

La décomposition précédente a été obtenue sous l'hypothèse :
(H R) $\quad$ *$H^1(D)$ est dense dans $H(D,\mu,a\mu)$*
Avant tout, il y a lieu de faire quelques remarques sur cette hypothèse :

Remarque 2.7.1 : Il y a certains cas où il est immédiat que (H R) est vérifiée. Par exemple si $D = \mathbb{R}^d$ ou si ap décroît très vite au bord de D, (H R) est vraie (cf lemme 2.2.4). Il est immédiat aussi que (H R) est vraie si a est uniformément elliptique et p uniformément minorée par une constante strictement positive (et même, d'après la proposition 2.7.3, l'hypothèse "p uniformément minorée" est inutile ici).

Remarque 2.7.2 : Dans l'approximation par pénalisation et l'approximation par l'intérieur (pour le cas a localement uniformément elliptique) présentées dans [PW94], l'identification de la forme de Dirichlet (éventuellement non régulière) associée au processus limite est obtenue sous l'hypothèse (cf [PW94] th 3.9 (A4) et rem 4.6) :

$$\Big\{ f_{|_D} \;/\; f \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \nabla f \in L^\infty(\mathbb{R}^d), f \text{ à support compact } \Big\}$$
$$\text{est dense dans } \mathcal{D}(\mathcal{E}) \text{ pour } \|\ \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E})}$$

Cette hypothèse implique que (H R) est vérifiée.

Nous présentons ici quelques cas où nous savons montrer que (H R) est vraie.
Précisons d'abord que l'on peut se ramener au cas où μ est la mesure de Lebesgue sur D :

Proposition 2.7.3 *Si $p \in \mathcal{C}^1_b(D)$, $p > 0$ sur D et si p vérifie la condition d'énergie finie, alors $H(D, dx, a\,dx)$ est dense dans $H(D,\mu,a\mu)$.*

Cette proposition signifie que si (H R) est vraie avec $\mu = dx$, elle est vraie avec une probabilité μ quelconque (vérifiant (H S P)).

Preuve: On fixe $u \in H(D,\mu,a\mu)$. Il n'est pas restrictif de supposer que $\|u\|_\infty < +\infty$ puisque les fonctions bornées sont denses dans $H(D,\mu,a\mu)$. On cherche une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $H(D,dx,a\,dx)$ vérifiant

$$\|u_n - u\|_{H(D,\mu,a\mu)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On définit $\psi_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0,1]$ par :

$$\begin{array}{ll} \psi_n(x) = 0 & \text{si } x \in \left[0, 2^{-n}\right] \\ \psi_n(x) = 2^n x - 1 & \text{si } x \in \left[2^{-n}, 2^{-n+1}\right] \\ \psi_n(x) = 1 & \text{si } x \in \left[2^{-n+1}, +\infty\right[\end{array}$$

et on approche u par la fonction :

$$u_n = \psi_n(\sqrt{p})\ u$$

On a alors :

$$\nabla u_n = \psi_n(\sqrt{p})\ \nabla u + 2^n\ \mathbb{1}_{(2^{-n}\leq\sqrt{p}\leq 2^{-n+1})}\ u\ \frac{\nabla p}{2\sqrt{p}}$$

et il faut montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in H(D, dx, a\,dx)$
2. $\|u_n - u\|_{L^2(D,\mu)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
3. $\|\sigma\nabla u_n - \sigma\nabla u\|_{L^2(D,\mu)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Démontrons-le :

1. Puisque $u \in L^2(D,\mu)$:

$$\int_D u_n^2\ dx \leq \int_D \left(\mathbb{1}_{(\sqrt{p}>2^{-n})}\ u\right)^2\ dx \leq \int_D \frac{p}{2^{-2n}}\ u^2\ dx < +\infty$$

   D'autre part, puisque $u \in H(D,\mu,a\mu)$ et p vérifie la condition d'énergie finie :

$$\begin{aligned}\int_D |\sigma\nabla u_n|^2\ dx &\leq 2\int_D |\mathbb{1}_{(\sqrt{p}>2^{-n})}\ \sigma\nabla u|^2\ dx + 2\int_D 2^{2n}\ \|u\|_\infty^2\ |\sigma\frac{\nabla p}{2\sqrt{p}}|^2\ dx\\ &\leq \frac{2}{2^{2n}}\int_D p\ |\sigma\nabla u|^2\ dx + \frac{2\times 2^{2n}}{4}\ \|u\|_\infty^2 \int_D |\sigma\frac{\nabla p}{p}|^2\ p\ dx\\ &< +\infty\end{aligned}$$

   Donc $u_n \in H(D,dx,a\,dx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $$\begin{aligned}\int_D (u-u_n)^2 p\ dx &= \int_D u^2\ (1-\psi_n(\sqrt{p}))^2\ p\ dx\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ par convergence dominée}\end{aligned}$$

   donc u_n converge vers u dans $L^2(D,\mu)$.

3. $$\begin{aligned}&\int_D |\sigma\nabla u - \sigma\nabla u_n|^2\ p\ dx\\ &\leq 2\int_D (1-\psi_n(\sqrt{p}))^2\ |\sigma\nabla u|^2\ p\ dx\\ &\quad +2\int_D 2^{2n}\ \mathbb{1}_{(2^{-n}\leq\sqrt{p}\leq 2^{-n+1})}\ p\ u^2\ |\sigma\frac{\nabla p}{2\sqrt{p}}|^2\ dx\\ &\leq 2\int_D \mathbb{1}_{(0<\sqrt{p}<2^{-n+1})}\ |\sigma\nabla u|^2\ p\ dx\\ &\quad +\frac{2}{4}\ 2^{2n}\ 2^{-2n+2}\ \|u\|_\infty^2 \int_D \mathbb{1}_{(0<\sqrt{p}<2^{-n+1})}\ |\sigma\frac{\nabla p}{p}|^2\ p\ dx\end{aligned}$$

   qui tend vers 0 par convergence dominée, donc $\sigma\nabla u_n$ tend vers $\sigma\nabla u$ dans $L^2(D,\mu)$.

Ceci prouve que $H(D,dx,a\,dx)$ est dense dans $H(D,\mu,a\mu)$.

∎

On utilisera également le résultat de densité suivant :

Proposition 2.7.4 *On note*

$$HSB(D,\mu,a\mu) = \{f \in H(D,\mu,a\mu) \quad / \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad / \quad f = 0 \text{ sur } B(0,n)^c\}$$

où $B(0,n)^c$ est le complémentaire de la boule de centre 0 et de rayon n.
$HSB(D,\mu,a\mu)$ est un sous-espace dense de $H(D,\mu,a\mu)$.

Preuve: On fixe $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathbb{1}_{B(0,1)} \leq f \leq \mathbb{1}_{B(0,2)}$ et on pose $f_\varepsilon(x) = f(\varepsilon x)$ pour tout $\varepsilon > 0$. La fonction f_ε vérifie : $\mathbb{1}_{B(0,\frac{1}{\varepsilon})} \leq f_\varepsilon \leq \mathbb{1}_{B(0,\frac{2}{\varepsilon})}$ et $\nabla f_\varepsilon(x) = \varepsilon \nabla f(\varepsilon x)$.

Soit $u \in H(D,\mu,a\mu)$. On note $u_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x)\ u(x)$. Si u est bornée, u_ε a la même borne. De plus, u_ε tend vers u dans $H(D,\mu,a\mu)$ quand ε tend vers 0 :

$$\begin{aligned}
&\|u-u_\varepsilon\|^2_{H(D,\mu,a\mu)} \\
&\quad = \|u-u_\varepsilon\|^2_{H(D\cap B(0,\frac{1}{\varepsilon})^c,\mu,a\mu)} \\
&\quad \leq 2\|u\|^2_{H(D\cap B(0,\frac{1}{\varepsilon})^c,\mu,a\mu)} + 2\int_{D\cap B(0,\frac{1}{\varepsilon})^c} u^2\ p\ dx \\
&\qquad +4\int_{D\cap B(0,\frac{1}{\varepsilon})^c} \varepsilon^2\ \|a\|_\infty \|\nabla f\|^2_\infty\ u^2\ p\ dx + 4\int_{D\cap B(0,\frac{1}{\varepsilon})^c} |\sigma\nabla u|^2\ p\ dx \\
&\qquad \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0
\end{aligned}$$

Comme $u_\varepsilon \in HSB(D,\mu,a\mu)$, ceci prouve que $HSB(D,\mu,a\mu)$ est dense dans $H(D,\mu,a\mu)$.

∎

Proposition 2.7.5 *Si D est un domaine de $\mathbb{R}$ (i.e. si $d=1$) et si le bord de l'ensemble où σ s'annule est négligeable pour la mesure de Lebesgue (i.e. si $dx(\partial(\sigma = 0)) = 0$) alors $H^1(D)$ est dense dans $H(D,\mu,a\mu)$.*

Preuve: En dimension 1, on peut supposer que $s \geq 0$ en prenant $\sigma = \sqrt{a} = |\sigma|$. La fonction σ peut alors n'être plus $\mathcal{C}_b^1(D)$, mais elle reste bornée à dérivée p.p. bornée (i.e. $W^{1,\infty}(D)$).

D'après les propositions précédentes, il suffit de montrer que $H^1(D)$ est dense dans $HSB(D,dx,a\,dx)$.

Pour cela, on va utiliser la suite régularisante $(J_\varepsilon)_\varepsilon$ définie lors de la démonstration du théorème 2.2.8, et une suite croissante $(\psi_n)_n$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à supports compacts dans l'intérieur de $\{\sigma=0\}$, qui tend presque sûrement vers la fonction caractéristique de l'intérieur de $\{\sigma = 0\}$: $\mathbb{1}_{\overset{\circ}{\{\sigma=0\}}}$.

On se donne une fonction u de $H(D,dx,a\,dx)$ à support borné et on définit pour $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction approchée :

$$u_{\varepsilon,\eta,n} = \frac{1}{\sigma+\eta}(\sigma u) + (J_\varepsilon * u)\psi_n$$

Puisque $u \in H(D, dx, a\,dx)$ et $\sigma \in \mathcal{C}_b^1$, la fonction (σu) appartient à $H^1(D)$ et a pour dérivée (au sens des distributions) $\sigma \nabla u + u \nabla \sigma$. Par conséquent, $u_{\varepsilon,\eta,n} \in H^1(D)$ et a pour dérivée :

$$\nabla u_{\varepsilon,\eta,n} = -\frac{\nabla \sigma}{(\sigma+\eta)^2}(\sigma u) + \frac{1}{\sigma+\eta}(\sigma \nabla u + u \nabla \sigma) + (\nabla J_\varepsilon * u)\psi_n + (J_\varepsilon * u)\nabla \psi_n$$

On veut montrer que $u_{\varepsilon,\eta,n}$ converge vers u dans $H(D, dx, a\,dx)$ quand n tend vers $+\infty$ et ε et η tendent vers 0.

Pour tout $\theta > 0$:

$$\begin{aligned}
&\|u_{\varepsilon,\eta,n} - u\|_{L^2(D,dx)} \\
&\quad = \left\| \frac{1}{\sigma+\eta}(\sigma u) + (J_\varepsilon * u)\psi_n - \frac{\sigma u}{\sigma+\eta} - \frac{\eta u}{\sigma+\eta}\psi_n \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\eta u}{\sigma+\eta}(\psi_n - 1)\mathbb{1}_{\sigma \geq \theta} + \frac{\eta u}{\sigma+\eta}(\psi_n - 1)\mathbb{1}_{\sigma < \theta} \right\|_{L^2(D,dx)} \\
&\quad \leq \|J_\varepsilon * u - u\|_{L^2(D,dx)} + \frac{\eta}{\theta+\eta}\|u\|_{L^2(D,dx)} \\
&\qquad + \|u\ (\psi_n - 1)\ \mathbb{1}_{\sigma < \theta}\|_{L^2(D,dx)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|\sigma \nabla u_{\varepsilon,\eta,n} - \sigma \nabla u\|_{L^2(D,dx)} \\
&\quad = \left\| -\frac{\sigma^2}{(\sigma+\eta)^2}(\nabla \sigma)u + \frac{\sigma}{\sigma+\eta}(\nabla \sigma)u + \frac{\sigma^2}{\sigma+\eta}\nabla u \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\sigma^2}{\sigma+\eta}\nabla u - \frac{\sigma\eta}{\sigma+\eta}\nabla u \right\|_{L^2(D,dx)} \\
&\quad \leq \left\| \frac{\sigma\eta}{(\sigma+\eta)^2}(\nabla \sigma)\ u\ \left(\mathbb{1}_{\sigma \geq \theta} + \mathbb{1}_{0<\sigma<\theta}\right) \right\|_{L^2(D,dx)} \\
&\qquad + \left\| \frac{\eta}{\sigma+\eta}\sigma \nabla u \mid \left(\mathbb{1}_{\sigma \geq \theta} + \mathbb{1}_{0<\sigma<\theta}\right) \right\|_{L^2(D,dx)} \\
&\quad \leq \frac{\eta}{\theta+\eta}\left(\|(\nabla \sigma)u\|_{L^2(D,dx)} + \|\sigma \nabla u\|_{L^2(D,dx)} \right) \\
&\qquad + \|(\nabla \sigma)\ u\ \mathbb{1}_{0<\sigma<\theta}\|_{L^2(D,dx)} + \|\sigma \nabla u\ \mathbb{1}_{0<\sigma<\theta}\|_{L^2(D,dx)}
\end{aligned}$$

Fixons $\alpha > 0$.

On peut trouver un θ assez petit et un n assez grand pour que :

$$\begin{array}{rl} & \|u\ (\psi_n - 1)\ \mathbb{1}_{\sigma<\theta}\|_{L^2(D,dx)} < \alpha \\ & \|(\nabla\sigma)\ u\ \mathbb{1}_{0<\sigma<\theta}\|_{L^2(D,dx)} < \alpha \\ \text{et} & \|\sigma\nabla u\ \mathbb{1}_{0<\sigma<\theta}\|_{L^2(D,dx)} < \alpha \end{array}$$

On choisit ensuite un η assez petit pour avoir :

$$\frac{\eta}{\theta+\eta}\|u\|_{L^2(D,dx)} < \alpha$$

$$\text{et} \quad \frac{\eta}{\theta+\eta}\left(\|(\nabla\sigma)u\|_{L^2(D,dx)} + \|\sigma\nabla u\|_{L^2(D,dx)}\right) < \alpha$$

et un ε petit tel que :

$$\|J_\varepsilon * u - u\|_{L^2(D,dx)} < \alpha$$

On a alors

$$\|u_{\varepsilon,\eta,n} - u\|_{H(D,dx,a\,dx)} < 6\alpha$$

■

cas particulier : *Si $D =]0,1[^2$, $d\mu = dxdy$ et $\sigma(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alors $H^1(D)$ est dense dans $H(D,\mu,a\mu)$.*

Preuve: Fixons $u \in H(D,\mu,a\mu) \cap L^\infty(D)$. Comme $u \in L^2(]0,1[^2, dxdy)$, pour dx-presque tout x de $]0,1[$, $u(x,\cdot) \in L^2(]0,1[,dy)$, et de même pour dx-presque tout x de $]0,1[$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,\cdot) \in L^2(]0,1[,dy)$. En notant $(J_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite régularisante sur $\mathbb{R}$ (cf preuve du th 2.2.8), on approche u par :

$$u_\varepsilon(x,y) = (J_\varepsilon *_2 u)(x,y) = \int_{]0,1[} J_\varepsilon(y-z)u(x,z)\ dz$$

qui a pour dérivées partielles :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = J_\varepsilon *_2 \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} = J'_\varepsilon *_2 u$$

car pour $z \in]0,1[$, l'ensemble $\{x/(x,z) \in D\}$ ne dépend pas de z.

Montrons d'abord que $u_\varepsilon \in H^1(D)$.

- $$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(D,\mu)} &= \int_{]0,1[}\int_{]0,1[} \left(J_\varepsilon * u(x,\cdot)\right)^2(y)\ dy\ dx \\ &= \int_{]0,1[} \|J_\varepsilon * u(x,\cdot)\|^2_{L^2(]0,1[,dy)}\ dx \\ &\le \int_{]0,1[} \|u(x,\cdot)\|^2_{L^2(]0,1[,dy)}\ dx = \|u\|^2_{L^2(D,\mu)} < +\infty \end{aligned}$$

  car $u(x,\cdot) \in L^2(]0,1[,dy)$ pour dx-presque tout x de $]0,1[$.

- de même : $\left\|\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right\|^2_{L^2(D,\mu)} = \left\|J_\varepsilon *_2 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2(D,\mu)} \leq \left\|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2(D,\mu)} < +\infty$

  car $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,\cdot) \in L^2(]0,1[,dy)$ pour dx-presque tout x de $]0,1[$.

- $$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\right\|^2_{L^2(D,\mu)} &= \|J'_\varepsilon *_2 u\|^2_{L^2(D,\mu)} \\ &= \int_{]0,1[}\int_{]0,1[}\left[\int_{]0,1[} J'_\varepsilon(y-z)u(x,z)\,dz\right]^2 dy\,dx \\ &\leq \int_{]0,1[}\int_{]0,1[}\left[\int_{]0,1[} J'^2_\varepsilon(y-z)\,dz\int_{]0,1[} u^2(x,z)\,dz\right] dy\,dx \\ &\leq \|J'_\varepsilon\|^2_\infty \|u\|^2_{L^2(D,\mu)} < +\infty \end{aligned}$$

Ensuite, on montre que u_ε converge vers u dans $L^2(D,\mu)$.

$$\|u_\varepsilon - u\|^2_{L^2(D,\mu)} = \int_{]0,1[} \|J_\varepsilon * u(x,\cdot) - u(x,\cdot)\|^2_{L^2(]0,1[,dy)}\,dx$$

et pour presque tout x de $]0,1[$, l'appartenance de $u(x,\cdot)$ à $L^2(]0,1[,dy)$ assure que $\|J_\varepsilon * u(x,\cdot) - u(x,\cdot)\|^2_{L^2(]0,1[,dy)}$ tend vers 0 quand ε tend vers 0 et est majorée par $2\|u(x,\cdot)\|^2_{L^2(]0,1[,dy)}$ qui est intégrable. En utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient que $\|u_\varepsilon - u\|^2_{L^2(D,\mu)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2(D,\mu)} 0$.

Enfin, de la même façon que pour u, on montre que $\sigma\nabla u_\varepsilon = \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}$ converge dans $L^2(D,\mu)$ vers $\sigma\nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ puisque $\frac{\partial u}{\partial x}$ est élément de $L^2(D,\mu)$.

La famille $(J_\varepsilon *_2 u)_{\varepsilon>0}$ est donc une famille d'éléments de $H^1(D)$ qui converge quand $\varepsilon \to 0$ vers u dans $H(D,\mu,a\mu)$.

∎

Remarque 2.7.6 : Cette démonstration se généralise sans peine au cas où $D = D' \times D''$, avec D' et D'' des ouverts de $\mathbb{R}^r$ et $\mathbb{R}^{d-r}$, et $a = \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, avec a' matrice $r \times r$ uniformément elliptique sur D'.

Chapitre 3

Entropy, Reversible Diffusion Processes and Markov Uniqueness

3.1 Introduction

Consider the symmetric bilinear form $\mathcal{E}_\varphi$ defined on $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ by

$$\mathcal{E}_\varphi(f,g) = \int \nabla f . \nabla g \; \varphi^2 \; dx$$

for $\varphi \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. This form is closable and its minimal extension $(\mathcal{E}_\varphi, H^1_o(\varphi^2 dx))$ is actually a Dirichlet form.

Several questions are then natural to ask :

1. does it exist a maximal closed markovian extension $(\mathcal{E}_\varphi^+, \mathcal{D}(\mathcal{E}_\varphi^+))$ of $(\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$, and can we describe explicitly this extension ?
2. when is $(\mathcal{E}_\varphi^+, \mathcal{D}(\mathcal{E}_\varphi^+))$ equal to $(\mathcal{E}_\varphi, H^1_o(\varphi^2 dx))$? (this property is known as Markov uniqueness)
3. is it possible to describe the (eventually) associated Markov process, in particular in terms of a Girsanov transform of a standard Brownian motion ?

When $\varphi \equiv 1$, it is well known that Markov uniqueness holds with $\mathcal{D}(\mathcal{E}_\varphi^+) = H^1(\mathbb{R}^d)$, the usual Sobolev space, since $H^1(\mathbb{R}^d) = H^1_o(\mathbb{R}^d)$. When $\varphi \not\equiv 1$, the three questions above have been studied for a long time by many authors. Surprisingly, they only recently received a fully satisfactory answer (see [AHKS77] [AR89] [AKR90] [RZ92] [RZ94] [Son94b] [Son94a], ...) namely

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}_\varphi^+) \text{ is a "pseudo" Sobolev space and Markov uniqueness holds.} \tag{3.1.1}$$

The stochastic structure of the associated process follows from general arguments in the theory of Dirichlet forms, and is studied in [ARZ93a].

The aim of all the works mentioned above was not only to discuss the finite dimensional setting of this problem, but to provide an adapted setting in order to extend the results to some infinite dimensional spaces (extending the natural abstract Wiener space setting).

In this paper, we shall stay in the simple finite dimensional case. Our aim is to link these questions to the construction (and the properties) of singular diffusions (more precisely Brownian motions with singular drifts) which have deserved attention for some times, in particular in Nelson's stochastic approach of the Schrödinger equation. The recent new developments of this theory allow to extend the results presented here to more general situations, like general $\mathbb{R}^d$-valued diffusion processes (with a non necessarily uniformly elliptic diffusion matrix), or infinite dimensional diffusion processes. One can also expect to get interesting results in the non symmetric case.

Let us describe briefly the contents of the present paper, and compare our results (or proofs) with those of the (impressive) existing literature.

In section 3.2, we introduce the main tools and results concerning the Dirichlet form associated with $\mathcal{E}_\varphi$. In particular, we take up the friendly challenge proposed to us by M.Röckner, and give a completely elementary (and purely analytical) proof of Markov uniqueness (assuming the maximality results due to [AKR90]) (see theorem 3.2.7). Actually, even in this simple case, the proofs proposed in the existing literature are a sophisticated mixture of deep functional analytical results and a touch of Probability theory ([RZ92],[RZ94], [Son94b]), or use the specific Gaussian structure of the underlying Brownian motion ([Son94b] and [Son94a]).

Section 3.3 collects some results on singular diffusion processes associated with the generator $S_\varphi = \frac{1}{2}\Delta + \frac{\nabla\varphi}{\varphi}.\nabla$. After the pioneering work by Nelson [Nel88] and Carlen [Car84], a new completely different approach was proposed by Föllmer ([Föl88], at least in implicit form). This approach is based on relative entropy, and was recently developed by Léonard and one of the authors (see [CL94], [CL95a] and [CL95b]). It allows in particular to build a Brownian motion with drift $\frac{\nabla\varphi}{\varphi}$, and to characterize it as a solution of a minimization problem (see theorem 3.3.5 and proposition 3.6.1). Time reversibility is obtained thanks to results due to Föllmer [Föl84] (see also [CP95] for extensions). The analytic building (in the symmetric case) of this process is explained in [AR91].

In section 3.4, we study the fine (in the usual potential theoretic sense) structure of the diffusion process builded in section 3.3. The main result is that the nodal set $\{\varphi = 0\}$ cannot be attained, starting from any point outside of it (up to a nice modification of φ). This result is a consequence of Nelson's estimate, as recalled in [MZ85], and an ad-hoc choice of φ. It can easily be extended to more general frames. We also give a "Gibbsian" description of the process, based on an extension of Ito 's formula due to Föllmer and Protter [FP94], which (in the non symmetric case) plays the role of Fukushima's one [Fuk80].

In section 3.5, we link the singular diffusion process to the Dirichlet form. The uniqueness of a quasi-regular extension of $(\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$ is then an immediate consequence of old results on martingale problems explained in [Jac79]. The unattainability of the nodal set gives the key argument in Song's proof of regularity (i.e. of Markov uniqueness, assuming the maximality result [Son94b]). This proof is simplified in order to get a purely probabilistic one (the only analytical material required is really elementary and does not call to Dirichlet forms theory).

Finally, in section 3.6, we present some immediate consequences to the study of invariant measures of finite energy. These results extend (in the framework of the present paper) similar results of Bogachev and Röckner ([BR94a] and [BR94b]), and are actually the probabilistic counterpart of the methods of these authors.

This paper is deliberately written in a naive way (at least for all the analytical arsenal) in order to be easily understood by both specialists in Dirichlet forms or stochastic calculus. In particular we apologize in advance for insisting on some trivial points which are not necessarily familiar to some or others.

Extensions of these results to general diffusion processes in $\mathbb{R}^d$ are studied in chap 4. Related results in the infinite dimensional setting (in particular connections with Gibbs states) will be published elsewhere.

Acknowledgements :

We wish to thank Sergio Albeverio and Michaël Röckner for very interesting and stimulating discussions. They also communicated to us (in real time) their impressive contribution to the topic. Special thanks to Michaël Röckner for a careful reading of our first draft and his numerous comments.

We also want to thank Hans Föllmer for so many discussions on mathematical subjects (and especially the one concerning relative entropy), Yves Le Jan and Yannick Heurteaux for fruitful discussions on Dirichlet forms and Sobolev spaces.

3.2 Dirichlet forms

We first study by purely analytical means the Dirichlet form we introduce above. Though we shall sometimes recall basic definitions, we refer to Fukushima's book [Fuk80] for all general results on Dirichlet forms in $\mathbb{R}^d$.

To begin with, consider the classical form $\mathcal{E}$ defined for f and g in $\mathcal{C}_c^\infty$ by

$$\mathcal{E}(f,g) = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla f . \nabla g \ dx \tag{3.2.1}$$

where ∇ denotes the usual gradient operator, "." stands for scalar product in $\mathbb{R}^d$ and dx is Lebesgue measure. As a bilinear symmetric form defined on a dense subset of $L^2(dx)$, $\mathcal{E}$ is closable, i.e. the completion of $\mathcal{C}_c^\infty$ with respect to the Euclidean norm $\sqrt{\mathcal{E}^1}$, where $\mathcal{E}^1(f) = \int f^2 \ dx + \int |\nabla f|^2 \ dx$, is a Hilbert subspace H_o^1 of $L^2(dx)$, with scalar product extending $\mathcal{E}^1$.

Of course it is well known that H_o^1 is equal to the usual Sobolev space H^1 defined by :

$$\begin{aligned} H^1 &= \{ f \in L^2(dx) \quad / \quad \nabla f \in (L^2(dx))^d \} \\ &\quad \text{where } \nabla \text{ is the gradient operator in the set } \mathcal{D}' \text{ of Schwartz distributions, i.e.} \\ &= \{ f \in L^2(dx) \text{ s.t. there exists an element of } (L^2(dx))^d \text{ denoted by } \nabla f \\ &\quad \text{satisfying for all } g \in \mathcal{C}_c^\infty \text{ and } i = 1, \ldots, d \quad \int \nabla_i f \ g \ dx = -\int f \ \nabla_i g \ dx \} \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Furthermore the closure of $(\mathcal{E}, \mathcal{C}_c^\infty)$, denoted by $(\mathcal{E}, H^1)$ (or $(\mathcal{E}, H_o^1)$) is again defined by formula (3.2.1).

Another fundamental property of $(\mathcal{E}, H^1)$ is the Markov property, which is implied by the fact that $(\mathcal{E}, H^1)$ is the closure of a markovian form. If one wants to prove the Markov property of $(\mathcal{E}, H^1)$ without using the density of $\mathcal{C}_c^\infty$ in H^1, one can show directly that the unit contractions operate on H^1 by using the following characterization :

$$\begin{aligned} H^1 = \ &\{ f \in L^2(dx) \text{ s.t. for all } k \in \mathbb{R}^d, \ \ dx_k\text{-almost all } x \in k^\perp \\ &(k^\perp \text{ being the orthogonal set of } k \text{ and } dx_k \text{ the Lebesgue measure on } k^\perp) \\ &\text{the function } s \to f(x+sk) \text{ has an absolutely continuous } ds\text{-version } \tilde{f}_x \\ &\text{s.t. } \frac{d\tilde{f}_x}{ds} \in L^2 \quad (\frac{d\tilde{f}_x}{ds} \text{ being considered as a function of } (s,x)) \} \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Furthermore, if we define $\dfrac{\partial f}{\partial k} := \dfrac{d\tilde{f}_x}{ds}$, then $\nabla_i f = \dfrac{\partial f}{\partial e_i}$ where e_i is the i^{th} vector of the canonical basis.

It should also be possible to choose the following (third) description of H^1 :

$$H^1 = \{f \in L^2(dx) \text{ s.t. for all } k \in \mathbb{R}^d, \text{ the } L^2(dx)\text{-limit of } \frac{1}{s}(f(\cdot + sk) - f(\cdot)) \text{ exists when } s \text{ goes to } 0\} \tag{3.2.4}$$

Furthermore the above limit is equal to $\nabla f.k$.

Finally, Weyl's lemma shows (see [Fuk80]) that $(\mathcal{E}, H^1)$ is the maximal markovian extension of $(\mathcal{E}, \mathcal{C}_c^\infty)$, hence the only one since it is also the minimal one.

Now consider the more general form $\mathcal{E}_\varphi$ defined for f and g in $\mathcal{C}_c^\infty$ by

$$\mathcal{E}(f,g) = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla f.\nabla g \ \varphi^2 \ dx \tag{3.2.5}$$

For this definition to make sense, we have to assume that $\varphi \in L^2_{loc}(dx)$, but if we want to mimic what is done in the classical case ($\varphi \equiv 1$), and for reasons which will be clear later, we shall assume that

$$\varphi \in H^1_{loc}(dx) \tag{3.2.6}$$

Actually 3.2.6 is necessary and sufficient for $\mathcal{E}_\varphi$ to be admissible in the sense of [AR89], because of the following result :

Proposition 3.2.1 *(see [ARZ93b] prop 1.5) Let ν be a finite positive measure on $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ s.t. for every $i = 1, \cdots, d$ there exists $\beta_i \in L^2(d\nu)$ s.t.*

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty \quad \int \nabla_i f \ d\nu = \int f \ \beta_i \ d\nu$$

Then $\nu = \varphi^2 \ dx$ for some $\varphi \in H^1(dx)$.

The following properties of $\mathcal{E}_\varphi$ have been proved to be true :

Proposition 3.2.2

i. The form $(\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$ is closable in $L^2(\varphi^2 dx)$, see [MR92]

ii. Existence and description of its maximal closed markovian extension, see [AKR90] and [Tak92]

iii. Markov uniqueness , i.e. uniqueness of a markovian closed extension, see [RZ92] and [RZ94]

Our aim is to give elementary proofs of parts *i* and *iii* of this proposition 3.2.2.

The first difficulty is the following : An element f of $L^2(\varphi^2 dx)$ does not necessarily belong to $\mathcal{D}'$ (because φ^2 is not bounded by below), and so the usual ∇f is not a priori well defined. Nevertheless, for such an f, $f\varphi^2$ belongs to $L^1_{loc}(dx)$ and so $\nabla(f \ \varphi^2)$ is well defined in $\mathcal{D}'$. Furthermore, if $f \in \mathcal{C}_c^\infty$

$$\nabla(f \ \varphi^2) = \varphi^2 \ \nabla f + 2 \ f \ \varphi \ \nabla\varphi \qquad (\in (L^1(dx))^d) \tag{3.2.7}$$

So it is natural to define the weighted Sobolev space $H^1(\varphi^2 dx)$ as follows (see [ARZ93b] lemma 2.2) :

Definition 3.2.3 *$H^1(\varphi^2 dx)$ is the set of elements $f \in L^2(\varphi^2 dx)$ s.t. there exists an element $\overline{\nabla} f = (\overline{\nabla}_i f)_{i\in\{1,\cdots,d\}} \in (L^2(\varphi^2 dx))^d$ satisfying*

$$\forall i \in \{1,\cdots,d\} \qquad \varphi^2\ \overline{\nabla}_i f = \nabla_i (f\ \varphi^2) - 2\ f\ \varphi\ \nabla_i \varphi \quad \text{in } \mathcal{D}'$$

that is , the following integration by parts formula

$$\int g\ \overline{\nabla}_i f\ \varphi^2\ dx = -\int f\ \nabla_i g\ \varphi^2\ dx - 2\int\ f\ g\ \frac{\nabla_i \varphi}{\varphi}\ \varphi^2\ dx \tag{3.2.8}$$

holds for all $i \in \{1,\cdots,d\}$ and $g \in \mathcal{C}_c^\infty$.

Notice that if $f \in H^1(\varphi^2 dx)$ then $f\ \varphi^2 \in W^{1,1}_{loc}$ (usual Sobolev space).
We can now state :

Proposition 3.2.4 *The form $(\mathcal{E}_\varphi, H^1(\varphi^2 dx))$ defined by*

$$\forall f, g \in H^1(\varphi^2 dx) \qquad \mathcal{E}_\varphi(f,g) = \int \overline{\nabla} f . \overline{\nabla} g\ \varphi^2\ dx$$

is a closed extension of $(\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$, which in turn is closable.

Proof: Take a Cauchy sequence $(f_n)_{n\geq 1}$ of $H^1(\varphi^2 dx)$ equipped with the scalar product $\mathcal{E}^1_\varphi(f,g) = \mathcal{E}_\varphi(f,g) + \int f\ g\ \varphi^2\ dx$, and let f be the $L^2(\varphi^2 dx)$ limit of $(f_n)_{n\geq 1}$. $(\overline{\nabla} f_n)_{n\geq 1}$ converges to h in $(L^2(\varphi^2 dx))^d$, and by taking limits in (3.2.8) it is immediate that $f \in H^1(\varphi^2 dx)$ with $h = \overline{\nabla} f$. Thus $(\mathcal{E}_\varphi, H^1(\varphi^2 dx))$ is closed. Furthermore $\mathcal{C}_c^\infty \subset H^1(\varphi^2 dx)$ and $\nabla f = \overline{\nabla} f$ for f in $\mathcal{C}_c^\infty$ according to (3.2.7). So $(\mathcal{E}_\varphi, H^1(\varphi^2 dx))$ is an extension of $(\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$. ∎

Since $(\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$ admits a closed extension, it is closable and we shall of course denote its smallest closed extension by $(\mathcal{E}_\varphi, H^1_o(\varphi^2 dx))$, which is actually a Dirichlet form since $(\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$ is trivially markovian. The Markov property of $(\mathcal{E}_\varphi, H^1(\varphi^2 dx))$ is not so immediate in view of its definition. As we did in the classical case, we shall get other descriptions of $(\mathcal{E}_\varphi, H^1(\varphi^2 dx))$ similar to (3.2.3) and (3.2.4) to prove the Markov property. The description similar to (3.2.3) was obtained in [AR90] th 3.2 , [AKR90] prop 2.2 , [RZ92] and [ARZ93b] lemma 2.2 in this and more general contexts (see also [Son94b]).

Proposition 3.2.5 *$f \in H^1(\varphi^2 dx)$ if and only if $f \in L^2(\varphi^2 dx)$ and for all $k \in \mathbb{R}^d$, ν_k-almost all $x \in k^\perp$ (where ν_k is the image of $\varphi^2 dx$ by the projection $\mathbb{R}^d \to k^\perp$) the following holds :*

i. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ s & \to & f(x+sk) \end{array} \right\}$ *has an absolutely continuous ds-version $\tilde{f}_x$ on the set* $\{s\ /\ \varphi^2(x+sk) > 0\}$.

ii. $\dfrac{d\tilde{f}_x}{ds} \in L^2(\varphi^2 dx)$.

In this case if we define $\dfrac{\overline{\partial} f}{\partial k} := \dfrac{d\tilde{f}_x}{ds}$, *then* $\overline{\nabla}_i f = \dfrac{\overline{\partial} f}{\partial e_i}$.

Here are some important consequences, already noticed by Albeverio and Röckner :

Corollary 3.2.6

i. $(\mathcal{E}_\varphi, H^1(\varphi^2 dx))$ *is markovian (hence a Dirichlet form). It is an easy consequence of the chain rule and proposition 3.2.5.*

ii. If f *and* g *belongs to* $H^1(\varphi^2 dx)$ *and if* fg, $f\overline{\nabla}_i g$ *and* $g\overline{\nabla}_i f$ *are in* $L^2(\varphi^2 dx)$ *for all* $i \in \{1, \cdots, d\}$, *then* $fg \in H^1(\varphi^2 dx)$ *and* $\overline{\nabla}(fg) = f\overline{\nabla} g + g\overline{\nabla} f$.

iii. The set of bounded compactly supported functions of $H^1(\varphi^2 dx)$ *is a dense subset of* $H^1(\varphi^2 dx)$ *for the norm* $\sqrt{\mathcal{E}^1_\varphi}$. *It is an immediate consequence of i and ii, by using a truncature argument.*

We now are ready to state the main result of [RZ94] and to give an elementary proof of it.

Theorem 3.2.7 $\mathcal{C}_c^\infty$ *is* $\mathcal{E}^1_\varphi$ *dense in* $H^1(\varphi^2 dx)$, *i.e.* $H^1_o(\varphi^2 dx) = H^1(\varphi^2 dx)$.

Proof: According to corollary 3.2.6, it is enough to approximate functions in $H^1(\varphi^2 dx)$ which are bounded and compactly supported. In the sequel, f will denote such a function.

Let J_ε be a standart mollifier, i.e. for every $\varepsilon \in]0,1]$, $J_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^d} J(\dfrac{x}{\varepsilon})$ where $J \in \mathcal{C}_c^\infty$ satisfies $0 \le J \le 1$, $\operatorname{supp} J \subset B(0,1)$ and $\displaystyle\int J(x)\, dx = 1$.

Since f is bounded with compact support, $J_\varepsilon * f$ is well defined, $\mathcal{C}^\infty$, compactly supported with $\operatorname{supp} J_\varepsilon * f \subset \operatorname{supp} f + \varepsilon B(0,1)$ and bounded by $\|f\|_\infty$ for all $\varepsilon > 0$. We shall prove that

$$\begin{array}{l}\text{for a given sequence } (\varepsilon_n)_n \text{ decreasing to } 0,\\ J_{\varepsilon_n} * f \text{ converges to } f \text{ in } H^1(\varphi^2 dx)\end{array} \tag{3.2.9}$$

The easy part is the $L^2(\varphi^2 dx)$-convergence.

Lemma 3.2.8 *One can find a sequence* $(\varepsilon_n)_n$ *decreasing to* 0 *, such that* $J_{\varepsilon_n} * f$ *converges to* f *in* $L^2(\varphi^2 dx)$.

Proof of 3.2.8 : First, $J_\varepsilon * f \in L^2(dx)$ and converges to f in $L^2(dx)$ when ε goes to 0. Thus we can find a sequence $(\varepsilon_n)_n$ such that $J_{\varepsilon_n} * f$ converges to f dx a.e. Finally, since

$$|\varphi(J_{\varepsilon_n} * f) - \varphi\, f|^2 \le 2\, \|f\|^2_\infty\, |\varphi|^2\, \mathbb{1}_{(\operatorname{supp} f + B(0,1))}$$

which belongs to $L^1(dx)$, one may apply Lebesgue's bounded convergence theorem to show that

$$\int |(J_{\varepsilon_n} * f) - f|^2\, \varphi^2\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

∎

We now have to prove that $\nabla_i(J_{\varepsilon_n} * f)$ converges to $\overline{\nabla}_i f$ in $L^2(\varphi^2 dx)$ for a given sequence $(\varepsilon_n)_n$, or equivalently that $\varphi\nabla_i(J_{\varepsilon_n} * f)$ converges to $\varphi\overline{\nabla}_i f$ in $L^2(dx)$. But

$$\begin{aligned} \left\|\varphi\nabla_i(J_\varepsilon * f) - \varphi\overline{\nabla}_i f\right\|^2_{L^2(dx)} &\leq \left\|\varphi\overline{\nabla}_i f - (J_\varepsilon * (\varphi\overline{\nabla}_i f))\right\|^2_{L^2(dx)} \\ &+ \left\|J_\varepsilon * (\varphi\overline{\nabla}_i f) - \varphi\nabla_i(J_\varepsilon * f)\right\|^2_{L^2(dx)} \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

since $\varphi\overline{\nabla}_i f \in L^2(dx)$. But the first term of the above sum goes to 0 with ε. So we only have to study the second term. To this end we adapt the idea of chap 2 th 2.1.8. We write

$$\begin{aligned} &\left\|\varphi\nabla_i(J_\varepsilon * f) - (J_\varepsilon * (\varphi\overline{\nabla}_i f))\right\|^2_{L^2(dx)} \\ &= \int \left|\varphi(x) \int \nabla_i J_\varepsilon(x-y)\ f(y)\ dy - \int J_\varepsilon(x-y)\ \varphi(y)\ \overline{\nabla}_i f(y)\ dy\right|^2\ dx \\ &= \int \left|\int \nabla_i J_\varepsilon(x-y)\ f(y)\ [\varphi(x)-\varphi(y)]\ dy \right. \\ &\quad \left. + \int [\nabla_i J_\varepsilon(x-y)\ f(y)\ \varphi(y) - J_\varepsilon(x-y)\ \varphi(y)\ \overline{\nabla}_i f(y)]\ dy\right|^2\ dx \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

and we apply the following lemma :

Lemma 3.2.9 *For all $g \in \mathcal{C}_c^\infty$*

$$\int \overline{\nabla}_i f\ \varphi\ g\ dx + \int f\ \nabla_i\varphi\ g\ dx + \int f\ \varphi\ \nabla_i g\ dx = 0$$

The proof of lemma 3.2.9 is postponed to the end of the section. Just remark that lemma 3.2.9 is meaningful since $\varphi\overline{\nabla}_i f$ and φf are in $L^2(dx)$, so in $L^1_{loc}(dx)$ while $f\nabla_i\varphi \in L^1_{loc}(dx)$ since f is bounded and $\nabla_i\varphi \in L^2_{loc}(dx)$.

Applying lemma 3.2.9 with $g(y) = J_\varepsilon(x-y)$ in (3.2.11), we get

$$\begin{aligned} &\left\|\varphi\nabla_i(J_\varepsilon * f) - (J_\varepsilon * (\varphi\overline{\nabla}_i f))\right\|^2_{L^2(dx)} \\ &= \int \left|\int \nabla_i J_\varepsilon(x-y)\ f(y)\ [\varphi(x)-\varphi(y)]\ dy + \int J_\varepsilon(x-y)\ f(y)\ \nabla_i\varphi(y)\ dy\right|^2 dx \\ &\leq 2\|J_\varepsilon * (f\nabla_i\varphi)\|^2_{L^2(dx)} + 2\int \left|\int \nabla_i J_\varepsilon(x-y)\ f(y)\ [\varphi(x)-\varphi(y)]\ dy\right|^2\ dx \\ &\leq 2\|f\nabla_i\varphi\|^2_{L^2(dx)} + 2\int \left|\int \nabla_i J_\varepsilon(x-y)\ f(y)\ [\varphi(x)-\varphi(y)]\ dy\right|^2\ dx \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

To control the second term, we shall use (3.2.4). Since we didn't assume $\varphi \in H^1$, we will replace φ here by a function $\hat\varphi \in H^1$ such that $\hat\varphi = \varphi$ on $\operatorname{supp} f + B(0,1)$:

$$\hat\varphi = \varphi\xi \text{ with } \xi \in \mathcal{C}_c^\infty \text{ and } \mathbb{1}_{\operatorname{supp} f + B(0,2)} \leq \xi \leq \mathbb{1}_{\operatorname{supp} f + B(0,3)}$$

Then

$$\begin{aligned}
&\int \left| \int \nabla_i J_\varepsilon(x-y)\ f(y)\ [\varphi(x)-\varphi(y)]\ dy \right|^2\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{B(0,1)} \nabla_i J(s)\ f(x+s\varepsilon)\ \frac{\hat\varphi(x)-\hat\varphi(x+s\varepsilon)}{\varepsilon}\ ds \right|^2\ dx \\
&\le 2\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{B(0,1)} \nabla_i J(s)\ f(x+s\varepsilon)\ (-\nabla\hat\varphi(x+s\varepsilon).s)\ ds \right|^2\ dx \\
&\quad + 2\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{B(0,1)} \nabla_i J(s)\ f(x+s\varepsilon)\ \left[\frac{\hat\varphi(x)-\hat\varphi(x+s\varepsilon)}{\varepsilon} + \nabla\hat\varphi(x+s\varepsilon).s\right] ds \right|^2 dx
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Of course

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{B(0,1)} \nabla_i J(s)\ f(x+s\varepsilon)\ (-\nabla\hat\varphi(x+s\varepsilon).s)\ ds \right|^2\ dx \\
&\le\ C^{ste}\ \|\nabla_i J\|_\infty^2 \sum_{j=1}^d \|f\nabla_j\varphi\|^2_{L^2(dx)}
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{B(0,1)} \nabla_i J(s)\ f(x+s\varepsilon)\ \left[\frac{\hat\varphi(x)-\hat\varphi(x+s\varepsilon)}{\varepsilon} + \nabla\hat\varphi(x+s\varepsilon).s\right]\ ds \right|^2\ dx \\
&\le\ C^{ste}\ \|\nabla_i J\|_\infty^2 \|f\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^d}\int_{B(0,1)} \left| \frac{\hat\varphi(x)-\hat\varphi(x+s\varepsilon)}{\varepsilon} + \nabla\hat\varphi(x+s\varepsilon).s \right|^2\ ds\ dx \\
&\le\ C^{ste}\ \|\nabla_i J\|_\infty^2 \|f\|_\infty^2 \int_{B(0,1)} \left\| \frac{\hat\varphi(x)-\hat\varphi(x+s\varepsilon)}{\varepsilon} + \nabla\hat\varphi(x+s\varepsilon).s \right\|^2_{L^2(dx)}\ ds
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

According to (3.2.4), the quantity under the integral goes to 0 as ε goes to 0. Furthermore, it is easy to see (by using for instance Fourier transforms) that the convergence is uniform in s on the closed unit ball. We thus have proved

Lemma 3.2.10

$$\left\| \varphi\nabla_i(J_\varepsilon * f) - (J_\varepsilon * (\varphi\overline{\nabla}_i f)) \right\|^2_{L^2(dx)} \le C^{ste}\ \sum_{j=1}^d \|f\nabla_j\varphi\|^2_{L^2(dx)} + C^{ste}\ \|f\|_\infty^2 \theta(\varepsilon)$$

with $\theta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, *and* θ *only depends on* $\hat\varphi$, *thus on* $supp\ f$.

Of course we want to show that the left hand side in lemma 3.2.10 goes to 0 with ε. To this end, we shall use one more approximation.

Take $f_\eta = J_\eta * f$ which is $\mathcal{C}_c^\infty$. By the same argument as in lemma 3.2.8 we can find a sequence $(\eta_k)_k$ such that

$$\sum_{j=1}^{d} \|(f - f_{\eta_k})\nabla_j \varphi\|^2_{L^2(dx)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \tag{3.2.16}$$

Hence

$$\begin{aligned}
&\left\|\varphi\nabla_i(J_\varepsilon * f) - (J_\varepsilon * (\varphi\overline{\nabla}_i f))\right\|^2_{L^2(dx)} \\
&\leq 2\left\|\varphi\nabla_i(J_\varepsilon * (f - f_{\eta_k})) - (J_\varepsilon * (\varphi\overline{\nabla}_i(f - f_{\eta_k})))\right\|^2_{L^2(dx)} \\
&\quad + 2\left\|\varphi\nabla_i(J_\varepsilon * f_{\eta_k}) - (J_\varepsilon * (\varphi\overline{\nabla}_i f_{\eta_k}))\right\|^2_{L^2(dx)} \qquad (3.2.17)\\
&\leq C^{ste}\sum_{j=1}^{d} \|(f - f_{\eta_k})\nabla_j\varphi\|^2_{L^2(dx)} + C^{ste}\, \|(f - f_{\eta_k})\|^2_\infty \theta(\varepsilon) \\
&\quad + 2\left\|\varphi\nabla_i(J_\varepsilon * f_{\eta_k}) - (J_\varepsilon * (\varphi\overline{\nabla}_i f_{\eta_k}))\right\|^2_{L^2(dx)}
\end{aligned}$$

using lemma 3.2.10 with f replaced by $(f - f_{\eta_k})$ (we can do it without changing anything in the proof of this lemma since we actually have $\hat{\varphi} = \varphi$ on supp $f + B(0,2)$, thus on supp $(f - f_{\eta_k}) + B(0,1)$, which is enough for (3.2.13) to hold). By choosing first η_k and then ε, the first two terms in the above sum can be chosen arbitrarily small (since $\|(f - f_{\eta_k})\|^2_\infty \leq 2\|f\|^2_\infty$). It remains to show that for a fixed η_k the third term goes to 0 with ε i.e. that

$$\forall g \in \mathcal{C}_c^\infty \quad \|\varphi\nabla_i(J_\varepsilon * g) - (J_\varepsilon * (\varphi\nabla_i g))\|^2_{L^2(dx)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \tag{3.2.18}$$

But

$$\begin{aligned}
&\|\varphi\nabla_i(J_\varepsilon * g) - (J_\varepsilon * (\varphi\nabla_i g))\|^2_{L^2(dx)} \\
&= \int\left|\int J_\varepsilon(x - y)\nabla_i g(y)[\varphi(x) - \varphi(y)]\, dy\right|^2 dx \qquad (3.2.19)\\
&\leq C^{ste}\|J\|^2_\infty\|\nabla_i g\|^2_\infty \int_{B(0,1)} \|(\varphi\xi_g)(\cdot) - (\varphi\xi_g)(\cdot + s\varepsilon)\|^2_{L^2(dx)}\, ds
\end{aligned}$$

(by the same manipulations as in (3.2.13), with $\xi_g \in \mathcal{C}_c^\infty$ and $\xi_g = 1$ on supp $g + B(0,1)$). Since $\|(\varphi\xi_g)(\cdot) - (\varphi\xi_g)(\cdot + s\varepsilon)\|^2_{L^2(dx)}$ goes to 0 when ε goes to 0, uniformly on s on the closed unit ball (again use Plancherel's theorem) , (3.2.18) is proved.

The proof of the theorem will be achieved once we prove lemma 3.2.9, and we shall proceed now with this proof.

Let $M \in \mathbb{N}^*$ and let $\psi_M \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ be such that

$$\begin{array}{l}\psi_M(t) = t \text{ for } t \in [-M, M]\ , \quad |\psi_M| \leq M+1\ , \quad |\psi'_M| \leq 1 \\ \text{and} \quad \text{supp } (\psi_M) \subset [-3M, 3M]\end{array}$$

Define φ_M by

$$\begin{array}{l}\varphi_M := \psi_M(\frac{1}{\varphi}) \quad \text{if} \quad \varphi \neq 0 \\ \varphi_M := 0 \quad \text{if} \quad \varphi = 0\end{array}$$

It is an elementary exercise to prove that $\varphi_M \in H^1_{loc}$ and

$$\begin{array}{l}\nabla\varphi_M := -\frac{\nabla\varphi}{\varphi^2}\psi'_M(\frac{1}{\varphi}) \quad \text{if} \quad \varphi \neq 0 \\ \nabla\varphi_M := 0 \quad \text{if} \quad \varphi = 0\end{array}$$

by using (3.2.3) since $\psi'_M(\frac{1}{\varphi}) = 0$ on $\{\varphi \leq \dfrac{1}{3M}\}$. Noticing that

$$|\nabla\varphi_M| \leq |\nabla\varphi|\ \frac{1}{\varphi^2}\ \mathbb{1}_{|\varphi| > \frac{1}{3M}}$$

we get $\varphi_M \in H^1_{loc}$, $\varphi \in H^1_{loc}$, $\varphi_M\nabla\varphi \in L^2_{loc}(dx)$ since φ_M is bounded, and $\varphi\nabla\varphi_M \in L^2_{loc}(dx)$ since

$$|\varphi\nabla\varphi_M| \leq |\nabla\varphi|\ \frac{1}{\varphi}\ \mathbb{1}_{|\varphi| > \frac{1}{3M}} \leq 3M|\nabla\varphi|$$

So according to corollary 3.2.6ii in the classical case

$$\varphi\ \varphi_M \in H^1_{loc} \quad \text{and} \quad \nabla(\varphi\ \varphi_M) = \varphi_M\nabla\varphi - \frac{\nabla\varphi}{\varphi}\ \psi'_M(\frac{1}{\varphi}) \tag{3.2.20}$$

where by convention $\dfrac{\nabla\varphi}{\varphi} = 0$ when $\varphi = 0$. But again

- φ and $\varphi\ \varphi_M$ are in H^1_{loc}
- $\varphi\ \varphi_M\nabla\varphi \in L^2_{loc}(dx)$ since $|\varphi\ \varphi_M| \leq \dfrac{M+1}{M}$ (hence bounded)
- $\varphi\nabla(\varphi\ \varphi_M) \in L^2_{loc}(dx)$ since $\varphi\nabla(\varphi\ \varphi_M) = \varphi\ \varphi_M\nabla\varphi - \nabla\varphi\psi'_M(\dfrac{1}{\varphi})$ and both terms are in $L^2_{loc}(dx)$

It follows that

$$\varphi^2\ \varphi_M \in H^1_{loc} \text{ and } \nabla(\varphi^2\ \varphi_M) = 2\ \varphi\ \varphi_M\nabla\varphi - \nabla\varphi\ \psi'_M(\frac{1}{\varphi})$$

In particular we can use the integration by parts formula (3.2.2) to get

$$\forall g \in \mathcal{C}_c^\infty \quad \int \nabla_i g\ \varphi_M\ \varphi^2\ dx = -2\int g\ \varphi_M\ \frac{\nabla_i\varphi}{\varphi}\ \varphi^2\ dx + \int g\ \frac{\nabla_i\varphi}{\varphi^2}\ \psi'_M(\frac{1}{\varphi})\ \varphi^2\ dx$$

In addition $\nabla\varphi_M \in L^2_{loc}(dx)$ since $|\varphi\nabla\varphi_M| \leq 3M|\nabla\varphi| \in L^2_{loc}(dx)$.
It follows

$$\varphi_M \in H^1_{loc}(\varphi^2 dx) \quad \text{and} \quad \overline{\nabla}\varphi_M = -\nabla\varphi_M = \frac{\nabla\varphi}{\varphi^2}\,\psi'_M(\frac{1}{\varphi}) \tag{3.2.21}$$

Though we did not define the local space $H^1_{loc}(\varphi^2 dx)$, the above sentence is clear. Thanks to (3.2.21) and corollary 3.2.6*ii* again, we have

- $\varphi_M \in H^1_{loc}(\varphi^2 dx)$, $f \in H^1(\varphi^2 dx)$ and is compactly supported
- $f\overline{\nabla}\varphi_M \in L^2(\varphi^2 dx)$ since f is bounded with compact support
- $\varphi_M\overline{\nabla}f \in L^2(\varphi^2 dx)$ since φ_M is bounded

So $f\varphi_M \in H^1(\varphi^2 dx)$ and $\overline{\nabla}(f\varphi_M) = \varphi_M\overline{\nabla}f + f\overline{\nabla}\varphi_M$. We thus may apply (3.2.8), which yields for $i \in \{1,\ldots,d\}$ and $g \in \mathcal{C}^\infty_c$

$$\begin{aligned} &\int \overline{\nabla}_i f\ g\ \varphi_M\ \varphi^2\ dx - \int f\ g\ \frac{\nabla_i\varphi}{\varphi^2}\ \psi'_M(\frac{1}{\varphi})\ \varphi^2\ dx \\ &= -\int f\ \varphi_M\ \nabla_i g\ \varphi^2\ dx - 2\int f\ g\ \varphi_M\ \frac{\nabla_i\varphi}{\varphi}\ \varphi^2\ dx \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Now let M go to infinity. We can pass to the limit in (3.2.22) thanks to the following facts

- φ_M converges dx-a.e. to $\frac{1}{\varphi}\ 1\!\!1_{\varphi\neq 0}$ and $\psi'_M(\frac{1}{\varphi})$ converges dx-a.e. to 1
- $|\varphi\ \varphi_M| \leq \dfrac{M+1}{M} \leq 2$
  so that $|\overline{\nabla}_i f\ g\ \varphi_M\ \varphi^2| \leq 2\ |\varphi\ \overline{\nabla}_i f|\ \|g\|_\infty 1\!\!1_{\text{supp } g} \in L^1(dx)$
- $|f\ g\ \nabla_i\varphi\ \psi'_M(\frac{1}{\varphi})| \leq |f\ \nabla_i\varphi|\ \|g\|_\infty 1\!\!1_{\text{supp } g} \in L^1(dx)$
- $|f\ \varphi_M\ \nabla_i g\ \varphi^2 \leq 2\ |f\ \varphi|\ \|\nabla_i g\|_\infty 1\!\!1_{\text{supp } g} \in L^1(dx)$
- $|f\ g\ \varphi_M\ \varphi\ \nabla_i\varphi| \leq 2\ |f\ \nabla_i\varphi|\ \|g\|_\infty 1\!\!1_{\text{supp } g} \in L^1(dx)$

The formula obtained by the limiting procedure is exactly lemma 3.2.9
∎

Remark 3.2.11 : The previous proof, though technical and perhaps a little bit tedious, is purely analytic and elementary. It should be underlined that the proofs in [RZ94] or in [Son94b] required more sophisticated material and a touch of Probability theory in both cases.

Theorem 3.2.7 tells that $(\mathcal{E}_\varphi, H^1(\varphi^2 dx))$ is the minimal closed extension of $(\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$. According to [AKR90] and [Tak92], it is also the maximal closed extension, hence the unique closed markovian extension, i.e. Markov uniqueness holds, provided $\varphi \in H^1_{loc}$ and $\varphi \neq 0$ dx-a.e. , or $\varphi \in H^1$. Another consequence is that $(\mathcal{E}_\varphi, H^1(\varphi^2 dx))$ is regular (i.e. $\mathcal{C}_c \cap H^1(\varphi^2 dx)$ is a core for the form), thus associated with a Hunt process, which is actually a diffusion process since $(\mathcal{E}_\varphi, H^1(\varphi^2 dx))$ is local. Let we recall some basic facts concerning these points.

There exists an unique $L^2(\varphi^2 dx)$ strongly continuous symmetric sub-markovian semi-group $(T_t^\varphi)_{t\geq 0}$ associated with $(\mathcal{E}_\varphi, H^1(\varphi^2 dx))$, i.e. if A_φ denotes the generator of $(T_t^\varphi)_{t\geq 0}$:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A_\varphi) \subset H^1(\varphi^2 dx) \\ \forall f \in \mathcal{D}(A_\varphi) \quad \forall g \in H^1(\varphi^2 dx) \quad \mathcal{E}_\varphi(f,g) = -\int A_\varphi f \; g \; \varphi^2 \; dx \end{cases}$$

Since $\varphi \in H^1_{loc}$ it is easy to see that A_φ coïncide on $\mathcal{C}_c^\infty$ with the partial differential operator S_φ

$$S_\varphi = \frac{1}{2}\Delta + \frac{\nabla\varphi}{\varphi}.\nabla$$

Actually $\varphi \in H^1_{loc}$ is a necessary and sufficient condition for $\mathcal{C}_c^\infty \subset L^2(\varphi^2 dx)$ and $S_\varphi(\mathcal{C}_c^\infty) \subset L^2(\varphi^2 dx)$ (see [RZ92]).

According to the properties of the form described above, there exists a $\varphi^2 dx$-symmetric Hunt process with (a.s.) continuous paths (i.e. a diffusion process) associated with $(T_t^\varphi)_{t\geq 0}$. If we denote by $(\Omega, \mathcal{F}_t, X_t, (P_x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ the canonical realization of this process (with usual conditions), standard arguments show that there exists a $\varphi^2 dx$-negligible set $\mathcal{N}$ such that for all $x \notin \mathcal{N}$ and all $f \in \mathcal{C}_c^\infty$

$$t \longrightarrow f(X_t) - f(X_o) - \int_o^t A_\varphi f(X_s) \; ds$$

is an $\mathcal{F}_t$ martingale under P_x, i.e. for $\varphi^2 dx$-almost all x, P_x is a solution to the martingale problem $\mathcal{M}(S_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$ (we follow the notations of [Jac79]) starting from x (or δ_x).

A consequence of Markov uniqueness is that two (markovian) solutions of $\mathcal{M}(S_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$ are equivalent, i.e. their transition functions coïncide out of a set of capacity zero (for all this see [RZ92] §6 and [Fuk80]). Furthermore, Albeverio, Röckner and Zhang proved in [ARZ93a] that $(P_x)_x$ is obtained by means of a Cameron-Martin-Girsanov-Maruyama transform, by using Fukushima's stochastic calculus.

A natural question to ask is thus the following : is it possible to prove (at least the major part of) the results of this section, by purely probabilistic methods ? The answer to this question is the aim of the next sections.

3.3 Singular diffusion processes via relative entropy

Because probabilists prefer to deal with Probability measures, we will assume in this section that

$$\varphi \in H^1 \quad \text{and} \quad \int \varphi^2 \; dx = 1 \tag{3.3.1}$$

The passage to a local condition will be done later on.

We consider the operator S_φ defined on $\mathcal{C}_c^\infty$ by

$$S_\varphi = \frac{1}{2}\Delta + \frac{\nabla\varphi}{\varphi}.\nabla \tag{3.3.2}$$

and shall study the martingale problem $\mathcal{M}(S_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$ starting from $\varphi^2 dx$. From the stochastic calculus viewpoint, the difficulty lies in the fact that $\dfrac{\nabla\varphi}{\varphi}$ can be a very irregular drift, out of reach of standard result such as Novikov or Kazamaki criteria. But if we remark that

$$\int \left|\frac{\nabla\varphi}{\varphi}\right|^2 \varphi^2\, dx < +\infty \tag{3.3.3}$$

(letting $\dfrac{\nabla\varphi}{\varphi} := 0$ on $\{\varphi = 0\}$) hypothesis 3.3.1 becomes a "finite energy condition" familiar to specialists of Nelson's stochastic mechanics, and actually almost all problems have already been solved by "entropic methods". Let we first recall the definition of relative entropy (or Kullback information).

Definition 3.3.1 *Let P and Q be two probability measures on the same space. The relative entropy of Q with respect to P, denoted by $H(Q,P)$, is*

$$\begin{cases} H(Q,P) = \int Z \ln Z\, dP & \textit{if } Q << P, \quad Z = \dfrac{dQ}{dP} \quad \textit{and} \quad Z\ln Z \in L^1(P) \\ H(Q,P) = +\infty & \textit{otherwise} \end{cases}$$

Our framework in this section will be the following :

- $\Omega = \mathcal{C}^o([0,T], \mathrm{IR}^d)$ (for $T > 0$) is the Wiener space, equipped with its usual structure $(\Omega, X_t, \mathcal{F}_t)$.
- if μ is a probability measure on IR^d, W_μ denotes the Wiener measure such that $W_\mu \circ X_o^{-1} = \mu$. When $\mu = \varphi^2 dx$ we write W_φ instead of $W_{\varphi^2 dx}$.
- usual universal completions and right modifications are assumed.

In the sequel the following stopping times will be very important :

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 \quad / \quad \int_o^t \left|\frac{\nabla\varphi}{\varphi}\right|^2 (X_s)\, ds \geq n\} \quad , \quad \tau = \sup_n \tau_n \tag{3.3.4}$$

The first result we state is an existence theorem due to Carlen [Car84] (also see [FT84], [Car85], [MZ85], [Zhe85] and many others), and recently extended in [CL94], [CL95a], and [CL95b] to more general contexts. The precise statement below is a consequence of [CL94].

Theorem 3.3.2 *The process $Z_t^\varphi = \exp(\int_o^{t\wedge\tau} \frac{\nabla\varphi}{\varphi}(X_s).dX_s - \frac{1}{2}\int_o^{t\wedge\tau} \left|\frac{\nabla\varphi}{\varphi}(X_s)\right|^2 ds)$ is a $\mathcal{F}_t$, W_φ martingale, and the probability measure $Q_\varphi = Z_T^\varphi W_\varphi$ satisfies*

i. Q_φ *is stationary i.e.* $Q_\varphi \circ X_t^{-1} = \varphi^2\, dx \quad \forall t \in [0,T]$

ii. $H(Q_\varphi, W_\varphi) = \dfrac{1}{2} E^{Q_\varphi}\left[\int_o^T \left|\dfrac{\nabla\varphi}{\varphi}(X_s)\right|^2 ds\right] = \dfrac{T}{2}\int |\nabla\varphi|^2\, dx < +\infty$

iii. Q_φ *is a solution to* $\mathcal{M}(S_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$

iv. Q_φ *is a strongly markovian probability measure.*

Indeed, to apply [CL94], the only point to be checked is that $\varphi^2 dx$ satisfies the weak stationary Fokker Planck equation

$$S_\varphi{}^*\nu = 0$$

which is immediate.

The other point to be precised is the meaning of *iii.* We shall say that Q satisfies the martingale problem $\mathcal{M}(S_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$ if for all $f \in \mathcal{C}_c^\infty$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \left(\frac{\nabla\varphi}{\varphi}.\nabla f\right)(X_s)\, ds \text{ is } Q \text{ a. s. finite} \\ \displaystyle C_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_o^t (S_\varphi f)(X_s)\, ds \text{ is a } Q \text{ (continuous) local martingale} \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Since $\mathcal{C}_c^\infty$ is an algebra, it follows (see [Jac79] 13.42 or [DM87]) that $\left\langle C^f \right\rangle_t = \int_o^t \Gamma(f)(X_s)\, ds$, where $\Gamma(f) = S_\varphi\ f^2 - 2fS_\varphi f = |\nabla f|^2$, i. e. the local characteristics of $f(X_t)$, (which is a semi-martingale) are known. Now standard Girsanov theory tells us that Q_φ is a solution to $\mathcal{M}(S_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$ with $\tau_n \wedge \inf\{t \geq 0 \ \ / \ \ |X_t| \geq n\}$ as a localizing sequence of stopping times.

The next result is an uniqueness theorem, which is a consequence of th 12.57(a) in [Jac79], according to the preceding discussion.

Theorem 3.3.3 *Let* Q *be a solution of* $\mathcal{M}(S_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$ *such that* $Q \circ X_o^{-1} = \varphi^2\ dx$. *If* $Q(\tau < +\infty) = 0$ *then* $Q = Q_\varphi$.

In particular, Q_φ *is the only stationary solution of* $\mathcal{M}(S_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$ *such that* $Q \circ X_o^{-1} = \varphi^2\ dx$.

Remark 3.3.4 : Actually, th 12.57 in [Jac79] is proved for a martingale problem involving a finite number of test functions (or more general processes) . It is easy to see that everything is preserved for a countable set of test functions approximating the coordinates functions so that theorem 3.3.3 holds.

Let we return for a moment to the Dirichlet form $(\mathcal{E}_\varphi, H_o^1(\varphi))$ which is regular and local. According to [Fuk80] chap 6, it is thus associated to a $\varphi^2 dx$-symmetric diffusion process Q_φ^o, which is in particular a stationary solution of $\mathcal{M}(S_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$ as above.

Consequently, $Q_\varphi^o = Q_\varphi$ and Q_φ is thus $\varphi^2 dx$-symmetric. But as we said before, theorems 3.3.2 and 3.3.3 can be considerably improved, including cases where Fukushima's theory is no more valid. It is thus interesting to get a direct proof of the symmetry of Q_φ. Here again one can use "entropic" arguments, due to H.Föllmer [Föl84].

Indeed, let r denote the time reversal operator

$$\begin{array}{rccl} r: & \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ & X & \longrightarrow & (t \to X_{T-t}) \end{array} \tag{3.3.6}$$

Relative entropy is preserved by r, i.e. $H(Q_\varphi \circ r^{-1}, W_\varphi \circ r^{-1}) = H(Q_\varphi, W_\varphi)$ and it follows that $Q_\varphi \circ r^{-1}$ has finite relative entropy with respect to W_{φ_T} (where $\varphi_T = W_\varphi \circ X_T^{-1}$) up to any time $t < T$. Furthermore, the "dual" drift $\hat{B}(t,x)$ (we are in the markovian case) satisfies the duality equation (see [Föl88] 2.13)

$$\hat{B}(t,x) + \frac{\nabla\varphi}{\varphi}(x) = \nabla(\ln\varphi^2)(x) = 2\frac{\nabla\varphi}{\varphi}(x) \tag{3.3.7}$$

Hence $\hat{B} = \dfrac{\nabla\varphi}{\varphi}$, so that $Q_\varphi \circ r^{-1}$ is again a solution of $\mathcal{M}(S_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty)$ which is $\varphi^2 dx$-stationary. It follows that $Q_\varphi \circ r^{-1} = Q_\varphi$, i.e. Q_φ is $\varphi^2 dx$-symmetric.

But one can obtain another very nice property of Q_φ, stated in the next

Theorem 3.3.5 *Let $\mathcal{A}_{\varphi,H}$ denote the set of Q probability measure on Ω such that $Q \circ X_t^{-1} = \varphi^2 dx$ for all $t \in [0,T]$ and $H(Q, W_\varphi) < +\infty$. Then*

i. Q_φ is the unique markovian $\varphi^2 dx$-symmetric element of $\mathcal{A}_{\varphi,H}$.

ii. Furthermore, if $\int (\ln|\varphi|)\ \varphi^2\ dx < +\infty$ then

$$H(Q_\varphi, W_\varphi) = \inf_{Q \in \mathcal{A}_{\varphi,H}} H(Q, W_\varphi)$$

Before we proceed with the proof, let we recall the following properties of $\mathcal{A}_{\varphi,H}$ which are obtained in [CL94] (in particular th 5.3)

Proposition 3.3.6

i. There exist an unique $Q_\varphi^* \in \mathcal{A}_{\varphi,H}$ such that $H(Q_\varphi^*, W_\varphi) = \inf_{Q \in \mathcal{A}_{\varphi,H}} H(Q, W_\varphi)$

ii. Any markovian element of $\mathcal{A}_{\varphi,H}$ is a solution to a martingale problem $\mathcal{M}(S_{\varphi,B}, \mathcal{C}_c^\infty)$ where $S_{\varphi,B} = \frac{1}{2}\Delta + B.\nabla$ and $B \in L^2(\varphi^2 dx)$.

iii. Conversely, for any $B \in L^2(\varphi^2 dx)$ such that $S_{\varphi,B}^*(\varphi^2 dx) = 0$, the measure Q_B defined by $Q_B = Z_T^B\ W_\varphi$ where

$$\begin{cases} Z_T^B = \exp\left(\int_0^{t\wedge\tau_B} B(X_s).dX_s - \dfrac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_B} |B|^2(X_s)\ ds\right) \\ \tau_B = \inf\{t \geq 0 \quad / \quad \int_0^t |B|^2(X_s)\ ds = +\infty\} \end{cases}$$

is an element of $\mathcal{A}_{\varphi,H}$.

iv. Q_φ^* is markovian and its drift B_φ^* defined in ii. belongs to the $L^2(\varphi^2 dx)$ closure of the set $\{\nabla f\ ,\ f \in \mathcal{C}_c^\infty\}$, denoted by $H_o^{-1}(\varphi)$.

v. The set $\{B \in L^2(\varphi^2 dx)\ /\ S_{\varphi,B}^*(\varphi^2 dx) = 0\}$ is the affine space $B_\varphi^* + (H_o^{-1}(\varphi))^\perp$, where $\perp$ stands for the orthogonality in $L^2(\varphi^2 dx)$.

We shall use part of this proposition in the proof of theorem 3.3.5.

Proof of theorem 3.3.5 :

i. We shall show that Q_φ is the unique markovian φ^2dx-symmetric element of $\mathcal{A}_{\varphi,H}$. Let Q be such an element. It is immediate that the associated $S_{\varphi,B}$ is φ^2dx-symmetric, by using the martingale problem. Since S_φ is also φ^2dx-symmetric, we get by elementary computations

$$\forall f,g \in \mathcal{C}_c^\infty \quad \int (g\nabla f - f\nabla g).(B - \frac{\nabla\varphi}{\varphi})\ \varphi^2\ dx = 0$$

But $g\nabla f - f\nabla g = \nabla(gf) - 2f\nabla g$ and $\int \nabla(gf).(B - \frac{\nabla\varphi}{\varphi})\ \varphi^2\ dx = 0$ according to proposition 3.3.6v, so that $\int f\nabla g.(B - \frac{\nabla\varphi}{\varphi})\ \varphi^2\ dx = 0$.

If we choose $g = \psi_M$ as in the proof of lemma 3.2.9, and pass to the limit, we get $B = \frac{\nabla\varphi}{\varphi}$. The results follows from the uniqueness theorem 3.3.3

ii. The definition 3.3.1 can be extended to positive measures (not necessarily bounded), and in particular if $\left|\int (\ln|\varphi|)\ \varphi^2\ dx\right| < +\infty$, one has for $Q \in \mathcal{A}_{\varphi,H}$

$$-\infty < H(Q, W_{dx}) = H(Q, W_\varphi) - H(\varphi^2dx, dx) < +\infty$$

Furthermore

$$H(Q^*_\varphi, W_{dx}) = \inf_{Q\in\mathcal{A}_{\varphi,H}} H(Q, W_{dx}) \tag{3.3.8}$$

But here again H is time reversal invariant and so

$$H(Q^*_\varphi, W_{dx}) = H(Q^*_\varphi \circ r^{-1}, W_{dx} \circ r^{-1}) = H(Q^*_\varphi \circ r^{-1}, W_{dx})$$

since W_{dx} is dx-symmetric. So $Q^*_\varphi \circ r^{-1} \in \mathcal{A}_{\varphi,H}$ and realizes the infimum in (3.3.8), hence $Q^*_\varphi \circ r^{-1} = Q^*_\varphi$. The result follows from the first part of the theorem. ∎

Remark 3.3.7 :

i. According to proposition 3.3.6v, we could prove that Q_φ is the minimizing measure in $\mathcal{A}_{\varphi,H}$ for relative entropy if we would be able to show directly that $\frac{\nabla\varphi}{\varphi}$ belongs to $H_o^{-1}(\varphi)$. Notice that this result follows from theorem 3.2.7 under the assumption $\ln|\varphi| \in L^2(\varphi^2dx)$ (see [BR94b] th 2.8 and section 3.6 of the present paper).

ii. Notice that hypothesis $\int (\ln|\varphi|)\, \varphi^2\, dx < +\infty$ is satisfied when $\int |x|^2\, \varphi^2\, dx < +\infty$, i.e. X_o has a second order moment. Indeed if $\int |x|^2\, \varphi^2\, dx < +\infty$, one can use the Gross Log-Sobolev inequality for the Gaussian law $d\nu$ (see [Gro93])

$$-\infty < \int f^2\, \ln|f|\, d\nu \leq \int |\nabla f|^2\, d\nu + \|f\|^2_{L^2(d\nu)} \ln \|f\|_{L^2(d\nu)}$$

with $f = \varphi\, \exp \frac{|x|^2}{4}$. Elementary computations lead to

$$-\infty < \int \varphi^2\, \ln|\varphi|\, dx \leq \int |\nabla\varphi|^2\, dx + C^{ste} < +\infty$$

If $\int |x|^2\, \varphi^2\, dx < +\infty$, the derivation of the previous section can also be obtained by replacing the Wiener measure by the Ornstein-Uhlenbeck one which in this case is more natural.

iii. Of course, the previous two remarks can be completed in the $\mathbb{R}^d$ framework. Indeed, according to the well known Sobolev embedding theorem (see [Ada75] chap 5)

- if $d = 1$, $\quad \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$
- if $d = 2$, $\quad \varphi \in L^q(\mathbb{R}^2)$ for all $q \geq 2$
- if $d \geq 3$, $\quad \varphi \in L^q(\mathbb{R}^2)$ for all q such that $2 \leq q \leq \frac{2d}{d-2}$

So $\int |\ \ln|\varphi|\ |\ \mathbb{1}_{|\varphi|>1}\, \varphi^2\, dx < +\infty$.

The main problem is of course the behavior of φ in a neighborhood of $\{\varphi = 0\}$. In particular if $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ for some $p' < 2$, we also have

$$\int |\ \ln|\varphi|\ |\ \mathbb{1}_{|\varphi|\leq 1}\, \varphi^2\, dx < +\infty$$

This holds in particular if φ is compactly supported. In this case however, φ also satisfied the condition $\int |x|^2\, \varphi^2\, dx < +\infty$ in *ii.* which can be used in an infinite dimensional framework.

We shall return to these problems in section 3.6.

3.4 Singular diffusion processes : Markov kernels and decompositions

In this section again we assume that

$$\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad \int \varphi^2\, dx = 1 \qquad (\ 3.3.1\ )$$

and we put $\dfrac{\nabla\varphi}{\varphi}(x) = 0$ on $\{\varphi = 0\}$.

We will first build a nice version of φ.

Indeed, it is well known that we can choose a version of φ which is finely continuous outside a polar Brownian set $\mathcal{N}_1$, or equivalently (see [Fuk80]) which is quasi-continuous for the usual (Newtonian) 1-capacity associated to the form $(\mathcal{E}, H^1)$. Such a version is called " précisée" in [MZ85]. But we need to modify again this version. First of all, we modify φ by choosing $\varphi(x) = 0$ on $\mathcal{N}_1$. Now denote by $\mathcal{N}$ the (nodal) set $\{\varphi = 0\}$ (in particular, $\mathcal{N} \supset \mathcal{N}_1$). It is known (see e.g. [BG68] th II4.8) that

$$t \longrightarrow \varphi(X_t) \text{ is } W_\mu\text{-a.s. right continuous for all } \mu \text{ such that } \mu(\mathcal{N}_1) = 0 \tag{3.4.1}$$

It immediately follows that if $x \in \mathcal{N}^r$ (the set of regular points of $\mathcal{N}$) and $x \notin \mathcal{N}_1$, then $\varphi(x) = 0$. Hence $\mathcal{N}^r \subset \mathcal{N}$, i.e. $\mathcal{N}$ is finely closed, for the Brownian fine topology. But this version is not nice enough.

We next introduce as in (3.3.4)

$$\begin{aligned} \tau_k &= \inf\left\{ t \geq 0 \quad / \quad \int_o^t \left|\frac{\nabla\varphi}{\varphi}\right|^2 (X_s)\, ds \geq k \right\} \\ \tau &= \inf\left\{ t \geq 0 \quad / \quad \int_o^t \left|\frac{\nabla\varphi}{\varphi}\right|^2 (X_s)\, ds = +\infty \right\} \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

and the following two $(\mathcal{F}_t, W_x)$ supermartingales

$$\left\{ \begin{aligned} Z_t^\varphi &= \exp\left(\int_o^{t\wedge\tau} \frac{\nabla\varphi}{\varphi}(X_s).dX_s - \frac{1}{2}\int_o^{t\wedge\tau} \left|\frac{\nabla\varphi}{\varphi}(X_s)\right|^2\, ds \right) \\ \overline{Z}_t^\varphi &= \exp\left(\int_o^{t} \frac{\nabla\varphi}{\varphi}(X_s).dX_s - \frac{1}{2}\int_o^{t} \left|\frac{\nabla\varphi}{\varphi}(X_s)\right|^2\, ds \right) 1\!\!1_{t<\tau} \end{aligned} \right. \tag{3.4.3}$$

It is clear that both Z^φ and $\overline{Z}^\varphi$ are (a.s.) right continuous and that $\overline{Z}^\varphi \leq Z^\varphi$. Moreover (see [CL94] and its correction) :

Proposition 3.4.1

i. Z^φ *is a.s. continuous,* Z^φ *and* $\overline{Z}^\varphi$ *only differ on the set*

$$\{(t,\omega) \quad / \quad t \geq \tau(\omega) \text{ and } \omega \in \cup_{k\geq 1}\{\tau = \tau_k\}\}$$

The only possible discontinuities of $\overline{Z}^\varphi$ *are for* $t = \tau(\omega)$ *and* $\omega \in \cup_{k\geq 1}\{\tau = \tau_k\}$.

ii. $\overline{Z}^\varphi$ *is a strong multiplicative functional, while in general* Z^φ *is not.*

iii. $W_\varphi(\cup_{k\geq 1}\{\tau = \tau_k\}) = 0$*, hence* Z^φ *and* $\overline{Z}^\varphi$ *coïncide* W_φ*-a.s., and are actually* $(\mathcal{F}_t, W_\varphi)$ *martingales (recall th 3.3.2)*

In the sequel, we denote by $\mathcal{N}'$ the subset of $\mathbb{R}^d$ such that

$$\mathbb{R}^d - \mathcal{N}' = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ / \ \begin{array}{c} Z^\varphi \text{ is a } (\mathcal{F}_t, W_x) \text{ martingale (i.e. } E^{W_x}(Z_T^\varphi) = 1) \\ \text{and } W_x(\cup_{k \geq 1}\{\tau = \tau_k\}) = 0 (\text{ i.e. } Z^\varphi = \overline{Z}^\varphi \quad W_x\text{-p.s.}) \end{array} \right\} \quad (3.4.4)$$

(recall that we are working on $\Omega = \mathcal{C}^o([0,T], \mathbb{R}^d)$ i.e. we define $X_t = X_T$ for $t \geq T$) Since $x \longrightarrow W_x$ is measurable, $\mathcal{N}'$ is a Borel set. So according to th I.10.19 of [BG68] one can find an increasing sequence of compact subsets K_n of $\mathcal{N}'$ such that $T_{K_n} \searrow T_{\mathcal{N}'}$ where T_A is the hitting time of A. Applying the strong Markov property of W_x with stopping time T_{K_n}, and Lebesgue's bounded convergence theorem, it is not difficult to check that $\mathcal{N}'$ is finely closed (for the Brownian fine topology). Furthermore, $\mathcal{N}'$ is $\varphi^2 dx$-negligible thanks to proposition 3.4.1*iii*. Finally, define

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_n = \inf\{t \geq 0 \ / \ \varphi(X_t) \notin [\frac{1}{n}, n]\} \\ \sigma = \sup_n \sigma_n \\ \sigma' = \sigma \wedge \inf\{t \geq 0 \ / \ X_t \in \mathcal{N}'\} \end{array} \right. \quad (3.4.5)$$

and

$$\left\{ \begin{array}{lll} Q_x = Z_T^\varphi \, W_x & \text{if} & x \notin \mathcal{N} \cup \mathcal{N}' \\ Q_x = \delta_{\{x\}} & \text{if} & x \in \mathcal{N} \cup \mathcal{N}' \end{array} \right. \quad (3.4.6)$$

where $\delta_{\{x\}}$ is the Dirac mass on the constant path $X_t = x \ \ \forall t \in [0,T]$. Our first result is

Theorem 3.4.2

i. $\forall x \notin \mathcal{N} \cup \mathcal{N}' \quad Q_x(\sigma' < +\infty) = 0$

ii. $(Q_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ *is a strong Markov family of probability measures, such that* $Q_\varphi = \int Q_x \, \varphi^2 \, dx.$

In particular we can modify φ by putting $\varphi(x) = 0$ for $x \in \mathcal{N}'$ without changing Q_x. The above theorem provides a nice realization of the disintegration of Q_φ, i.e. if we choose the good φ, the nodal set $\mathcal{N}$ cannot be reached (except if one starts from a nodal point), and outside of $\mathcal{N}$ Q_x has the good Girsanov density.

Proof of theorem 3.4.2 :

Since $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$ is $\varphi^2 dx$-negligible, the equality $Q_\varphi = \int Q_x \, \varphi^2 \, dx$ is immediate. Indeed, Q_x satisfies the martingale problem $\mathcal{M}(\mathcal{C}_c^\infty, S_\varphi)$ for $x \notin \mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$ and so does $\int Q_x \, \varphi^2 \, dx$. Furthermore, $Q_x(\tau < +\infty) = 0$ for $x \notin \mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$, and we may apply theorem 3.3.3. In order to prove the rest of the theorem, we first prove

Proposition 3.4.3 $Q_\varphi(\sigma < +\infty) = 0$

This proposition is actually proved in [MZ85], and is the main ingredient in the proof of the existence by the authors. We shall however briefly give a proof, which is a slight modification of the one in [MZ85].

Proof: For $\varepsilon > 0$, the function $\varphi_\varepsilon = (\varphi \vee \varepsilon) \wedge \frac{1}{\varepsilon} \in H^1_{loc}$, $\nabla\varphi_\varepsilon \in L^2(dx)$ and one can find smooth functions φ^k_ε such that $\varepsilon \le \varphi^k_\varepsilon \le \frac{1}{\varepsilon}$ and which approximate φ_ε in H^1_{loc} and in $L^2(dx)$ for the gradient. We may apply Ito formula to $\ln\varphi^k_\varepsilon$ in both time directions, and sum up the two resulting equalities in order to get for all x :

$$2\ (\ln\varphi^k_\varepsilon(X_t) - \ln\varphi^k_\varepsilon(X_o)) = K^{k,\varepsilon}_t + K^{k,\varepsilon}_{T-t}\circ r - K^{k,\varepsilon}_T \circ r$$

where

$$K^{k,\varepsilon}_t = \int_o^t \frac{\nabla\varphi^k_\varepsilon}{\varphi^k_\varepsilon}(X_s).dX_s \quad W_x - a.s.$$

and r denotes again the time reversal operator. By Fubini's theorem, the same equality holds W_{dx}-a.s. But since φ^k_ε is bounded from below by ε, and from above by $\dfrac{1}{\varepsilon}$, it is easily seen that

$$\sup_{0\le t\le T} |K^{k,\varepsilon}_t - K^\varepsilon_t| \text{ converges to } 0 \text{ in } L^2(W_{dx})$$

where

$$K^\varepsilon_t = \int_o^t \frac{\nabla\varphi_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon}(X_s).dX_s$$

By taking, if necessary, a subsequence, we thus have

$$2\ (\ln\varphi_\varepsilon(X_t) - \ln\varphi_\varepsilon(X_o)) = K^\varepsilon_t + K^\varepsilon_{T-t}\circ r - K^\varepsilon_T\circ r \quad W_{dx} - a.s.$$

Since $Q_\varphi << W_\varphi << W_{dx}$ the same equality holds Q_φ a.s., but now K^ε_t is a Q_φ semi-martingale which decomposition is given by Girsanov's theory, and applying Doob's inequality and time reversibility of Q_φ, we obtain

$$\begin{aligned} & Q_\varphi\left(\sup_{0\le t\le T} |\ln\varphi_\varepsilon(X_t) - \ln\varphi_\varepsilon(X_o)| > \lambda\right) \\ \le\ & 2Q_\varphi\left(\sup_{0\le t\le T} |K^\varepsilon_t| > \frac{\lambda}{2}\right) \\ \le\ & C^{ste}\frac{T}{\lambda}\left(\int_0^t \left|\frac{\nabla\varphi_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon}\right|\varphi^2\ dx + \int_0^t \left|\frac{\nabla\varphi_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon} - \frac{\nabla\varphi}{\varphi}\right|\varphi^2\ dx\right)\end{aligned}$$

But $\nabla\varphi_\varepsilon = \nabla\varphi\mathbb{I}_{\varepsilon\le\varphi\le\frac{1}{\varepsilon}}$, hence using Cauchy-Schwarz inequality

$$Q_\varphi\left(\sup_{0\le t\le T} |\ln\varphi_\varepsilon(X_t) - \ln\varphi_\varepsilon(X_o)| > \lambda\right) \le C^{ste}\frac{T}{\lambda}\int |\nabla\varphi|^2\ dx$$

It follows that for all $a > 0$ and all n big enough

$$Q_\varphi(\frac{1}{a} > \varphi(X_o) > a\ ,\ \sigma_n < T) \le \frac{C(T)}{\ln(an)}\int |\nabla\varphi|^2\ dx$$

Thus by taking limits, first in n, then in a (since $\varphi^2 dx$ is supported by $\{\varphi > 0\}$) proposition 3.4.3 is proved.

∎

Proposition 3.4.3 implies that for $\varphi^2 dx$-almost all x, $Q_x(\sigma < +\infty) = 0$. We want more, since we want that $Q_x(\sigma' < +\infty) = 0$ for the x's which do not belong to $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$. To this end, first remark that

$$\text{if } x \notin \mathcal{N} \cup \mathcal{N}', \quad \inf\{t \geq 0 \ / \ X_t \in \mathcal{N}'\} = +\infty \quad Q_x - a.s.$$

which is an immediate consequence of the strong Markov property of W_x, since $\mathcal{N}'$ is finely closed. Since $Q_x << W_x$ for these x's, we only have to prove that

$$\text{if } x \notin \mathcal{N} \cup \mathcal{N}', \quad Q_x(\sigma < +\infty) = 0$$

Assume that $Q_x(\sigma < +\infty) = \alpha > 0$, which is equivalent to $Q_x(\sigma \wedge \tau < +\infty) = \alpha > 0$ since $\tau = +\infty$ $Q_x - a.s.$ according to (3.4.4). We can then find $t_o > 0$ and $n \in \mathbb{N}^*$ such that for all $t \leq t_o$

$$Q_x(t < \sigma_n \wedge \tau_n < \sigma \wedge \tau < +\infty) \geq \frac{\alpha}{2} > 0 \tag{3.4.7}$$

Indeed, thanks to (3.4.4), $\tau > \tau_n$ and $\tau > 0$ $Q_x - a.s.$, and thanks to (3.3.4) $\sigma > \sigma_n > 0$ (for n large enough). Then we apply the multiplicativity of $\overline{Z}^{\varphi}$.

$$\begin{aligned}
& Q_x(t < \sigma_n \wedge \tau_n < \sigma \wedge \tau < +\infty) \\
&= \int \mathbb{I}_{t<\sigma_n\wedge\tau_n\wedge T}\ \overline{Z}^{\varphi}_t\ \overline{Z}^{\varphi}_{(\sigma\wedge\tau)-t}(\theta_t(\omega))\ \mathbb{I}_{\sigma\wedge\tau<+\infty}(\theta_t(\omega))\ dW_x \\
&= \int \mathbb{I}_{t<\sigma_n\wedge\tau_n\wedge T}\ \overline{Z}^{\varphi}_t\ \left(\int \overline{Z}^{\varphi}_{(\sigma\wedge\tau)-t}(\omega')\ \mathbb{I}_{\sigma\wedge\tau<+\infty}(\omega')\ dW_{X_t(\omega)}(\omega')\right)\ dW_x(\omega) \\
&\leq \int \mathbb{I}_{t<\sigma_n\wedge\tau_n\wedge T}\ h(X_t)\ \overline{Z}^{\varphi}_{\sigma_n\wedge\tau_n}\ dW_x \\
&\qquad \text{where } h(x) = \int \overline{Z}^{\varphi}_{(\sigma\wedge\tau)-t}(\omega')\ \mathbb{I}_{\sigma\wedge\tau<+\infty}(\omega')\ dW_x(\omega') \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} h(y)\ p^n_t(x,y)\ dy
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

where $p^n_t(x,\cdot)$ is the density of $(\overline{Z}^{\varphi}_{\sigma\wedge\tau\wedge T}\ W_x) \circ X_t^{-1}$ with respect to Lebesgue's measure (which exists since $(\overline{Z}^{\varphi}_{\sigma\wedge\tau\wedge T}\ W_x)$ is equivalent to W_x).

If $\varphi \neq 0$ dx-a.s., the proof is finished, since $\varphi^2 dy$ is equivalent to dy and $h(y) = Q_y(\sigma \wedge \tau < +\infty)$ for $\varphi^2 dy$-almost all y, i.e. vanishes $\varphi^2 dy$-a.s. thanks to proposition 3.4.3. This leads to a contradiction with (3.4.7).

If $\{\varphi = 0\}$ is not of Lebesgue's measure equal to 0, (3.4.7) and (3.4.8) imply that

$$\forall t \leq t_o \qquad \int_{\mathcal{N}} h(y)\ p^n_t(x,y)\ dy \geq \frac{\alpha}{2} > 0$$

and since $h \leq 1$

$$\forall t \leq t_o \qquad \int \overline{Z}^{\varphi}_{\sigma\wedge\tau\wedge T}\ \mathbb{I}_{X_t \in \mathcal{N}}\ dW_x \geq \frac{\alpha}{2} > 0 \tag{3.4.9}$$

Now recall that $\mathcal{N}$ is finely closed, and $x \in \mathcal{N}^c$ which is finely open i.e.

$$W_x(\inf\{t \geq 0 \ / \ X_t \in \mathcal{N}\} = 0) = 0$$

Since W_x and $\overline{Z}^{\varphi}_{\sigma\wedge\tau\wedge T}\ W_x$ are equivalent, the above also holds for $\overline{Z}^{\varphi}_{\sigma\wedge\tau\wedge T}\ W_x$, and we obtain a contradiction with (3.4.9).

We thus have proved theorem 3.4.2*i*. Part *ii* now is immediate since $\overline{Z}^\varphi = Z^\varphi$ is strong multiplicative for $x \notin \mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$, and $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$ cannot be attained if we start from such an x. ∎

In addition

Proposition 3.4.4

$$Let \quad \mathcal{N}'' = \mathcal{N} \cup \mathcal{N}' \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ / \ \exists t > 0 \ / \ E^{Q_x}\left(\int_o^t \left| \frac{\nabla\varphi}{\varphi} \right|^2 (X_s)\, ds \right) = +\infty \right\}$$

Then $\mathcal{N}''$ is $\varphi^2 dx$-negligible, finely closed (for both the Brownian or the $(Q_x)_x$ fine topology), and

$$\text{if } x \notin \mathcal{N}'' \quad Q_x(\sigma' \wedge \inf\{s \geq 0 \ / \ X_s \in \mathcal{N}''\} < +\infty) = 0$$

Hence we can modify Q_x, by setting $Q_x = \delta_{\{x\}}$ if $x \in \mathcal{N}''$ in (3.4.6).

The proof is immediate and left to the reader.

During the proof of proposition 3.4.3, appeared $\ln\varphi$. In most of the works concerned with the problem we are dealing with (or similar existence and uniqueness problems), the results are derived by studying precisely the behavior of the process $\ln\varphi(X_t) - \ln\varphi(X_o)$ (see [Tak92], [Son94b] for the symmetric case, also [ARZ93a], and [MZ84], [Car85], [Zhe85] in the framework of Nelson's stochastic mechanics). In the symmetric case, one can use Fukushima's decomposition, in order to write

$$\ln\varphi(X_t) - \ln\varphi(X_o) = N_t^\varphi + A_t^\varphi \quad Q_\varphi - a.s.$$

where N^φ is a martingale (additive functional) of finite energy, and A^φ is (an additive functional) of zero energy, provided $\ln\varphi$ belongs to the domain of the form induced by $(Q_x)_x$ (in particular the integrability condition $\int (\ln\varphi)^2\varphi^2\, dx < +\infty$ is required, condition which is forgotten in some papers).

This decomposition can be recovered, in a probabilistic framework, by using the recent extension of Ito formula due to Föllmer and Protter [FP94], i.e.

Theorem 3.4.5 *([FP94] th 4.4, 4.5 and 5.8)*
Let F be absolutely continuous with (dx) square integrable first partial derivatives. Then for any bounded nonnegative function k such that

$$F(X_t) - F(X_o) = \int_o^t \nabla F(X_s).dX_s + \frac{1}{2}[\nabla F(X), X]_t \quad W_{k\ dx} - a.s.$$

where $[\nabla F(X), X]_t$ is the quadratic covariation of $\nabla F(X)$ and X, and is equal to

$$-\int_o^t \nabla F(X_s).dX_s + \left(\int_{T-t}^T \nabla F(X_s).dX_s \right) \circ r$$

where as before r denotes the time reversal operator.

Remark 3.4.6 : Our formulation is slightly different from the one in [FP94]. Indeed, in the construction of a stochastic approximation in Example (4.13) of [FP94], the normalizing $(2\pi s)^{-d/2}$ (in d dimensions) is missing, and the construction seems to fail unless one relaxes the initial condition.

Remark 3.4.7 : Now it is immediate that theorem 3.4.5 holds W_x-a.s. for dx almost all x, thus $W_{k\ dx}$-a.s. for any $k\ dx << dx$. If we apply theorem 3.4.5 to $\ln\varphi$ we get

$$\int_o^t \frac{\nabla\varphi}{\varphi}(X_s).dX_s = \ln\frac{\varphi(X_t)}{\varphi(X_o)} - \frac{1}{2}[\frac{\nabla\varphi}{\varphi}(X),X]_t \quad W_\varphi a.s.$$

where $[\frac{\nabla\varphi}{\varphi}(X),X]_t$ is the quadratic covariation, hence

$$\frac{dQ_\varphi}{dW_\varphi} = 1\!\!\mathrm{I}_{T<\tau}\ \frac{\varphi(X_T)}{\varphi(X_o)}\ \exp\left(-\frac{1}{2}\left([\frac{\nabla\varphi}{\varphi}(X),X]_T + \int_o^T \left|\frac{\nabla\varphi}{\varphi}\right|^2 (X_s)\ ds\right)\right)$$

This formula is the Gibbsian description of Q_φ, and can be rewritten

$$\frac{dQ_\varphi}{dW_{dx}} = 1\!\!\mathrm{I}_{T<\tau}\ \varphi(X_T)\ \varphi(X_o)\ \exp\left(-\frac{1}{2}\left([\frac{\nabla\varphi}{\varphi}(X),X]_T + \int_o^T \left|\frac{\nabla\varphi}{\varphi}\right|^2 (X_s)\ ds\right)\right)$$

Time reversibility of Q_φ is (apparently) clear on this last formula (see [CRZ94] for an infinite dimensional example).

The last point to be discussed in this section is the connection with Fukushima's decomposition. Indeed $\int_o^t \frac{\nabla\varphi}{\varphi}(X_s).dX_s$ is a $\mathcal{F}_t, Q_\varphi$ semi-martingale (use Girsanov theory with τ_n as a localizing sequence of stopping times) with decomposition $M_t^\varphi + \int_o^t \left|\frac{\nabla\varphi}{\varphi}\right|^2 (X_s)\ ds$ i.e.

$$\ln\varphi(X_t) - \ln\varphi(X_o) = M_t^\varphi + \int_o^t \left|\frac{\nabla\varphi}{\varphi}\right|^2 (X_s)\ ds + \frac{1}{2}[\frac{\nabla\varphi}{\varphi}(X),X]_t \quad Q_\varphi a.s.$$

and it suffices to check that the sum of the last two terms is of zero energy, which does not seem to be so easy.

Extension to $\mathcal{C}^o(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$:

Of course all we have done can easily be extended to the whole paths space $\mathcal{C}^o(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$. It suffices to apply the above results, with the increasing sequence of times $T_n = n$, by defining $\mathcal{N}\cup\mathcal{N}' = \cup_n(\mathcal{N}\cup\mathcal{N}')_{T_n}$ and Q_x as the Föllmer measure associated with the martingale (but supermartingale up to and including $T = +\infty$) Z^φ for $x \notin \mathcal{N}\cup\mathcal{N}'$. It can happen that Q_x and W_x are singular, but $Q_x << W_x$ in restriction to $\mathcal{F}_T$ for all $T < +\infty$. (see [Jac79] or [Föl72] for a discussion about the Föllmer measure.)

3.5 Singular diffusion processes and the associated Dirichlet forms

In this section we shall discuss the relationship between the Dirichlet forms we introduced in section 3.2 and the singular diffusion processes we studied in the previous two sections. In particular we intend to give another proof of theorem 3.2.7, by using "quasi only" probabilistic tools. So before completing this new proof, we will not assume that $H^1_o(\varphi^2 dx) = H^1(\varphi^2 dx)$.

Let we assume for the moment that (3.3.1) holds.

We saw in theorem 3.3.3 that there exists one and only one stationary (hence symmetric) solution to $\mathcal{M}(\mathcal{C}^\infty_c, S_\varphi)$ (though we worked in $\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d)$, theorem 3.3.3 extends to any solution of $\mathcal{M}(\mathcal{C}^\infty_c, S_\varphi)$ in the Skorohod space of cadlag paths). In particular if $(\mathcal{E}_\varphi, H)$ is a closed markovian extension of $(\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$, which is associated with a right Markov process, one expects that this process is given by Q_φ. Actually

Proposition 3.5.1 *Let Q be a symmetric Probability measure associated with $(\mathcal{E}_\varphi, H)$ (a markovian closed extension of $(\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$) i.e. for all $f \in L^2(\varphi^2 dx)$, $E^Q(f(X_t))$ is a $L^2(\varphi^2 dx)$ version of the semi-group of $(\mathcal{E}_\varphi, H)$. Assume that the generator A of Q is an extension of S_φ. Then $Q = Q_\varphi$.*

Proof: Q solves the martingale problem $\mathcal{M}(\mathcal{D}(A), A)$ and since A is an extension of S_φ, Q also solves the martingale problem $\mathcal{M}(\mathcal{C}^\infty_c, S_\varphi)$. ∎

If $\mathcal{C}^\infty_c$ is a subset of the domain $\mathcal{D}(A)$ of A, then A is an extension of S_φ. But in general it is not known that this property holds.

Unfortunately, it is not true that any markovian closed extension of $(\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$ has an associated right Markov process. A necessary and sufficient condition has been recently obtained in [AM91].

Theorem 3.5.2 *([AM91] th 1.7, add a remark of [Fit89]) A symmetric Dirichlet form $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ is associated with a right symmetric process if and only if $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ is quasi-regular (see [AM91] 1.14 - 1.16).*

(for some extensions to non symmetric forms, see [AMR92] and the pioneering work of Le Jan [LeJ83]).

As a consequence we get

Corollary 3.5.3 *There exists an unique quasi-regular markovian closed extension $(\mathcal{E}_\varphi, H^1_o(\varphi^2 dx))$ of $(\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$ such that the generator A_o of $(\mathcal{E}_\varphi, H^1_o(\varphi^2 dx))$ extends $(S_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$.*

Remark : We thank M. Röckner for pointing out a mistake in our first formulation of prop 3.5.1 and corollary 3.5.3.

The notion of quasi-regularity we shall not discuss here is a generalization of the classical regularity of [Fuk80] (i.e. $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \cap \mathcal{C}_c$ is a core) and it seems that to prove quasi-regularity for $(\mathcal{E}_\varphi, H^1(\varphi^2 dx))$ is not easier than a direct proof of $H^1_o(\varphi^2 dx) = H^1(\varphi^2 dx)$, i.e. the above corollary is not really tractable for the proof of Markov uniqueness.

The proof we shall propose now is inspired by [Son94b] with some simplifications.

Theorem 3.5.4 *If (3.3.1) holds then* $H^1_o(\varphi^2 dx) = H^1(\varphi^2 dx)$

Proof of theorem 3.5.4 :
Let χ_n denote the 1-equilibrium potential of $\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}$, for the form $(\mathcal{E}_\varphi, H^1_o(\varphi^2 dx))$, i.e. (see [Fuk80] th 3.3.1)

$$\chi_n \in H^1_o(\varphi^2 dx) \quad \text{and} \quad cap_\varphi(\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}) = \mathcal{E}^1_\varphi(\chi_n, \chi_n)$$

Since $(\mathcal{E}_\varphi, H^1_o(\varphi^2 dx))$ is regular, it is known that one can choose

$$\chi_n(x) = E^{Q_x}(e^{-\sigma_n})$$

and that

$$cap_\varphi(\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}) = E^{Q_\varphi}(e^{-\sigma_n})$$

(see [Fuk80] th 4.3.5)

Remark 3.5.5 : Though supp $\varphi^2 dx \neq \mathbb{R}^d$ a priori, the above results are still true (see e.g. [AM91])

According to proposition 3.4.3 and Lebesgue's dominated convergence theorem

$$\lim_{n\to+\infty} E^{Q_\varphi}(e^{-\sigma_n}) = 0 \tag{3.5.1}$$

Pick an $f \in H^1(\varphi^2 dx)$ which is bounded. We shall prove that f can be approximated by a sequence of elements of $H^1_o(\varphi^2 dx)$.

Since f and χ_n are bounded elements of $H^1(\varphi^2 dx)$, $f\chi_n \in H^1(\varphi^2 dx)$ and is bounded (see [Fuk80] th 1.4.2 *ii*). Furthermore

$$\overline{\nabla}(f\chi_n) = f\overline{\nabla}\chi_n + \chi_n\overline{\nabla}f \tag{3.5.2}$$

which is easily obtained by taking limits in 3.2.8 since $\chi_n \in H^1_o(\varphi^2 dx)$ (i.e. one can find a sequence of $\mathcal{C}^\infty_c$ which converges to χ_n in $\mathcal{E}^1_\varphi$ norm).

Lemma 3.5.6 $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}^1_\varphi(\chi_n f, \chi_n f) = 0$ *(up to a subsequence)*

Proof: Since $\mathcal{E}^1_\varphi(\chi_n, \chi_n)$ goes to 0, one can find a subsequence such that χ_n and $\overline{\nabla}\chi_n$ goes to 0, both in $L^2(\varphi^2 dx)$ and $\varphi^2 dx$ a.s. Thus since f is bounded,

$$\lim_{n\to+\infty} \int (\chi_n f)^2 \varphi^2 \, dx = 0$$

and

$$\int \left|\overline{\nabla}(\chi_n f)\right|^2 \varphi^2 \, dx \leq 2\int f^2 \left|\overline{\nabla}\chi_n\right|^2 \varphi^2 \, dx + \int \chi_n^2 \left|\overline{\nabla} f\right|^2 \varphi^2 \, dx$$

which again goes to 0 thanks to Lebesgue's theorem (recall that $\chi_n^2 \leq 1$). ∎

In view of lemma 3.5.6, It is enough to approximate $(1-\chi_n)f$ by elements of $H^1_o(\varphi^2 dx)$. The proof will rely on the following result.

Lemma 3.5.7 *Define*

$$H_n^1(\varphi) = \left\{ g \in H^1(\varphi^2 dx), g \text{ bounded } \;/\; g(x) = 0 \text{ and } \overline{\nabla} g(x) = 0 \text{ for } dx\text{-almost all } x \notin \{\varphi \in [\frac{1}{n}, n]\} \right\}$$
$$H_n^1 = \left\{ g \in H^1, g \text{ bounded } \;/\; g(x) = 0 \text{ for } dx\text{-almost all } x \notin \{\varphi \in [\frac{1}{n}, n]\} \right\}$$

Then $H_n^1(\varphi) \subset H_n^1$, *and if* $g \in H_n^1(\varphi)$, $\nabla g = \overline{\nabla} g \mathbb{1}_{\varphi \in [\frac{1}{n}, n]} = \overline{\nabla} g$.

The proof of lemma 3.5.7 is postponed to the end of the proof of theorem 3.5.4.

Since $\chi_n \in H_o^1(\varphi^2 dx)$, which is the domain of a regular form, one knows that $\overline{\nabla}\chi_n = \overline{\nabla}\chi_n \mathbb{1}_{\varphi \in [\frac{1}{n}, n]}$. According to (3.5.2) the function $(1-\chi_n)f$ belongs to $H_n^1(\varphi)$, hence by lemma 3.5.7, one can find a sequence $(\psi_k^n)_{k \geq 1}$ of test functions such that $|\psi_k^n| \leq \|f\|_\infty$ and

$$\psi_k^n \xrightarrow[k \to +\infty]{} (1-\chi_n)f \text{ in } H^1$$

(take care that ψ_k^n does not need to vanish on $\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}$). But

$$(1-\chi_n)\psi_k^n \in H_o^1(\varphi^2 dx) \cap H_n^1(\varphi)$$

Let we compute the distance between $(1-\chi_n)f$ and $(1-\chi_n)\psi_k^n$. First of all

$$\begin{aligned}
&\int \left[(1-\chi_n)\psi_k^n - (1-\chi_n)f\right]^2 \varphi^2 \, dx \\
&= \int \mathbb{1}_{\varphi \in [\frac{1}{n}, n]} \left[(1-\chi_n)\psi_k^n - (1-\chi_n)f\right]^2 \varphi^2 \, dx \\
&\leq 2 \int \mathbb{1}_{\varphi \in [\frac{1}{n}, n]} \left[\psi_k^n - (1-\chi_n)f\right]^2 \varphi^2 \, dx + 2 \int |\chi_n \psi_k^n|^2 \varphi^2 \, dx \\
&\leq 2\, n^2 \, \|\psi_k^n - (1-\chi_n)f\|^2_{L^2(dx)} + 2\, \|f\|^2_\infty \, \|\chi_n\|^2_{L^2(\varphi^2 dx)}
\end{aligned}$$

Next

$$\begin{aligned}
&\int \left|\overline{\nabla}((1-\chi_n)\psi_k^n) - \overline{\nabla}((1-\chi_n)f)\right|^2 \varphi^2 \, dx \\
&= \int \left|(1-\chi_n)\overline{\nabla}\psi_k^n - \overline{\nabla}((1-\chi_n)f) - \psi_k^n \overline{\nabla}\chi_n\right|^2 \; \mathbb{1}_{\varphi \in [\frac{1}{n}, n]} \; \varphi^2 \, dx \\
&= \int \left|(1-\chi_n)\left[\overline{\nabla}\psi_k^n - \overline{\nabla}((1-\chi_n)f)\right] - \chi_n \overline{\nabla}((1-\chi_n)f) - \psi_k^n \overline{\nabla}\chi_n\right|^2 \; \mathbb{1}_{\varphi \in [\frac{1}{n}, n]} \; \varphi^2 \, dx \\
&= \int \left|(1-\chi_n)\left[\overline{\nabla}\psi_k^n - \overline{\nabla}((1-\chi_n)f)\right] - \chi_n(1-\chi_n)\overline{\nabla} f + (\chi_n f - \psi_k^n)\overline{\nabla}\chi_n\right|^2 \; \mathbb{1}_{\varphi \in [\frac{1}{n}, n]} \; \varphi^2 \, dx \\
&\leq 3\, n^2 \left\|\overline{\nabla}\psi_k^n - \overline{\nabla}((1-\chi_n)f)\right\|^2_{L^2(dx)} + 3 \int |\chi_n \overline{\nabla} f|^2 \varphi^2 \, dx + 3 \times 2 \|f\|^2_\infty \left\|\overline{\nabla}\chi_n\right\|^2_{L^2(\varphi^2 dx)}
\end{aligned}$$

By choosing first n big enough, one can control all terms where k does not appear (thanks to lemma 3.5.6, (3.5.1) and Lebesgue's theorem). One can then choose k

large enough for $\|\psi_k^n - (1-\chi_n)f\|_{H^1}^2$ to be as small as we want. We just have proved that

$$\mathcal{E}_\varphi^1((1-\chi_n)\psi_k^n - (1-\chi_n)f, (1-\chi_n)\psi_k^n - (1-\chi_n)f)$$

is arbitrary small, and since $(1-\chi_n)\psi_k^n \in H_o^1(\varphi^2 dx)$, the proof of theorem 3.5.4 is finished provided we show lemma 3.5.7 :

Proof: Let $u \in \mathcal{C}_c^\infty$ and let u_n denote the function

$$u_n = \frac{u}{\Big((\varphi \vee \frac{1}{n}) \wedge n\Big)^2}$$

Then $u_n \in H^1$ and

$$\nabla u_n = \frac{\nabla u}{\Big((\varphi \vee \frac{1}{n}) \wedge n\Big)^2} - 2u\frac{\nabla \varphi}{\Big((\varphi \vee \frac{1}{n}) \wedge n\Big)^3}\ \mathbb{I}_{\varphi \in [\frac{1}{n}, n]}$$

Let $(h_n^k)_{k\geq 1}$ be a sequence of test functions which converges to u_n in H^1. Apply (3.2.8) in order to get

$$\int h_n^k\ \overline{\nabla} g\ \varphi^2\ dx = -\int g\ \overline{\nabla} h_n^k\ \varphi^2\ dx - 2\int g\ h_n^k\ \frac{\nabla\varphi}{\varphi}\ \varphi^2\ dx \qquad (3.5.3)$$

But according to what precedes, all functions under integral signs vanish outside of $\{\varphi \in [\frac{1}{n}, n]\}$, and on $\{\varphi \in [\frac{1}{n}, n]\}$, $\varphi^2 dx$ and dx are equivalent. But

$$h_n^k\ \mathbb{I}_{\varphi\in[\frac{1}{n},n]}\varphi^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} u\ \mathbb{I}_{\varphi\in[\frac{1}{n},n]} \quad dx\ a.s.$$

$$\nabla h_n^k\ \mathbb{I}_{\varphi\in[\frac{1}{n},n]}\ \varphi^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} (\nabla u - 2u\frac{\nabla\varphi}{\varphi})\ \mathbb{I}_{\varphi\in[\frac{1}{n},n]} \quad dx\ a.s.$$

and then by taking limits in (3.5.3), we get

$$\begin{aligned}\int u\ \overline{\nabla} g\ \mathbb{I}_{\varphi\in[\frac{1}{n},n]}\ dx &= \int \nabla u\ g\ \mathbb{I}_{\varphi\in[\frac{1}{n},n]}\ dx \\ &= \int \nabla u\ g\ dx\end{aligned}$$

The proof of lemma 3.5.7, thus of theorem 3.5.4, is finished. ∎

Remark 3.5.8 : Though the proof seems to be a little bit more complicated than we expected, we want to underline that all analytical material we used is really elementary and does not refer to the special form of the generator (i.e. to proposition 3.2.5 and its consequences). See e.g. chap 4 for some extensions.

Theorem 3.5.4 can now be easily extended to the H_{loc}^1 case, i.e.

Theorem 3.5.9 *If $\varphi \in H_{loc}^1$, then $H_o^1(\varphi^2 dx) = H^1(\varphi^2 dx)$.*

Proof: According to corollary 3.2.6*iii*, it suffices to approximate a $f \in H^1(\varphi^2 dx)$ which is bounded and compactly supported. Take χ and χ', two $\mathcal{C}_c^\infty$ functions satisfying $\mathbb{1}_{\text{supp} f} \le \chi \le \chi' \le 1$ and $\mathbb{1}_{\text{supp}\chi} \le \chi'$. Then $f = f\chi$ belongs to $H^1((\chi'\varphi)^2 dx)$. But $\chi'\varphi$ being compactly supported satisfies (3.3.1) (up to a normalizing constant) i.e. $H_o^1((\chi'\varphi)^2 dx) = H^1((\chi'\varphi)^2 dx)$ thanks to theorem 3.5.4. Let f_n be a sequence of $\mathcal{C}_c^\infty$ such that f_n converges to f in $H^1((\chi'\varphi)^2 dx)$ and put $g_n = \chi f_n$. Then

$$\int |f - g_n|^2 \ \varphi^2 \ dx = \int |\chi f - \chi f_n|^2 \ (\chi'\varphi)^2 \ dx \le \int |f - f_n|^2 \ (\chi'\varphi)^2 \ dx$$

and

$$\begin{aligned}
&\int |\overline{\nabla} f - \nabla g_n|^2 \ \varphi^2 \ dx \\
&\le \ 2\int |\chi \overline{\nabla} f - \chi \nabla f_n|^2 \ (\chi'\varphi)^2 \ dx + 2\int |f_n|^2 \ |\nabla\chi|^2 \ (\chi'\varphi)^2 \ dx \\
&\le \ 2\int |\overline{\nabla} f - \nabla f_n|^2 \ (\chi'\varphi)^2 \ dx + 2\int |f_n - f|^2 \ |\nabla\chi|^2 \ (\chi'\varphi)^2 \ dx \\
&\qquad \text{since } f\nabla\chi \equiv 0 \\
&\le \ C^{ste} \|f_n - f\|^2_{H^1((\chi'\varphi)^2 dx)}
\end{aligned}$$

Both quantities are then going to 0 with n, and the proof is finished. ∎

Remark 3.5.10 : We cannot change the reference measure dx into $d\nu$ (with ν the Gaussian standard law) except if we assume $\int |x|^2 \ \varphi^2 \ dx < +\infty$ (otherwise $\frac{\varphi}{\sqrt{\gamma}}$, where $\gamma \ dx = d\nu$, does not belongs to $H^1(\nu)$). It seems that this point is overcomed in the proof of [RZ92] th 4.1 .

Corollary 3.5.11 *If either $\varphi \in H^1$, or $\varphi \in H^1_{loc}$ and $\varphi \ne 0$ dxa.e., Markov uniqueness holds.*

3.6 Invariant measures

In this section we shall use our previous results to study a large class of invariant measures of the Markov process induced on $\Omega = \mathcal{C}^o(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ by the family $(Q_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ given by (3.4.4). A similar study is done in [BR94b], by using purely analytical tools. Most of the results of this section are already stated in [BR94b], with different proofs here. Let we mention that a large part of section 3 of [BR94b] is actually contained in [CL94] (for the finite dimensional case) and [CL95b] for the more general Markov case (in particular theorem 3.1 and the major part of theorem 3.5). We also stress the fact that the probabilistic approach can be easily extended to more general diffusion cases (see chap 4) or infinite dimensional spaces, as well as to non symmetric cases. Nevertheless, both approaches are exciting, and complementary.

We assume again that

$$\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{and} \quad \int \varphi^2 \ dx = 1$$

and choose the version of φ defined in th 3.4.2.

A positive measure μ on $\mathbb{R}^d$ is said to be an invariant or stationary measure (we will not specify for the Markov process) if

$$Q_\mu \circ X_t^{-1} = \mu \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}^+, \quad \text{where } Q_\mu = \int Q_x \, d\mu(x)$$

(recall that $x \longrightarrow Q_x$ is a measurable flow in our construction in proposition 3.4.4).

Among the invariant measures, the set of the reversible ones is of particular interest. We already know that $\varphi^2 dx$ is reversible. We shall see that any reversible measure "looks like" $\varphi^2 dx$, and moreover that any stationary measure satisfying an integrability condition is reversible. To this end we shall use the entropy minimization result mentioned in theorem 3.3.5ii, but we first drop the condition $\int (\ln|\varphi|) \, \varphi^2 \, dx < +\infty$.

Proposition 3.6.1 $H(Q_\varphi, W_\varphi) = \inf_{Q \in \mathcal{A}_{\varphi,H}} H(Q, W_\varphi)$
where $\mathcal{A}_{\varphi,H} = \left\{ Q \;\; / \;\; Q \circ X_t^{-1} = \varphi^2 dx \;\; \forall t \right\}$

Proof: Proposition 3.6.1 will be proved if we show that $\dfrac{\nabla\varphi}{\varphi}$ belongs to $H_o^{-1}(\varphi^2 dx)$ (the closure of $\{\nabla f \; / \; f \in \mathcal{C}_c^\infty\}$ in $L^2(\varphi^2 dx)$). But

$$g_\varepsilon = \ln((\varphi \vee \varepsilon) \wedge \frac{1}{\varepsilon}) \quad \text{and} \quad \nabla g_\varepsilon = \frac{\nabla\varphi}{\varphi} \mathbb{1}_{\varepsilon \le \varphi \le \frac{1}{\varepsilon}}$$

By taking limits, and since $H_o^1(\varphi^2 dx) = H^1(\varphi^2 dx)$ (according to theorem 3.5.9) the desired result is obtained. ∎

Now let μ be a bounded invariant measure. μ splits into

$$\mu = \mu \mathbb{1}_{\varphi=0} + \mu \mathbb{1}_{\varphi>0} = \mu_o + \mu_+$$

The first elementary fact is

Proposition 3.6.2 μ_o *is a reversible measure,* μ_+ *is an invariant measure.*

The proof is left to the reader. In the sequel, we shall study μ_+.

Proposition 3.6.3 $\mu_+ << dx$.

Proof: $Q_{\mu_+} << W_{\mu_+}$, thus $Q_{\mu_+} \circ X_t^{-1} << W_{\mu_+} \circ X_t^{-1} << dx$ for all $t > 0$. ∎

Proposition 3.6.4 *Denote by* ψ^2 *the density of* μ_+*, i.e.* $d\mu_+ = \psi^2 \, dx$.
If $\displaystyle\int \left| \frac{\nabla\varphi}{\varphi} \right|^2 \psi^2 \, dx < +\infty$*, then* $\psi \in H^1$.

Proof:

$$H(Q_{\mu_+}, W_{\mu_+}) = \frac{1}{2} E^{Q_{\mu_+}} \left[\int_o^T \left| \frac{\nabla\varphi}{\varphi} \right|^2 (X_s)\ ds \right] = \frac{T}{2} \int \left| \frac{\nabla\varphi}{\varphi} \right|^2 \psi^2\ dx$$

(if we restrict the paths to the time interval $[0,T]$.) Thus we can use Föllmer's results on time reversal (see [Föl88] and [Föl84]), which shows that $\nabla\psi$ is dx a.e. well defined and $\frac{\nabla\psi}{\psi} \in L^2(\psi^2 dx)$ i.e. (since μ_+ is bounded) $\psi \in H^1$. ∎

(see [BR94b] for an analytical proof).

Finally, we can state

Theorem 3.6.5 *Any bounded invariant measure μ satisfying $\int \left| \frac{\nabla\varphi}{\varphi} \right|^2 d\mu < +\infty$ is a reversible measure.*

Proof: Since $\frac{\nabla\varphi}{\varphi} = 0$ on $\{\varphi = 0\}$, the above statement reduces to $\int \left| \frac{\nabla\varphi}{\varphi} \right|^2 d\mu_+ < +\infty$. It follows from proposition 3.6.4 that $d\mu_+ = \psi^2 dx$ with $\psi \in H^1$. Thanks to theorem 3.5.9, $H^1_o(\psi^2 dx) = H^1(\psi^2 dx)$, and by using the same argument than in the proof of proposition 3.6.1 we obtain that $\frac{\nabla\varphi}{\varphi} \in H_o^{-1}(\psi^2 dx)$. But this proves, thanks to proposition 3.3.6, that

$$H(\ Q_{\mu_+}, W_\psi) = \inf_{Q \in \mathcal{A}_{\psi,H}} H(\ Q, W_\psi)$$

But this infimum is attained at a single point, hence $Q_{\mu_+} = Q_\psi$ according to proposition 3.6.1, and we know that Q_ψ is time reversible. ∎

The above proof gives another information : $Q_{\mu_+} = Q_\psi$. So Q_{μ_+} solves the martingale problem $\mathcal{M}(\mathcal{C}_c^\infty, S_\varphi)$ and is time reversible. It follows immediately (see the proof of theorem 3.3.5*i*) that

$$\frac{\nabla\psi}{\psi} = \frac{\nabla\varphi}{\varphi} \qquad \psi^2 dx\ a.s.$$

Hence $\varphi^2 - \psi^2$ is locally constant on the interior of the set $\{\psi > 0\}$, i.e. constant on each connected component of the interior of $\{\psi > 0\}$. Of course, the topological nature of $\{\psi > 0\}$ is not trivial at all, but at least :

Proposition 3.6.6 *If $\{\varphi = 0\}$ is closed, then $\psi^2 = c\ \varphi^2$ on each connected component of $\{\varphi > 0\}$ (of course c may depend of the connected component). Conversely, if $\psi^2 = c\ \varphi^2$ on each connected component of $\{\varphi > 0\}$ then μ is reversible.*

Proposition 3.6.6 and the discussion that precedes also deals with the problem of uniqueness of invariant measures (satisfying the finite energy condition, and bounded). This problem is studied in [BR94b] section 6, with apparently a less complete solution than ours, since the authors assume that $\dfrac{|\nabla\varphi|}{\varphi} \in L^1_{loc}(dx)$. Also see example 6.1 of [BR94b] for a non-uniqueness example.

Finally, we shall briefly discuss the problem of non necessarily bounded μ. Proposition 3.6.3 extends to this case without any trouble. If we consider the generalization of Kullback information to non necessarily finite measures, it is well known that

$$H(Q_\mu, W_\mu) = \int H(Q_x, W_x)\ d\mu$$

If $\dfrac{\nabla\varphi}{\varphi}$ is of finite $\psi^2 dx$-energy, it is not hard to extend Föllmer time reversal argument (the nature of the time reversed Brownian motion does not depend on the initial measure), hence $\psi \in L^2_{loc}(dx)$ and $\nabla\psi \in L^2(dx)$. The minimality argument which leads to proposition 3.6.1 is only connected with Riesz projection theorem on a Hilbert space (see [CL94]), so extends to a non necessarily bounded measure (provided $\mathcal{C}_c^\infty \subset L^2(\mu)$). Accordingly

Corollary 3.6.7 *Any invariant measure μ satisfying $\int \left|\dfrac{\nabla\varphi}{\varphi}\right|^2\ d\mu < +\infty$ is a reversible measure. Furthermore $\mu = \mu 1\!\!1_{\varphi=0} + \mu 1\!\!1_{\varphi>0} = \mu_o + \mu_+$, where $\mu_+ = \psi^2 dx$, $\psi \in L^2_{loc}(dx)$ and $\nabla\psi \in L^2(dx)$, satisfy*

$$\frac{\nabla\psi}{\psi} = \frac{\nabla\varphi}{\varphi} \qquad \psi^2 dx\ a.s.$$

In particular, if $\{\varphi = 0\}$ is closed, then $\psi = c\ \varphi$ on each connected component of $\{\varphi > 0\}$. In this case, uniqueness of an invariant measure of finite energy is equivalent to $\{\varphi > 0\}$ connected.

Note that the finite energy condition implies that $(X_t - X_o)^2$ is of finite Q_φ expectation for all t. It should be interesting to find an example of an invariant measure which does not satisfy this condition. Unfortunately (or fortunately) we did not succeed in building such a counterexample.

Chapitre 4

The case of a General Diffusion Matrix

4.1 Introduction

The present paper is the sequel of chap 3, and contains generalizations of some results proved therein. So before presenting these generalizations, let us first recall the contents of chap 3.

Our reference Dirichlet form, there, was the form $\mathcal{E}(f,g) = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla f.\nabla g \; dx$ with domain $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = H^1(\mathbb{R}^d)$, and our reference process was its associated Hunt process, that is, the standard Brownian motion in $\mathbb{R}^d$. For a fixed $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ (or even $\varphi \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$), we studied the form defined by $\mathcal{E}_\varphi(f,g) = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla f.\nabla g \; \varphi^2 \; dx$ on the space $\mathcal{D}(\mathcal{E}_\varphi) = H^1(\varphi)$. Like the usual Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$, the space $H^1(\varphi)$ can be defined in two different ways. The first one by using an integration by parts formula :

$$H^1(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l} f \in L^2(\mathbb{R}^d, \varphi^2 dx) \;\; / \;\; \exists \overline{\nabla} f \in L^2(\mathbb{R}^d, \varphi^2 dx) \;\; / \;\; \forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \\ \displaystyle\int u \; (\overline{\nabla} f) \; \varphi^2 \; dx = - \int f \; (\nabla u) \; \varphi^2 \; dx - 2 \int u \; f \; (\nabla \varphi) \varphi \; dx \end{array} \right\}$$

and the second one in terms of Gâteaux-derivatives :

$$H^1(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l} f \in L^2(\mathbb{R}^d, \varphi^2 dx) \;\; / \;\; \forall k \in \mathbb{R}^d \quad \text{for } \nu_k \text{ almost all } x \in k^\perp \\ (\text{ where } \nu_k \text{ is the projection of } \varphi^2 dx \text{ on the orthogonal set } k^\perp \text{ of } k \text{ in } \mathbb{R}^d) \\ \text{the function } s \to f(x+sk) \text{ has an absolutely continuous version } \tilde{f}_x \\ \text{on } \{s \; / \; \varphi^2(x+sk) > 0\} \text{ and } \dfrac{d\tilde{f}_x}{ds} \in L^2(\mathbb{R}^d, \varphi^2 dx) \end{array} \right\}$$

Using this second definition of $H^1(\varphi)$, we first gave a purely analytical proof of Markov uniqueness for the form $(\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d))$ (i.e. it has only one Markovian closed extension), already proved by Röckner and Zhang ([RZ92], [RZ94]), and by Song ([Son94b], [Son94a]) using more complicated methods. We then presented a "quasi-only-probabilistical" proof of the same result. Therefore, we studied the Hunt process associated with the smallest closed extension $(\mathcal{E}_\varphi, H^1_o(\varphi))$ of $(\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d))$, which is a Brownian motion with singular drift $\frac{\nabla\varphi}{\varphi}$. We showed that this process does not attain the set $\{\varphi = 0\}$ within a finite time, and deduced the density of $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ in the set $H^1_b(\varphi)$ of bounded elements of $H^1(\varphi)$. The density of $H^1_b(\varphi)$ in $H^1(\varphi)$ was immediate, because $(\mathcal{E}_\varphi, H^1(\varphi))$ is a Dirichlet form (the "integration by parts" definition of $H^1(\varphi)$ implies that it is closed, and the Markov property comes from the "Gâteaux-derivatives"definition). The maximality result proved by Albeverio, Kusuoka and Röckner [AKR90] then implied Markov uniqueness.

The first part of the present paper contains similar proofs, in the case of a diffusion matrix which is no more the identity matrix, but a general (sufficiently smooth) matrix σ which we do not assume to be non-degenerate.

In section 4.2, we introduce the spaces $H(dx, a\,dx)$ and $H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ which replace here the spaces $H^1(\mathbb{R}^d)$ and $H^1(\varphi)$ of the "$\sigma = Id$" case. Both spaces are defined by integration by parts :

$$H(dx, a\,dx) = \left\{ \begin{array}{c} f \in L^2(\mathbb{R}^d, dx) \;\; / \;\; \exists \; \overline{\sigma\nabla} f \in L^2(\mathbb{R}^d, dx) \;\; / \;\; \forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \\ \displaystyle\int u \; (\; \overline{\sigma\nabla} f) \; dx = - \int f \; \nabla.(\sigma^* u) \; dx \end{array} \right\}$$

and for a φ in $H(dx, a\,dx)$:

$$H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx) = \left\{ \begin{array}{l} f \in L^2(\mathbb{R}^d, \varphi^2 dx) \;\; / \;\; \exists\ \overline{\sigma\nabla} f \in L^2(\mathbb{R}^d, \varphi^2 dx) \;\; / \;\; \forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \\ \int u \; (\; \overline{\sigma\nabla} f) \; \varphi^2 \; dx = - \int f \; \nabla.(\sigma^* u) \; \varphi^2 \; dx - 2 \int u \; f \; (\; \overline{\sigma\nabla}\varphi)\varphi \; dx \end{array} \right\}$$

Because the twisted gradient $\overline{\sigma\nabla}$ is not point-wise defined, we first have to show that some usual analytical properties (action on smooth functions, on products, etc) hold (as for the usual gradient ∇). This is done in section 4.2.3 by using results of a previous work (chap 2) on reflected processes (in particular prop 4.2.4).

The main analytical problem is the absence of characterization of these spaces in terms of Gâteaux-derivatives (σ twists the Euclidean space). In particular, the forms $(\mathcal{E}^\sigma, H(dx, a\,dx))$ and $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$ defined by

$$\mathcal{E}^\sigma(f,g) = \int \overline{\sigma\nabla} f.\ \overline{\sigma\nabla} g \; dx \quad \text{ and } \quad \mathcal{E}^\sigma_\varphi(f,g) = \int \overline{\sigma\nabla} f.\ \overline{\sigma\nabla} g \; \varphi^2 \; dx$$

are closed, but their Markov property is not immediate (It is not so clear that the composition of an element of $H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ with a smooth function lies again in $H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, i.e. that the chain rule holds). In chap 2, we proved that $(\mathcal{E}^\sigma, H(dx, a\,dx))$ is Markovian. As far as we know, the question whether $(\mathcal{E}^\sigma, H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$ is a Dirichlet form or not is open. For the same reason, we have not been able to extend the analytical proof of Markov uniqueness to our general case. But where the analytical methods fail, the probabilistical methods still work :

Indeed, the form $(\mathcal{E}^\sigma, H(dx, a\,dx))$ is a regular Dirichlet form (see chap 2 remark 2.2.18), thus has an associated Hunt process W^σ which will play here the same role as the Brownian motion in the case "$\sigma = Id$". In section 4.3, we adopt the proofs of chap 3 in order to show that the symmetric process obtained by adding the drift $\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi}$ to W^σ is associated with the smallest closed extension of $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d))$ (when $\varphi \neq 0$ dx a.e.). As in chap 3, its hitting time of $\{\varphi = 0\}$ is a.s. infinite, and $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ is a dense subset in the closure $H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ of $H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx) \cap L^\infty(\varphi^2 dx)$ (see th 4.3.4). This implies that $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$ is a Dirichlet form, and that it is regular, i.e. $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) \cap H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ is a dense subset in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ for $\|\cdot\|_\infty$ and in $H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ for its natural norm $\sqrt{\|\cdot\|^2_{L^2(\varphi^2 dx)} + \left\| \overline{\sigma\nabla}\cdot \right\|^2_{L^2(\varphi^2 dx)}}$. All this can be extended in order to remove the assumption " $\varphi \neq 0 \quad dx$ a.e. ", as done in section 4.3.5.

At the present state, the last step for the proof of Markov uniqueness, i.e. the maximality of $H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, is not done.

The last part of chap 3 dealt with invariant measures. We essentially proved, using potential theory and an entropy characterization due to Cattiaux and Léonard [CL94], that the invariant measures for the Hunt process associated with $(\mathcal{E}_\varphi, H^1(\varphi))$ are reversible as soon as they are of finite energy. In section 4.4 of the present paper, we prove similar results in the case "$\sigma \neq Id$", by using the same methods. However here, we need stronger assumptions on φ and on the invariant measure we consider, because the results from the first part which we are using in this proof are weaker than the corresponding results in chap 3. In particular, since we only proved the regularity of $\mathcal{E}^\sigma_\varphi$ on $H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and not on $H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, we have to do some boundedness assumptions.

4.2 Functional spaces

4.2.1 Notations

In this whole paper, we will work in $\mathbb{R}^d$, for $d \geq 1$. For a subset D of $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{C}(D)$ and $\mathcal{C}^n(D)$ will denote the sets of the continuous and the n times continuously differentiable real functions on D. We will add the subscript c (respectively b) when we only consider the compactly supported functions (respectively the bounded functions with bounded derivatives). When an $\mathbb{R}^d$ or $\mathbb{R}^{d\times d}$-valued function is said to belong to $\mathcal{C}^n(D)$, this means that all its coordinates functions belong to $\mathcal{C}^n(D)$ (idem for $\mathcal{C}^n_c(D)$, $\mathcal{C}^n_b(D)$, $\mathcal{C}(D)$, etc).

The gradient of a real function f is denoted by $\nabla f = (\partial_i f)_{1\leq i\leq d}$. For an $\mathbb{R}^d$-valued function $g = (g_i)_{1\leq i\leq d}$, $\nabla . g = \sum_{i=1}^d \partial_i g_i$ is the divergence of g. If a is a function from $\mathbb{R}^d$ to the space of $d \times d$ matrices, $\nabla . a = (\sum_{i=1}^d \partial_i a_{ij})_{1\leq j\leq d}$.

As long as this does not generate any confusion, we will use the same notation for a measure μ and its infinitesimal version $d\mu$. In particular, the Lebesgue's measure on $\mathbb{R}^d$ will be denoted by dx, and $\varphi^2 dx$ will denote the measure having density φ^2 with respect to dx.

When $D = \mathbb{R}^d$, we will systematically drop the symbol D and simply write $\mathcal{C}^\infty_c$, $L^2(dx)$, H^1, ...

$\mathcal{C}([0,+\infty[, D)$ will denote the set of continuous paths on $[0,+\infty[$ with values in D, $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,+\infty[}$ and $(X_t)_{t\in[0,+\infty[}$ will be respectively the canonical filtration (regularized as usually) and the canonical process on $\mathcal{C}([0,+\infty[, D)$.

4.2.2 The space $H(D, dx, a\, dx)$

Let us first introduce a Hilbert space which will replace here the space H^1 of the Brownian case. This space has already been introduced and studied in chap 2. We will recall here some results we shall use later.

In this whole paper, σ will denote a $\mathcal{C}^1_b$ function defined on $\mathbb{R}^d$ with values in $\mathcal{M}^d$, the space of the $d \times d$ matrices. We shall use the notation $a = \sigma^*\sigma$.

Let D denote an open subset of $\mathbb{R}^d$.

Definition 4.2.1 *A function $f \in L^2(D, dx)$ will be said to have an $L^2(D, dx)$ σ-derivative if there exists an $\mathbb{R}^d$-valued function $g \in L^2(D, dx)$ such that*

$$\forall u \in \mathcal{C}^\infty_c(D) \qquad \int_D u\ g\ dx = -\int_D \nabla.(\sigma^*\ u)\ f\ dx$$

The σ-derivative g of f will be denoted by $\overline{\sigma\nabla}^{dx} f$, or simply $\overline{\sigma\nabla} f$ if there is no ambiguity.
The space $H(D, dx, a\, dx)$ is defined by

$$H(D, dx, a\, dx) = \left\{ f \in L^2(D, dx) \quad / \quad \overline{\sigma\nabla}^{dx} f \in L^2(D, dx) \right\}$$

and is equipped with its natural norm

$$\|f\|^2_{H(D,dx,a\,dx)} = \|f\|^2_{L^2(D,dx)} + \left\| \overline{\sigma\nabla}^{dx} f \right\|^2_{L^2(D,dx)}$$

The following result justifies the notation $\overline{\sigma\nabla}^{dx}$, without any reference to D :

Proposition 4.2.2 *If D' is an open subset of D, and if f belongs to $H(D, dx, a\,dx)$, then its restriction $f_{|_{D'}}$ to D' belongs to $H(D', dx, a\,dx)$, and their σ-derivatives are equal on D'.*

Proof: obvious, since $\mathcal{C}_c^\infty(D')$ is dense in $L^2(D', dx)$. ∎

Proposition 4.2.3 *The space $H(D, dx, a\,dx)$ is an Hilbert space.*

Proof: see chap 2 prop 2.2.7 and remark 2.2.9 ∎

The preceding proposition exactly means that the form $(\mathcal{E}^\sigma, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\sigma))$ defined by

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{E}^\sigma) = H(D, dx, a\,dx) \\ \mathcal{E}^\sigma(f,g) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D \overline{\sigma\nabla}^{dx} f.\, \overline{\sigma\nabla}^{dx} g\ dx \end{cases}$$

is closed.
The following proposition implies that it also is Markovian :

Proposition 4.2.4 *$\mathcal{C}^\infty(D)$ is dense in $H(D, dx, a\,dx)$.*

Proof: see chap 2 th 2.2.8 and remark 2.2.9. Also remark that for a bounded $f \in H(D, dx, a\,dx)$, the approximating sequence of $\mathcal{C}^\infty(D)$ functions may be chosen uniformly bounded by $3\|(f)\|_\infty$ in the proof of th 2.2.8. ∎

Hence $(\mathcal{E}^\sigma, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\sigma))$ is a Dirichlet form.
This Dirichlet form is not a priori regular. For example, when σ is uniformly elliptic, $H(D, dx, a\,dx)$ is equal to the Sobolev space $H^1(D)$, and it is well known that the compactly supported functions are not dense in $H^1(D)$ when D is regular, except in the case $D = \mathbb{R}^d$. So we introduce the following subspace $H_o(D, dx, a\,dx)$ of $H(D, dx, a\,dx)$.

Definition 4.2.5 *$H_o(D, dx, a\,dx)$ will denote the closure in $H(D, dx, a\,dx)$ of the space $\mathcal{C}_c^\infty(D)$.*

Clearly, the form $(\mathcal{E}^\sigma, H_o(D, dx, a\,dx))$ is a regular local Dirichlet form.
In order to define a third space related with $H(D, dx, a\,dx)$, let us study the operator $\overline{\sigma\nabla}^{dx}$. Thought a function may have a σ-derivative and no derivative in Schwartz distributions sense, the operator $\overline{\sigma\nabla}^{dx}$ behaves like a usual differential operator. In particular, it has the following properties :

Proposition 4.2.6

i. $H^1(D) \subset H(D, dx, a\,dx)$, and for every $f \in H^1(D)$ the σ-derivative $\overline{\sigma\nabla}^{dx} f$ is the product of σ and the usual derivative ∇f. Moreover, the integration by parts formula in def 4.2.1 holds for every $u \in H_o^1(D)$.

ii. *If* $f, g \in H_o(D, dx, a\,dx)$ *verify* $fg \in L^2(D, dx)$ *and* $f\ \overline{\sigma\nabla}^{dx} g + g\ \overline{\sigma\nabla}^{dx} f \in L^2(D, dx)$*, then* $fg \in H(D, dx, a\,dx)$ *and* $\overline{\sigma\nabla}^{dx}(fg) = f\ \overline{\sigma\nabla}^{dx} g + g\ \overline{\sigma\nabla}^{dx} f$

iii. *If* $f \in H(D, dx, a\,dx)$ *and* $g \in \mathcal{C}^1_b$ *are such that* $g \circ f \in L^2(D, dx)$*, then* $g \circ f \in H(D, dx, a\,dx)$ *and* $\overline{\sigma\nabla}^{dx}(g \circ f) = (g' \circ f)\ \overline{\sigma\nabla}^{dx} f$

Proof: Since σ and $\nabla.\sigma^*$ are bounded, *i* is immediate. *ii* also is clear by using a sequence of $\mathcal{C}^\infty(D)$ functions converging to f in $H(D, dx, a\,dx)$. To show *iii*, first remark that $(g' \circ f)\ \overline{\sigma\nabla}^{dx} f \in L^2(D, dx)$. Now let $(f_n)_n$ be a sequence of $\mathcal{C}^\infty(D)$ functions converging to f in $H(dx, a\,dx)$. Up to a subsequence, we may assume that f_n converges to f dx a.e. on D. Then for every $u \in \mathcal{C}^\infty_c(D)$

$$\begin{aligned}
&\int_D \nabla.(\sigma^*\ u)\ (g \circ f)\ dx \\
&\quad = \lim_{n\to+\infty} \int \nabla.(\sigma^*\ u)\ (g \circ f_n)\ dx \ \text{(using the bounded convergence theorem)} \\
&\quad = \lim_{n\to+\infty} \int u\ (g' \circ f_n)\ \sigma\nabla f_n\ dx \quad , \quad \text{because } f_n \text{ and } g \text{ are } \mathcal{C}^1 \\
&\quad = \int u\ (g' \circ f)\ \sigma\nabla f\ dx \qquad \text{since } u\ (g' \circ f) \in L^2(D, dx)
\end{aligned}$$

∎

Thanks to this proposition, the following definition makes sense :

Definition 4.2.7 *Let*

$$H_{loc}(D, dx, a\,dx) = \Big\{ f \in L^2_{loc}(D, dx) \quad / \quad \forall g \in \mathcal{C}^\infty_c(D) \quad fg \in H(D, dx, a\,dx) \Big\}$$

For such a function $f \in H_{loc}(D, dx, a\,dx)$*, the* σ*-derivative* $\overline{\sigma\nabla}^{dx} f \in L^2_{loc}(D, dx)$ *of* f *is defined by*

$$\forall K \text{ compact subset of } D \quad \forall g \in \mathcal{C}^\infty_c(D)\ /\ g \equiv 1 \text{ on } K \qquad \overline{\sigma\nabla}^{dx} f = \overline{\sigma\nabla}^{dx}(gf) \text{ on } K$$

Clearly, lemma 4.2.6 still holds with $H_{loc}(dx, a\,dx)$ and $L^2_{loc}(D, dx)$ replacing $H(dx, a\,dx)$ and $L^2(D, dx)$.

Before ending this section, let us consider the special case : $D = \mathbb{R}^d$. In this case, we will drop the notation D and simply write : $H(dx, a\,dx)$, $H_{loc}(dx, a\,dx)$, ...

We have the following fundamental result :

Theorem 4.2.8 *The* $\mathcal{C}^\infty_c$ *functions are dense in* $H(dx, a\,dx)$*. In particular, the spaces* $H(dx, a\,dx)$ *and* $H_o(dx, a\,dx)$ *are equal and the form* $(\mathcal{E}^\sigma, H(dx, a\,dx))$ *is regular.*

Proof: see chap 2 remark 2.2.18. ∎

4.2.3 The space $H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$

Let D denote an open set of $\mathbb{R}^d$ and φ be an element of $H_{loc}(D, dx, a\,dx)$.

We will introduce and study in this section the analogous $H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ of the space $H(D, dx, a\,dx)$ when Lebesgue's measure dx has been replaced by $\varphi^2 dx$.

The σ-derivative $\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi$ is in $L^2_{loc}(D, dx)$, thus the $\mathbb{R}^d$-valued function $\dfrac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi}$ is well defined (setting $\dfrac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi}(x) = 0$ if $\varphi(x) = 0$) and belongs to $L^2_{loc}(D, \varphi^2 dx)$.

Definition 4.2.9 *We will say that a function $f \in L^2(D, \varphi^2 dx)$ has an $L^2(D, \varphi^2 dx)$ σ-derivative if there exists an $\mathbb{R}^d$-valued function $g \in L^2(D, \varphi^2 dx)$ such that*

$$\forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(D) \quad \int_D u\ g\ \varphi^2 dx = -\int_D \nabla.(\sigma^* u)\ f\ \varphi^2 dx - 2\int_D u\ f\ \frac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi}\ \varphi^2 dx \tag{4.2.1}$$

The σ-derivative g of f with respect to $\varphi^2 dx$ will be denoted by $\overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f$, or simply $\overline{\sigma\nabla} f$ if there is no possible confusion with $\overline{\sigma\nabla}^{dx}$.

Let us define the space

$$H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx) = \left\{ f \in L^2(D, \varphi^2 dx) \ \ / \ \ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f \in L^2(D, \varphi^2 dx) \right\}$$

and its norm

$$\|f\|^2_{H(D,\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)} = \|f\|^2_{L^2(D,\varphi^2 dx)} + \left\| \ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f \right\|^2_{L^2(D,\varphi^2 dx)}$$

As in the previously studied case "$\varphi = 1$", the notation $\overline{\sigma\nabla}^{\varphi}$ is justified by the fact that the σ-derivative of the restriction of $f \in H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ to an open subset D' of D is the restriction to D' of the σ-derivative of f.

Let us first establish some properties of the operator $\overline{\sigma\nabla}^{\varphi}$ and of the space $H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$.

Proposition 4.2.10 *The space $H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ is an Hilbert space.*

Proof: Let $(f_n)_n$ be a Cauchy sequence in $H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$. $(f_n)_n$ and $(\overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f_n)_n$ are Cauchy sequences in the complete space $L^2(D, \varphi^2 dx)$, thus have limits f_∞ and g_∞ in $L^2(D, \varphi^2 dx)$. But

$$\begin{aligned}
&\forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(D) \\
&\int u\ g_\infty\ \varphi^2\ dx &=& \lim_{n\to+\infty} \int u\ \ \overline{\sigma\nabla} f_n\ \varphi^2\ dx \\
&&=& -\lim_{n\to+\infty} \int \nabla.(\sigma^*\ u)\ f_n\ \varphi^2\ dx + 2\int u\ f_n\ \frac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi}\ \varphi^2\ dx \\
&&=& -\int \nabla.(\sigma^*\ u)\ f\ \varphi^2\ dx - 2\int u\ f\ \frac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi}\ \varphi^2\ dx
\end{aligned}$$

thus $f_\infty \in H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and $\overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f_\infty = g_\infty$. Consequently, $H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ is complete. ∎

Proposition 4.2.11 *$\mathcal{C}_c^\infty(D)$ is a subset of $H(D,\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and for each $f \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$ $\overline{\sigma\nabla}^\varphi f = \sigma\nabla f$.*

Proof: Fix a function f belonging to $\mathcal{C}_c^\infty(D)$. Let $u \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$ and let $(\varphi_n)_n$ be a sequence of $\mathcal{C}^\infty(D)$ functions converging to φ in $H(D_u, dx, a\,dx)$, where D_u is a relatively compact open subset of D containing the support of u. Integrating by parts in $H(D_u, dx, a\,dx)$, we have

$$\int_D \nabla.(u\ f\ \varphi_n\ \sigma^*)\ \varphi\ dx = -\int_D u\ f\ \varphi_n\ (\ \overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi)\ dx$$

Since φ_n converges to φ in $L^2(D_u, dx)$ and $\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi \in L^2(D_u, dx)$, the right hand term converges to $-\int_D u\ f\ (\ \overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi)\ \varphi\ dx$ as $n \to +\infty$.

The left hand term is equal to

$$\int_D \nabla.(u\ f\ \sigma^*)\ \varphi_n\ \varphi\ dx + \int_D u\ f\ (\sigma\nabla\varphi_n)\ \varphi\ dx$$

which tends to

$$\int_D \nabla.(u\ f\ \sigma^*)\ \varphi^2\ dx + \int_D u\ f\ (\ \overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi)\ \varphi\ dx$$

as n tends to infinity. Thus

$$\int_D u\ (\sigma\nabla f)\ \varphi^2\ dx = -\int_D \nabla.(u\ \sigma^*)\ f\ \varphi^2\ dx - 2\int_D u\ f\ (\ \overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi)\ \varphi\ dx$$

which implies that $f \in H(D,\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and $\overline{\sigma\nabla}^\varphi f = \sigma\nabla f$. ∎

Proposition 4.2.12 *If φ belongs to $H_o(D,\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and is bounded, then $H(D, dx, a\,dx)$ is a subset of $H(D,\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and for each $f \in H(D, dx, a\,dx)$: $\overline{\sigma\nabla}^\varphi f = \overline{\sigma\nabla}^{dx} f$.*

In particular, for such a φ, $H^1(D)$ is a subset of $H(D,\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and $\overline{\sigma\nabla}^\varphi f = \sigma\nabla f$ for each $f \in H^1(D)$.

Proof: Since $\|\ \|^2_{L^2(D,\varphi^2 dx)} \leq \|\varphi\|^2_\infty \|\ \|^2_{L^2(D,dx)}$, the $L^2_{loc}(D, dx)$ functions φ and $\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi$ belong to $L^2_{loc}(D,\varphi^2 dx)$. Let u be a $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ function, and $(\varphi_n)_n$ be a uniformly bounded sequence of $\mathcal{C}^\infty(D)$ functions converging to φ in $H(D, dx, a\,dx)$ on the support supp (u) such that φ_n and $\sigma\nabla\varphi_n$ also converge to φ and $\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi$ dx a.e. on supp (u)

Using bounded convergence theorem, we have :

$$\begin{aligned}
&\int \nabla.(\sigma^*\ u)\ f\ \varphi^2\ dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int \nabla.(\sigma^*\ u\ \varphi_n^2)\ f\ dx - \int u\ \sigma\nabla(\varphi_n^2)\ f\ dx \\
&= -\lim_{n\to+\infty} \int u\ \varphi_n^2\ (\ \overline{\sigma\nabla}^{dx} f)dx + 2\int u\ (\sigma\nabla\varphi_n)\ f\ \varphi_n\ dx \\
&= -\int u\ (\ \overline{\sigma\nabla}^{dx} f)\ \varphi^2 dx - 2\int u\ (\ \overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi)\ f\ \varphi\ dx
\end{aligned}$$

thus $f \in H(D,\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and $\overline{\sigma\nabla}^\varphi f = \overline{\sigma\nabla}^{dx} f$. ∎

The form $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\sigma_\varphi))$ is defined by

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{E}^\sigma_\varphi) = H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx) \\ \mathcal{E}^\sigma_\varphi(f,g) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D \overline{\sigma\nabla}^\varphi f.\ \overline{\sigma\nabla}^\varphi g\ \varphi^2\ dx \end{cases}$$

Prop 4.2.10 exactly means that this form is a closed form. We do not know if it is a Dirichlet form, because we do not know if it is Markovian.

The form $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c(D))$ is obviously Markovian. It is not closed, but it is closable, because $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\sigma_\varphi))$ is closed, and we will introduce

Definition 4.2.13 *The closure in $H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ of the space $\mathcal{C}^\infty_c(D)$ is denoted by $H_o(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$.*

The form $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, H_o(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$ is a Dirichlet form, as the smallest closed extension of a Markovian form. It is regular by construction.

We will prove here some properties of $H_o(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ which will be useful later.

Proposition 4.2.14 *If $f \in H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and $g \in H_o(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, and if one of them is bounded, thus $(fg) \in H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and $\overline{\sigma\nabla}(fg) = f\ \overline{\sigma\nabla} g + g\ \overline{\sigma\nabla} f$.*

Proof: There exists a sequence $(g_n)_n$ of $\mathcal{C}^\infty_c$ functions converging to g in $H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ (this sequence may be chosen uniformly bounded if g is bounded). For each $u \in \mathcal{C}^\infty_c$, use the integration by parts formula to get

$$-\int \nabla.(\sigma^* u)\ g_n\ f\ \varphi^2\ dx - 2\int u\ g_n\ f\ \frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi}\ \varphi^2\ dx$$

$$= \int (\ \overline{\sigma\nabla} f)\ g_n\ u\ \varphi^2\ dx + \int f\ (\sigma\nabla g_n)\ u\ \varphi^2\ dx$$

and let n go to infinity, using the boundedness of f or (g_n) to apply bounded convergence theorem. ∎

Definition 4.2.15 *Let us define $H_b(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ as the closure in $H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ of the space $H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx) \cap L^\infty(D, \varphi^2 dx)$.*

As in section 4.2.2, the space $H_{loc}(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ is defined by

$$H_{loc}(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx) = \left\{ f \in L^2_{loc}(D, \varphi^2 dx)\ \ /\ \ \forall g \in \mathcal{C}^\infty_c(D)\ \ \ fg \in H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx) \right\}$$

and for all $f \in H_{loc}(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, the σ-derivative $\overline{\sigma\nabla}^\varphi f \in L^2_{loc}(D, \varphi^2 dx)$ of f is defined by

$$\forall K \text{ compact subset of } D\quad \forall g \in \mathcal{C}^\infty_c(D)\ /\ g \equiv 1 \text{ on } K \qquad \overline{\sigma\nabla}^\varphi f = \overline{\sigma\nabla}^\varphi (gf) \text{ on } K$$

Thanks to prop 4.2.11 and 4.2.14, $H_{loc}(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ also is the set of the functions $f \in L^2_{loc}(D, \varphi^2 dx)$ such that there exists an $\mathbb{R}^d$-valued function $g \in L^2_{loc}(D, \varphi^2 dx)$ such that f and g verify the integration by parts formula (4.2.1). Of course, for $f \in H_{loc}(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$:

$$f \in H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx) \quad \Leftrightarrow \quad f \in L^2(D, \varphi^2 dx) \quad \text{and} \quad \overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f \in L^2(D, \varphi^2 dx)$$

The following theorem is a very important tool for the proof of our main theorem (th 4.3.4). It essentially says that the σ-derivative of a non-negative function belonging to $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ vanish where the function itself vanish. It is not clear that this property still holds for all functions in $H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$.

Theorem 4.2.16 *If f belongs to $H_o(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, then for each $g \in \mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R})$*

$$g \circ f \in H_{loc}(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx) \quad \text{and} \quad \overline{\sigma\nabla}^{\varphi}(g \circ f) = (g' \circ f)\ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f$$

As a consequence, each non-negative element f of $H_o(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ verifies $\overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f = (\ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f)\ \mathbb{1}_{f>0} \quad \varphi^2 dx$ a.s.
Similarly, if $f \in H_o(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ verifies $f \le M$ on D for an $M \in \mathbb{R}$, then $\overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f = (\ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f)\ \mathbb{1}_{f<M} \quad \varphi^2 dx$ a.s.

Proof: Let $f \in H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and $g \in \mathcal{C}^\infty_c$. First remark that $(g' \circ f)\ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f$ belongs to $L^2(D, \varphi^2 dx)$. Then take a sequence $(f_n)_n$ of $\mathcal{C}^\infty_c(D)$ functions converging to f in $H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ such that f_n and $\sigma\nabla f_n$ converge to f and $\overline{\sigma\nabla} f \quad \varphi^2 dx$ a.s. As a $\mathcal{C}^\infty_c(D)$ function, $g \circ f_n$ belongs to $H(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and verify the integration by parts formula :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{C}^\infty_c(D) \qquad & \int_D u\ (g' \circ f_n)\ (\sigma\nabla f_n)\ \varphi^2\ dx \\ & = -\int \nabla.(\sigma^* u)\ (g \circ f_n)\ \varphi^2\ dx - 2\int u\ (g \circ f_n)\ \frac{\overline{\sigma\nabla\varphi}}{\varphi}\ \varphi^2\ dx \end{aligned}$$

Using the bounded convergence theorem to pass to the limit in this equality, we obtain that $g \circ f \in H_{loc}(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and $\overline{\sigma\nabla}(g \circ f) = (g' \circ f)\ \overline{\sigma\nabla} f$.

Let us now prove the second assertion of the theorem. For $\varepsilon > 0$, we may find out an increasing $g_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R})$ such that $g_\varepsilon(x) = 2\varepsilon$ if $x \le \varepsilon$, $g_\varepsilon(x) = x$ if $3\varepsilon \le x \le \frac{1}{\varepsilon}$, $g_\varepsilon(x) = \frac{2}{\varepsilon}$ if $x \ge \frac{3}{\varepsilon}$, and $\|g'\|_\infty \le 1$.

For all $f \in H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, we have

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{C}^\infty_c(D) \qquad & \int_D u\ (g'_\varepsilon \circ f)\ (\sigma\nabla f)\ \varphi^2\ dx \\ & = -\int \nabla.(\sigma^* u)\ (g_\varepsilon \circ f)\ \varphi^2\ dx - 2\int u\ (g_\varepsilon \circ f)\ f\ \frac{\overline{\sigma\nabla\varphi}}{\varphi}\ \varphi^2\ dx \end{aligned}$$

If $f \ge 0$ on D,then $g_\varepsilon \circ f$ and $g'_\varepsilon \circ f$ converge, $\varphi^2 dx$ a.s. , to f and $\mathbb{1}_{f>0}$ when ε goes to 0, and this equality becomes :

$$\int_D u\ \mathbb{1}_{f>0}\ (\sigma\nabla f)\ \varphi^2\ dx = -\int \nabla.(\sigma^* u)\ f\ \varphi^2\ dx - 2\int u\ f\ \frac{\overline{\sigma\nabla\varphi}}{\varphi}\ \varphi^2\ dx$$

which proves the second assertion.

The proof of the third assertion is similar, replacing g_ε by $M - g_\varepsilon(M - \cdot)$. ∎

In particular, th 4.2.16 means that the form $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, H_o(D, \varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$ has the local property.

4.2.4 The process associated with $H(dx, a\,dx)$

In chap 3, our reference process was the Brownian motion. Since the reference form $(\mathcal{E}, H^1(dx))$ has been replaced here by the regular local form $(\mathcal{E}^\sigma, H(dx, a\,dx))$, the Brownian motion (i.e. the process associated with $(\mathcal{E}, H^1(dx))$) has to be replaced by the process $(\mathcal{C}([0,+\infty[, \mathbb{R}^d), (\mathcal{F}_t)_t, X, (W^\sigma_x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ associated with $(\mathcal{E}^\sigma, H(dx, a\,dx))$. Let us briefly describe this process :

We know that it is a solution of the martingale problem $\mathcal{M}(A^\sigma, \mathcal{C}^\infty_c)$, where $(A^\sigma, \mathcal{D}(A^\sigma))$ is the generator of $(\mathcal{E}^\sigma, H(dx, a\,dx))$. Using the integration by parts formula, we obtain

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty_c \quad A^\sigma f = \frac{\nabla.(a\nabla f)}{2}$$

This means that W^σ_x is the (unique) solution of the s.d.e.

$$X_t = x + \int_o^t \sigma(X_s)\; dB_s + \int_o^t \frac{\nabla.a}{2}(X_s)\; ds$$

The reversible measure for the Brownian motion, i.e. the Lebesgue measure dx, is a reversible measure for this process too : $W^\sigma_{dx} = \int_{\mathbb{R}^d} W^\sigma_x\; dx$ is time reversal invariant.

4.3 Regularity of $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$

Our aim here is to prove that, under assumption (H) below, the form $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$ is a regular Dirichlet form. More precisely, we will show that $\mathcal{C}^\infty_c$ is dense in $H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$.

We first work under the assumptions

(H) $\qquad \sigma \in \mathcal{C}^4_b, \qquad \varphi \in H(dx, a\,dx)$

and

(H') $\qquad \varphi \neq 0 \quad dx\ a.e.$

and we later will remove hypothesis (H').

The idea consists in showing that $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$ is the associated form of a certain $\varphi^2 dx$-reversible Probability measure $\overline{Q^\sigma_\varphi}$ on $\mathcal{C}([0,+\infty[, \mathbb{R}^d)$ which solves a martingale problem $\mathcal{M}(A^\sigma_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$, then in constructing the law Q^σ_φ of the process obtained by adding the drift $\frac{\sigma\overline{\nabla}\varphi}{\varphi}$ to the reference process $(W^\sigma_x)_x$ starting from $\varphi^2 dx$. Q^σ_φ is then a solution of $\mathcal{M}(A^\sigma_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$ and the uniqueness of the $\varphi^2 dx$ invariant solution of $\mathcal{M}(A^\sigma_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$ will imply that $Q^\sigma_\varphi = \overline{Q^\sigma_\varphi}$. Using these two descriptions of Q^σ_φ, we show that the $\varphi^2 dx$ reversible process associated with $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$ does not hit the set $\{\varphi = 0\}$ within a finite time, and deduce that $\mathcal{C}^\infty_c$ is dense in $H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$.

4.3.1 The process associated with $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$

From now on, we fix a σ and a φ verifying

(H) $\qquad \sigma \in \mathcal{C}^4_b, \qquad \varphi \in H(dx, a\,dx)$

Since $\varphi \in L^2(dx)$, after dividing by $\sqrt{\int \varphi^2\; dx}$ if necessary, we may assume that $\int \varphi^2\; dx = 1$, so $\varphi^2 dx$ is a Probability measure on $\mathbb{R}^d$.

Until the end of section 4.3, we also assume

(H') $$\varphi \neq 0 \quad dx \ a.e.$$

This assumption ensure that the support of the measure $\varphi^2 dx$ is the whole $\mathbb{R}^d$.

Since the Dirichlet form $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$ is regular and local, th 4.5.3 of [Fuk80] says that it has an associated $\varphi^2 dx$ symmetric Hunt process which is a diffusion process, thus it define a Probability measure $\overline{Q^\sigma_\varphi}$ on $\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R}^d)$.

Here, we want to prove that $\overline{Q^\sigma_\varphi}$ is a solution of $\mathcal{M}(A^\sigma_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$. We first study the generator $(A^\sigma_\varphi, \mathcal{D}(A^\sigma_\varphi))$ of the Dirichlet form $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$.

Fix an $f \in \mathcal{C}^\infty_c$. By definition of A^σ_φ :

$$\forall g \in \mathcal{D}(A^\sigma_\varphi) \qquad \mathcal{E}^\sigma_\varphi(f,g) = -\Big(f, A^\sigma_\varphi g\Big)_{L^2(\varphi^2 dx)}$$

But

$$\mathcal{E}^\sigma_\varphi(f,g) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int (\ \overline{\sigma\nabla} g)_i \ (\sigma\nabla f)_i \ \varphi^2 \ dx$$

and

$\forall g \in H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx) \quad \forall u \in \mathcal{C}^1_c \quad \forall i \in \{1,\cdots,d\}$

$$\int (\ \overline{\sigma\nabla} g)_i \ u \ \varphi^2 \ dx = -\int \ \sum_{k=1}^d \partial_k(\sigma^*_{ki} \ u) \ g \ \varphi^2 \ dx - 2\int u \ g \left(\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi}\right)_i \varphi^2 \ dx$$

(In order to prove this last formula, take a sequence $(g_n)_n$ of bounded functions converging to g in $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and a sequence $(u_k)_k$ of $\mathcal{C}^\infty_c$ functions converging to u in $H^1(dx)$ and dx a.e. such that the u_k and ∇u_k are uniformly bounded. Apply the integration by parts formula in $H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ to g_n and u_k and let first k, then n, go to $+\infty$.)

Thus

$$\mathcal{E}^\sigma_\varphi(f,g) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int \left[\sum_{k=1}^d \partial_k(\sigma^*_{ki} \ (\sigma\nabla f)_i) + 2(\sigma\nabla f)_i . \left(\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi}\right)_i\right] g \ \varphi^2 \ dx$$

i.e.

$$\forall g \in \mathcal{D}(A^\sigma_\varphi) \qquad \Big(f, A^\sigma_\varphi g\Big)_{L^2(\varphi^2 dx)} = \frac{1}{2}\left(\nabla.(\sigma^*\sigma\nabla f) + 2(\sigma\nabla f).\left(\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi}\right), g\right)_{L^2(\varphi^2 dx)}$$

This exactly means that $f \in \mathcal{D}((A^\sigma_\varphi)^*) = \mathcal{D}(A^\sigma_\varphi)$ and that

$$A^\sigma_\varphi f = \frac{\nabla.(\sigma^*\sigma\nabla f)}{2} + (\sigma\nabla f).\left(\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi}\right)$$

Consequently,

$$\mathcal{C}^\infty_c \subset \mathcal{D}(A^\sigma_\varphi) \quad \text{ and } \quad A^\sigma_\varphi = \frac{\nabla.(a\nabla\ )}{2} + \left(\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi}\right).\sigma\nabla \quad \text{on } \mathcal{C}^\infty_c$$

On the other hand, for all $f \in \mathcal{C}_c^\infty$, we have

$$\begin{aligned}
&E^{\overline{Q_\varphi^\sigma}}\left(\left[f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t A_\varphi^\sigma f(X_u)\, du\right] h(X_s)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left[T_{t-s}^o f - f - \int_o^{t-s} T_u^o A_\varphi^\sigma f\, du\right] h\, \varphi^2\, dx \\
&\quad \text{where } (T_t^o)_t \text{ is the semi-group associated with } A_\varphi^\sigma \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left[T_{t-s}^o f - f - \int_o^{t-s} \frac{d}{du} T_u^o f\, du\right] h\, \varphi^2\, dx \\
&\quad \text{because } \tfrac{d}{dt} T_{t|_{t_o}}^o = A_\varphi^\sigma T_{t_o}^o \text{ on } L^2(\varphi^2 dx) \\
&= 0
\end{aligned}$$

So $\overline{Q_\varphi^\sigma}$ is a solution of the martingale problem $\mathcal{M}(A_\varphi^\sigma, \mathcal{C}_c^\infty)$.

4.3.2 An explicit form for $\overline{Q_\varphi^\sigma}$

Our aim in this section is to find an explicit expression for $\overline{Q_\varphi^\sigma}$. To begin with, we construct a solution of the martingale problem $\mathcal{M}(A_\varphi^\sigma, \mathcal{C}_c^\infty)$.

A simple idea to construct a solution is to use a Girsanov theorem and take the Probability measure having exponential density with drift " $\frac{\nabla\varphi}{\varphi}$ " with respect to W_φ^σ. So we first want to give a meaning to the notation " $\frac{\nabla\varphi}{\varphi}$ ". Since φ only belongs to $H(dx, a\, dx)$ and not to $H^1(dx)$ a priori, " $\nabla\varphi$ " may be not defined, but there exists a sequence $(\varphi_n)_n$ of $\mathcal{C}_c^\infty$ functions such that $\sigma\nabla\varphi_n$ converges dx a.e. to $\overline{\sigma\nabla}\varphi$. For each $x \in \mathbb{R}^d$, $\sigma(x)$ is a one-to-one endomorphism from a complement space $V(x)$ of its kernel onto its image, so the sequence $\nabla\varphi_n(x)$ converges to $(\sigma(x)_{|V(x)})^{-1}(\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi)(x)$ for almost all x in $\mathbb{R}^d$. The function B_φ defined by

$$\begin{aligned}
B_\varphi &:= \frac{(\sigma(x)_{|V(x)})^{-1}(\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi)(x)}{\varphi} && \text{if} \quad \varphi \neq 0 \\
B_\varphi &:= 0 && \text{if} \quad \varphi = 0
\end{aligned}$$

is Borelian (as a limit of Borelian functions) and verify $\sigma B_\varphi = \overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi\ dx$ a.e. This function will play the same role here as $\frac{\nabla\varphi}{\varphi}$ in the " $\sigma = Id$ " case.

Remark 4.3.1 : There may be several such B_φ's, but this is not relevant since they all will define the same Probability measure Q_φ^σ (see prop 4.3.2).

Let us now introduce the stopping times

$$\tau_n = \inf\left\{t > 0 \;\;/\;\; \int_o^t \left|\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi}\right|^2 (X_s)\, ds \geq n\right\}$$

$$\tau = \sup_n \tau_n = \inf\left\{t > 0 \;\;/\;\; \int_o^t \left|\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi}\right|^2 (X_s)\, ds = +\infty\right\}$$

and the process $Z^{\sigma,\varphi}_t$ defined by

$$Z^{\sigma,\varphi}_t = 0 \quad \text{if } \tau > \tau_n \text{ for all } n \text{ and } t \geq \tau$$
$$Z^{\sigma,\varphi}_t = \exp\left(\int_o^{t\wedge\tau} B_\varphi(X_s).\left[dX_s - \frac{\nabla.a}{2}(X_s)\,ds\right] - \frac{1}{2}\int_o^{t\wedge\tau}\left|\frac{\overline{\sigma\nabla\varphi}}{\varphi}\right|^2(X_s)\,ds\right) \quad \text{elsewhere}$$

on the space $\Omega_T = \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$. W^σ_φ will denote the Probability measure $\int W^\sigma_x\,\varphi^2\,dx$ on Ω_T, (or more exactly its restriction to $[0,T]$).

The $(B_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$ weak Fokker-Planck equation is verified, i.e.

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d \times [0,T]) \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T$$
$$\int_{\mathbb{R}^d}(f(x,t) - f(x,s))\,\varphi^2(x)\,dx = \int_s^t\int_{\mathbb{R}^d}\left(A^\sigma_\varphi f(\cdot,u) + \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot,u)\right)(x)\varphi^2(x)\,dx\,du$$

thus according to theorem 4.18 of [CL94], the process $Z^{\sigma,\varphi}$ is a W^σ_φ martingale, and the measure Q^σ_φ defined by $dQ^\sigma_\varphi = Z^{\sigma,\varphi}_T dW^\sigma_\varphi$ is a $\varphi^2\,dx$ stationary strongly Markovian Probability measure on Ω_T, with relative entropy (cf [CL94] prop 2.1)

$$H(Q^\sigma_\varphi, W^\sigma_\varphi) = \frac{1}{2}E^{Q^\sigma_\varphi}\left(\int_o^T\left|\frac{\overline{\sigma\nabla\varphi}}{\varphi}\right|^2(X_s)\,ds\right) = \frac{T}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\,\overline{\sigma\nabla\varphi}\right|^2\,dx < +\infty$$

Moreover (cf [CL94] prop 4.6) :

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d) \quad f(X_t) - f(X_o) - \int_o^t A^\sigma_\varphi f(X_s)\,ds \quad \text{is an } L^2\ Q^\sigma_\varphi \text{ martingale}$$

that is, Q^σ_φ is a solution of $\mathcal{M}(A^\sigma_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$, and

$$Q^\sigma_\varphi(\tau = +\infty) = Q^\sigma_\varphi\left(\int_o^T\left|\frac{\overline{\sigma\nabla\varphi}}{\varphi}\right|^2(X_s)\,ds < +\infty\right) = 1$$

because

$$E^{Q^\sigma_\varphi}\left(\int_o^T\left|\frac{\overline{\sigma\nabla\varphi}}{\varphi}\right|^2(X_s)\,ds\right) = T\left\|\,\overline{\sigma\nabla\varphi}\right\|^2_{L^2(dx)} < +\infty$$

Thus applying [Jac79] th 12.57, we obtain

Proposition 4.3.2 *Q^σ_φ is the unique solution Q of $\mathcal{M}(A^\sigma_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$ such that $Q \circ X_o^{-1} = \varphi^2 dx$ and $Q(\tau = +\infty) = 1$. In particular, Q^σ_φ is the unique $\varphi^2 dx$ stationary solution of $\mathcal{M}(A^\sigma_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$.*

Since the distribution $\overline{Q^\sigma_\varphi}$ of the $\varphi^2 dx$ symmetric process associated with $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$ also is solution of $\mathcal{M}(A^\sigma_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$, this means that $\overline{Q^\sigma_\varphi} = Q^\sigma_\varphi$.

4.3.3 Hitting time of $\{\varphi = 0\}$

Let us now define the stopping times

$$\theta_n = \inf\{t \geq 0 \ / \ \varphi(X_t) \notin [\tfrac{1}{n}, n]\}$$
$$\text{and} \quad \theta = \sup_n \theta_n$$

In [MZ85], Meyer and Zheng showed that $Q^\sigma_\varphi(\theta < +\infty) = 0$. For the sake of completeness, we shall reproduce here a slightly modified proof of this result (see the proof of prop 3.4.3 in chap 3).

Proposition 4.3.3 $Q^\sigma_\varphi(\theta < +\infty) = 0$

Proof: We first fix an $n \in \mathbb{N}^*$ and a $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ increasing function Θ_n verifying : $\|\Theta'_n\|_\infty \leq 1$, $\Theta_n(x) = \frac{1}{n+1}$ on $]-\infty; \frac{1}{n+2}]$, $\Theta_n(x) = x$ on $[\frac{1}{n}; n]$ and $\Theta_n(x) = n+1$ on $[n+2; +\infty[$. Consider the function $\varphi_n = \Theta_n \circ \varphi$ which belongs to $H_{loc}(dx, a\,dx)$ according to th 4.2.16. One may find a sequence $(\varphi^k_n)_k$ of $\mathcal{C}^\infty$ functions with values in $[\frac{1}{n+1}, n+1]$ such that

$$\varphi^k_n \longrightarrow \varphi_n \text{ in } L^2_{loc}(dx) \text{ and } dx \text{ a.s.}$$

$$\overline{\sigma\nabla}\varphi^k_n \longrightarrow \overline{\sigma\nabla}\varphi_n = (\Theta'_n \circ \varphi) \ \ \overline{\sigma\nabla}\varphi \text{ in } L^2(dx)$$

(See the proofs of th 2.2.8 and prop 2.2.17 in chap 2)

Using Ito's formula with the $\mathcal{C}^\infty$ function $\ln \varphi^k_n$, we get

$$\begin{aligned} K^k_t \ &:= \ (\ln\varphi^k_n)(X_t) - (\ln\varphi^k_n)(X_o) - \int_o^t \left(\frac{\nabla\varphi^k_n}{\varphi^k_n}.\frac{\nabla.a}{2}\right)(X_s)\ ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_o^t Tr\left(aD^2(\ln\varphi^k_n)\right)(X_s)\ ds \\ &= \ \int_o^t \frac{\nabla\varphi^k_n}{\varphi^k_n}(X_s)\left[dX_s - \frac{\nabla.a}{2}(X_s)\ ds\right] \qquad \forall t\in[0,T] \quad W^\sigma_x \text{ a.s.} \end{aligned}$$

and applying the forward and backward version of this result at the instants t, T and $t-T$, we obtain

$$2\left[(\ln\varphi^k_n)(X_t) - (\ln\varphi^k_n)(X_o)\right] = K^k_t + K^k_{T-t}\circ r_T + K^k_T \circ r_T \quad \forall t\in[0,T]$$

where r_T denotes the time reversal operator on $\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d)$.
Since $W^\sigma_{dx} = \int W^\sigma_x\ dx$, we also have

$$K^k_t = \int_o^t \frac{\nabla\varphi^k_n}{\varphi^k_n}(X_s)\left[dX_s - \frac{\nabla.a}{2}(X_s)\ ds\right] \quad \forall t\in[0,T] \quad W^\sigma_{dx} \text{ a.s.}$$

Thus if $K_t := \displaystyle\int_o^t (\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi_n}{\varphi_n})(X_s)\left[dX_s - \frac{\nabla.a}{2}(X_s)\ ds\right]$, the bounded convergence theorem, Doob's inequality and the stationarity of W^σ_{dx} give that :

$$
\begin{aligned}
& E^{W^\sigma_{dx}}\left(\sup_{0\le t\le T} |K^k_t - K_t|^2\right) \\
\le\ & C^{ste}\ E^{W^\sigma_{dx}}\left(\int_o^T \left|\frac{\sigma\nabla\varphi^k_n}{\varphi^k_n} - \frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi_n}{\varphi_n}\right|^2 (X_s)\ ds\right) \\
\le\ & C^{ste}\ T\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(\varphi^k_n\varphi_n)^2}\left|\varphi_n(\sigma\nabla\varphi^k_n - \ \overline{\sigma\nabla}\varphi_n) - (\ \overline{\sigma\nabla}\varphi_n)(\varphi^k_n - \varphi_n)\right|^2\ dx\right) \\
\le\ & C^{ste}\ T\left(2\ (n+1)^6 \left\|\sigma\nabla\varphi^k_n - \ \overline{\sigma\nabla}\varphi_n\right\|^2_{L^2(dx)} + 2(n+1)^4\int_{\mathbb{R}^d} |\ \overline{\sigma\nabla}\varphi|^2\ |\varphi^k_n - \varphi_n|^2\ dx\right) \\
& \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

Up to a subsequence, we may assume that this convergence also holds W^σ_{dx} a.s., and $W^\sigma_{dx}\circ r_T^{-1}$ since W^σ_{dx} is symmetric. This implies that

$$
\begin{aligned}
K^k_t + K^k_{T-t}\circ r_T + K^k_T\circ r_T \ \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ & K_t + K_{T-t}\circ r_T + K_T\circ r_T \\
& \forall t\in[0,T] \quad W^\sigma_{dx} \text{ a.s.}
\end{aligned}
$$

On the other hand, for a fixed $t\in[0,T]$, the convergence dx a.s. of φ^k_n to φ_n implies the convergence W^σ_{dx} a.s. of $(\ln\varphi^k_n)(X_t)$ to $(\ln\varphi_n)(X_t)$, and since X and K are continuous processes, it follows

$$
\begin{aligned}
(\ln\varphi^k_n)(X_t) - (\ln\varphi^k_n)(X_o) = \ & K_t + K_{T-t}\circ r_T + K_T\circ r_T \\
& \forall t\in[0,T] \quad W^\sigma_{dx} \text{ a.s.}
\end{aligned}
$$

This equality also holds Q^σ_φ a.s. because $Q^\sigma_\varphi << W^\sigma_\varphi << W^\sigma_{dx}$. We know that Q^σ_φ is a solution of the martingale problem $\mathcal{M}(A^\sigma_\varphi, \mathcal{C}^\infty_c)$, thus

$$
X_\cdot - X_o - \int_o^\cdot \frac{\nabla.a}{2}(X_s)\ ds \quad \text{is an } L^2\ Q^\sigma_\varphi \text{ martingale}
$$

$$
\text{and } \left\langle X_\cdot - X_o - \int_o^\cdot \frac{\nabla.a}{2}(X_s)\ ds\right\rangle = \int_o^\cdot a(X_s)\ ds
$$

This implies that K is an L^2 Q^σ_φ martingale and

$$
\langle K\rangle = \int_o^\cdot \left|\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi_n}{\varphi_n}\right|^2 (X_s)\ ds = \int_o^\cdot \left|\frac{\Theta'_n\circ\varphi}{\Theta_n\circ\varphi}\ \overline{\sigma\nabla}\varphi\right|^2 (X_s)\ ds
$$

Then using the symmetry of Q^σ_φ and Doob's inequality :

$$
\begin{aligned}
&Q^\sigma_\varphi\left(\sup_{[0,T]}\left|(\ln\varphi_n^k)(X_t)-(\ln\varphi_n^k)(X_o)\right|>\lambda\right)\\
&\leq\ Q^\sigma_\varphi\left(\sup_{[0,T]}|K_t|>\frac{\lambda}{2}\right)\\
&\leq\ \frac{4}{\lambda}T\int_{\mathbb{R}^d}|\ \overline{\sigma\nabla}\varphi|^2\left(\frac{\varphi}{\Theta_n\circ\varphi}\right)^2(\Theta_n'\circ\varphi)^2\ dx\\
&\leq\ \frac{4}{\lambda}T\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\int_{\mathbb{R}^d}|\ \overline{\sigma\nabla}\varphi|^2\ dx\\
&\leq\ \frac{16}{\lambda}T\left\|\ \overline{\sigma\nabla}\varphi\right\|^2_{L^2(dx)}
\end{aligned}
$$

And we now can conclude this proof :

$$
\begin{aligned}
&Q^\sigma_\varphi(\theta<+\infty)\\
&\leq\ Q^\sigma_\varphi(\varphi(X_o)=0)+Q^\sigma_\varphi(\{\varphi(X_o)>0\}\cap\{\theta\leq T\})\\
&\leq\ 0+\lim_{a\to 0}\lim_{n\to+\infty}Q^\sigma_\varphi(\{\varphi(X_o)>a\}\cap\{\theta_n\leq T\})\\
&\leq\ \lim_{a\to 0}\lim_{n\to+\infty}Q^\sigma_\varphi(\{(\ln\varphi_n)(X_o)>\ln a\}\cap\{\exists t\leq T\ /\ (\ln\varphi_n)(X_t)\notin[-\ln n;\ln n]\})\\
&\leq\ \lim_{a\to 0}\lim_{n\to+\infty}Q^\sigma_\varphi\left(\sup_{[0,T]}\left|(\ln\varphi_n^k)(X_t)-(\ln\varphi_n^k)(X_o)\right|>|\ln a+\ln n|\wedge|\ln a-\ln n|\right)\\
&\leq\ \lim_{a\to 0}\lim_{n\to+\infty}\frac{16\ T}{|\ln(na)|\wedge\left|\ln\left(\frac{n}{a}\right)\right|}\left\|\ \overline{\sigma\nabla}\varphi\right\|^2_{L^2(dx)}\\
&=\ 0
\end{aligned}
$$

∎

4.3.4 Density of $\mathcal{C}_c^\infty$ in $H_b(\varphi^2dx, a\,\varphi^2dx)$

We now can state and prove the result we wanted.

Theorem 4.3.4 *$\mathcal{C}_c^\infty$ is dense in $H(\varphi^2dx, a\,\varphi^2dx)\cap L^\infty(\varphi^2dx)$, i.e. $H_b(\varphi^2dx, a\,\varphi^2dx)$ is equal to $H_o(\varphi^2dx, a\,\varphi^2dx)$. In particular, $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, H_b(\varphi^2dx, a\,\varphi^2dx))$ is a regular Dirichlet form.*

Proof :
Consider the regular local Dirichlet form $(\mathcal{E}^\sigma_\varphi, H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$ and its associated Hunt process $(\mathcal{C}([0,+\infty[), (\mathcal{F}_t)_t, (X_t)_t, (Q^\sigma_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$. As said in §4.3.1, $Q^\sigma_\varphi = \overline{Q^\sigma_\varphi} = \int Q^\sigma_x \varphi^2\; dx$.

Let χ_n be the 1-equilibrium potential of the Borelian set $\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}$ with respect to this Dirichlet form :

$$Cap\left(\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}\right) = \|\chi_n\|^2_{L^2(dx)} + \mathcal{E}^\sigma_\varphi(\chi_n, \chi_n)$$

where Cap denotes the associated capacity.

Like every element of $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, χ_n is defined $\varphi^2 dx$ a.s., and we can choose the version

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \qquad \chi_n(x) = E^{Q^\sigma_x}\left(e^{-\theta_n}\right)$$

(see [Fuk80] th 4.3.5 and definition (4.1.5))

According to [Fuk80] (3.3.2) and (3.3.3), we have

$$0 \le \chi_n \le 1, \quad \chi_n \equiv 1 \;\; \varphi^2 dx \;\, a.s. \text{ on } \{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}$$

$$\text{and } Cap\left(\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}\right) = \int \chi_n\; \varphi^2\; dx = E^{Q^\sigma_\varphi}(e^{-\theta_n})$$

thus prop 4.3.3 implies that $\lim_{n\to+\infty} Cap\left(\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}\right) = 0$, which in turn implies that χ_n and $\overline{\sigma\nabla}\chi_n$ converge to 0 in $L^2(\varphi^2 dx)$. In the sequel, we will assume that these convergences also hold $\varphi^2 dx$ almost surely (after extracting a subsequence if necessary). Moreover, χ_n verify the hypothesis of th 4.2.16 with $M = 1$, thus $\overline{\sigma\nabla}^\varphi \chi_n = \overline{\sigma\nabla}^\varphi \chi_n\; \mathbb{1}_{\chi_n < 1}$.

Take an $f \in H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx) \cap L^\infty(\varphi^2 dx)$. We may, and will, choose a $\varphi^2 dx$ version of f which is bounded. We want to show that f is the limit of a sequence of elements of $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$.

First remark that $(\chi_n f) \in H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and $\overline{\sigma\nabla}(\chi_n f) = f\;\overline{\sigma\nabla}\chi_n + \chi_n\;\overline{\sigma\nabla} f$ thanks to lemma 4.2.14.

For n large enough, the distance between f and $(1-\chi_n)f$ in $H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ is as small as we want because

$$\begin{aligned}
&\|f - (1-\chi_n)f\|^2_{H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)} \\
&= \|\chi_n f\|^2_{H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)} \\
&\le \|f\|^2_\infty \left(\|\chi_n\|^2_{L^2(\varphi^2 dx)} + 2\left\|\,\overline{\sigma\nabla}\chi_n\right\|^2_{L^2(\varphi^2 dx)}\right) + 2\int |\chi_n\;\; \overline{\sigma\nabla} f|^2\; \varphi^2\; dx \\
&\le \|f\|^2_\infty\; 4\; Cap\left(\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}\right) + 2\int |\chi_n\;\; \overline{\sigma\nabla} f|^2\; \varphi^2\; dx \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

(recall that $\chi_n \longrightarrow 0 \quad \varphi^2 dx$ a.s. and use bounded convergence theorem).

So we only have to find out elements of $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ which are as near as we want from $(1-\chi_n)f$, for n large enough.

The function $(1-\chi_n)f \in H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ is bounded. It vanishes on $\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}$ (because $\chi_n = 1$ a.s. on this set), and its σ-derivative also vanishes on $\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}$ because

$$\overline{\sigma\nabla}^{\varphi}\left((1-\chi_n)\ f\right) = (\ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f)\ (1-\chi_n) - f\ \ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi}\chi_n$$

Thus $(1-\chi_n)f$ satisfy the hypothesis of the following lemma, which will be proved later.

Lemma 4.3.5 *If $g \in H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ is bounded and if g and $\overline{\sigma\nabla} g$ vanish on $\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}$, then $g \in H(dx, a\,dx)$ and $\overline{\sigma\nabla}^{\varphi} g = \ \overline{\sigma\nabla}^{dx} g$.*

According to this lemma, since $\mathcal{C}_c^\infty$ is dense in $H(dx, a\,dx)$, we can find out a sequence $(\psi_n^k)_k$ of $\mathcal{C}_c^\infty$ functions such that

$$\psi_n^k \ \xrightarrow[k\to+\infty]{H(dx,a\,dx)}\ (1-\chi_n)\ f$$

and we can choose $(\psi_n^k)_k$ uniformly bounded by $\|f\|_\infty$.

For all n and all k, the function $(1-\chi_n)\psi_n^k$ is a bounded element of $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ vanishing on $\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}$, with σ-derivative $\overline{\sigma\nabla}\varphi((1-\chi_n)\psi_n^k) = -\psi_n^k\ \ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi}\chi_n + (1-\chi_n)\ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi}\psi_n^k$ also vanishing on $\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}$.
Moreover

$$\begin{aligned}
&\left\|(1-\chi_n)\psi_n^k - (1-\chi_n)f\right\|^2_{L^2(\varphi^2 dx)} \\
&\quad\leq\ 2\int \left(\psi_n^k - (1-\chi_n)f\right)^2\ \left(\mathbb{I}_{\{\varphi\in[\frac{1}{n},n]\}}\ \varphi\right)^2\ dx + 2\int \left(\chi_n\ \psi_n^k\right)^2\ \varphi^2\ dx \\
&\quad\leq\ 2n^2\left\|\psi_n^k - (1-\chi_n)f\right\|^2_{L^2(dx)} + 2\|f\|^2_\infty \|\chi_n\|^2_{L^2(\varphi^2 dx)}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\left\|\ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi}((1-\chi_n)\psi_n^k) -\ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi}((1-\chi_n)f)\right\|^2_{L^2(\varphi^2 dx)} \\
&\quad=\ 2\int \Big|(1-\chi_n)\left[\sigma\nabla\psi_n^k -\ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi}((1-\chi_n)f)\right] \\
&\qquad\qquad -\ \chi_n\ (1-\chi_n)\ \ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f + (\chi_n\ f - \psi_n^k)\ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi}\chi_n\Big|^2\ \left(\mathbb{I}_{\{\varphi\in[\frac{1}{n},n]\}}\ \varphi\right)^2\ dx \\
&\quad\leq\ 3\ n^2\left\|\sigma\nabla\psi_n^k) -\ \overline{\sigma\nabla}^{dx}((1-\chi_n)f)\right\|^2_{L^2(dx)} \\
&\qquad + 3\int\left|\chi_n\ \ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi} f\right|^2\ \varphi^2\ dx + 3\times 2\|f\|^2_\infty\left\|\ \overline{\sigma\nabla}^{\varphi}\chi_n\right\|^2_{L^2(\varphi^2 dx)}
\end{aligned}$$

Thus for n large enough, we can find a k depending on n such that $(1-\chi_n)\psi_n^k$ is as near as we want from $(1-\chi_n)f$ in $H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$.

It only remains to show lemma 4.3.5 and the proof of th 4.3.4 will be complete.

Proof of lemma 4.3.5 :
First remark that $\overline{\sigma\nabla}^\varphi g \in L^2(dx)$ since

$$\int |\ \overline{\sigma\nabla}^\varphi g|^2\ dx \le n^2 \int |\ \overline{\sigma\nabla}^\varphi g|^2\ \varphi^2\ dx < +\infty$$

For the same reason, g also belongs to $L^2(dx)$.
Consider again the function $\varphi_n = \Theta_n \circ \varphi$ introduced in the proof of prop 4.3.3. This function belongs to $H_{loc}(dx, a\,dx)$ and we know that $\overline{\sigma\nabla}\varphi_n = (\Theta'_n \circ \varphi)\ (\ \overline{\sigma\nabla}\varphi)$.
Take a $\mathcal{C}^\infty_c(\mathrm{I\!R})$ function Ξ verifying $\Xi(x) = \frac{1}{x^2}$ on $\{\varphi \in [\frac{1}{n+1}, n+1]\}$ and apply prop 4.2.6iii to get

$$\begin{aligned} &\Xi \circ \varphi_n = \frac{1}{\varphi_n^2} \in H_{loc}(dx, a\,dx) \\ \text{and} \quad &\overline{\sigma\nabla}^{dx}(\Xi\circ\varphi_n) = (\Xi'\circ\varphi_n)\ (\Theta'_n\circ\varphi)\ (\ \overline{\sigma\nabla}\varphi) = \frac{-2}{\varphi_n^3}\ (\Theta'_n\circ\varphi)\ (\ \overline{\sigma\nabla}\varphi) \end{aligned}$$

It follows that for each $u \in \mathcal{C}^\infty_c$

$$\begin{aligned} &\frac{u}{\varphi_n^2} \in H(dx, a\,dx) \\ \text{and} \quad &\overline{\sigma\nabla}^{dx}\left(\frac{u}{\varphi_n^2}\right) = \frac{-2u}{\varphi_n^3}\ (\Theta'_n\circ\varphi)\ (\ \overline{\sigma\nabla}\varphi) + \frac{1}{\varphi_n^2}\ \sigma\nabla u \end{aligned}$$

Hence $\dfrac{u}{\varphi_n^2}$ is the limit in $H(dx, a\,dx)$ of a sequence $(u_n^k)_k$ of $\mathcal{C}^\infty_c$ functions. As usual, we assume that this convergence also holds dx a.s. and that $\left\|u_n^k\right\|_\infty \le \left\|\dfrac{u}{\varphi_n^2}\right\|_\infty$ for all k.
Let us write the integration by parts formula in $H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$

$$\int u_n^k\ (\ \overline{\sigma\nabla}^\varphi g)\ \varphi^2\ dx = -\int \left(\sigma\nabla u_n^k + u_n^k \nabla.\sigma^*\right)\ g\ \varphi^2\ dx - 2\int u_n^k\ g\ \frac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi}\ \varphi^2\ dx$$

and let k go to infinity :

$$\int \frac{u}{\varphi_n^2}\ (\ \overline{\sigma\nabla}^\varphi g)\ \varphi^2\ dx = -\int \left(\ \overline{\sigma\nabla}^{dx}\left(\frac{u}{\varphi_n^2}\right) + \frac{u}{\varphi_n^2}\nabla.\sigma^*\right)\ g\ \varphi^2\ dx - 2\int \frac{u}{\varphi_n^2}\ g\ \frac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi}\ \varphi^2\ dx$$

Since g and $\overline{\sigma\nabla}g$ vanish on $\{\varphi_n \ne \varphi\}$, this could be rewritten :

$$\int u\ (\ \overline{\sigma\nabla}^\varphi g)\ dx = -\int \left(\frac{-2u}{\varphi_n}\ \ \overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi + \sigma\nabla u + u\ \nabla.\sigma^*\right)\ g\ dx - 2\int u\ g\ \frac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi_n}\ \ dx$$

and reduces to

$$\int u\ (\ \overline{\sigma\nabla}^\varphi g)\ dx = -\int \nabla.(\sigma^*\ u)\ g\ dx$$

Consequently, $g \in H(dx, a\,dx)$ and $\overline{\sigma\nabla}^{dx} g = \ \overline{\sigma\nabla}^\varphi g$. ∎

4.3.5 When φ is allowed to vanish

In this section, we will extend the results of sections 4.3.1, 4.3.2 and 4.3.3 to the case of a general $\varphi \in H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, assuming no more that $\varphi \neq 0 \quad dx$ a.e. So we work under the only assumption :

$$(H) \qquad \sigma \in \mathcal{C}_b^4, \qquad \varphi \in H(dx, a\,dx)$$

Remark that in section 4.3.1, assumption (H') was only needed to ensure the existence of an associated diffusion for the form $(\mathcal{E}_\varphi^\sigma, H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$ via th 4.5.3 of [Fuk80]. Then the law of this diffusion solved the martingale problem $\mathcal{M}(A_\varphi^\sigma, \mathcal{C}_c^\infty)$ and the uniqueness of the solution of $\mathcal{M}(A_\varphi^\sigma, \mathcal{C}_c^\infty)$ gave the reversibility of Q_φ^σ.

We will follow the same idea here, using results of [FOT94].

Let Γ denote the support in $\mathbb{R}^d$ of the Probability measure $\varphi^2 dx$, i.e. Γ is the adherence of the union of all open subsets $\mathcal{O}$ of $\mathbb{R}^d$ verifying $(\varphi^2 dx)(\mathcal{O}) > 0$. The Probability measure $\varphi^2 dx$ on $\mathbb{R}^d$ clearly define, by restriction, a Probability measure on Γ, still denoted by $\varphi^2 dx$.

Γ is a closed subset of the Lusin space $\mathbb{R}^d$, thus it is a Lusin space. Consequently, Γ and $\varphi^2 dx$ verify hypothesis (7.3.1) of [FOT94].

Define the form $(\mathcal{E}^\Gamma, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma))$ on $L^2(\Gamma, \varphi^2 dx)$ by :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma) = \left\{ f_{|\Gamma} \;\; / \;\; f \in H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx) \right\} \\ \mathcal{E}^\Gamma(f,g) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_D \overline{\sigma\nabla^\varphi} \hat{f}.\, \overline{\sigma\nabla^\varphi} \hat{g} \varphi^2 \; dx \end{cases}$$

where $f_{|\Gamma}$ denotes the restriction to Γ of a function $f \in L^2(\varphi^2 dx)$ and $\hat{f}$ denotes, for $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma)$, an element of $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ verifying $f_{|\Gamma} = f$. Of course, $\mathcal{E}^\Gamma(f,g)$ does not depend on the choice of $\hat{f}$ and $\hat{g}$.

Since $\|f\|^2_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma)} = \|f\|^2_{L^2(\Gamma, \varphi^2 dx)} + \mathcal{E}^\Gamma(f,f) = \left\|\hat{f}\right\|^2_{H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)}$, the closeness of $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ implies that $(\mathcal{E}^\Gamma, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma))$ is a closed form. Moreover, the density of $\mathcal{C}_c^\infty$ in $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ implies the density of

$$\mathcal{C}_c^\infty{}_{|\Gamma} = \left\{ f_{|\Gamma} \;\; / \;\; f \in \mathcal{C}_c^\infty \right\}$$

in $\mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma)$ for $\| \;\|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma)}$, which implies the Markovianity of $(\mathcal{E}^\Gamma, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma))$.

Consequently, $(\mathcal{E}^\Gamma, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma))$ is a Dirichlet form.

Proposition 4.3.6 *The space $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ is separable, i.e. it has a countable dense subset.*

Proof: There exists an isometry ($f \longrightarrow (f, \; \overline{\sigma\nabla} f)$) between $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ and a subset of the separable space $L^2(\varphi^2 dx) \times (L^2(\varphi^2 dx))^d$, thus $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ is separable. ∎

Consider a countable dense subset U of $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, a countable subset V of $\mathcal{C}_c^\infty$ which separates points of $\mathbb{R}^d$, and let $(u_n)_n$ be a sequence of $\mathcal{C}_c^\infty$ functions which approximate u in $H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, for each $u \in U$. The sub-algebra $\mathcal{A}$ of $\mathcal{C}_c^\infty$ generated by $V \cup \{u_n \; / \; u \in U, n \in \mathbb{N}\}$ is dense in $H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, and the set $\mathcal{A}_{|\Gamma}$ verify condition (C) of [FOT94] section 7.3, that is

- $\mathcal{A}_{|\Gamma}$ is a countably generated sub-algebra of $\mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma) \cap \mathcal{C}_b^o(\Gamma)$.
- $\mathcal{A}_{|\Gamma}$ is dense in $\mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma)$ for $\| \ \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma)}$.
- $\mathcal{A}_{|\Gamma}$ separates points of Γ and $\forall x \in \Gamma \quad \exists f \in \mathcal{A}_{|\Gamma} \quad / \quad f(x) \neq 0$.

Let $Cap_{\mathcal{E}^\Gamma}$ denotes the capacity associated with $(\mathcal{E}^\Gamma, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma))$. We claim that this capacity is tight, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \text{ compact of } \Gamma \quad / \quad Cap_{\mathcal{E}^\Gamma}(\Gamma - K) < \varepsilon$$

Proof: For $n \geq 2$, let $B(0,n)$ denotes the closed ball with center 0 and radius n, and let f_n be a $\mathcal{C}_c^\infty$ function with value 0 on $B(0,n-2)$ and 1 on $B(0,n)^c$ such that $\|f\|_\infty \leq 1$ and $\|\nabla f\|_\infty \leq 1$. For all n, $B(0,n) \cap \Gamma$ is a compact subset of Γ and

$$\begin{aligned} Cap_{\mathcal{E}^\Gamma}(\Gamma - (B(0,n)\cap\Gamma)) &\leq \|f_{n|\Gamma}\|^2_{L^2(\Gamma,\varphi^2 dx)} + \mathcal{E}^\Gamma(f_{n|\Gamma}, f_{n|\Gamma}) \\ &\leq \int_{B(0,n-2)^c} \varphi^2 \, dx + \frac{1}{2}\|\sigma\|_\infty^2 \int_{B(0,n-2)^c} \varphi^2 \, dx \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

which proves the tightness of $Cap_{\mathcal{E}^\Gamma}$. ∎

The form $(\mathcal{E}^\Gamma, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma))$ complies with conditions (7.3.1), (C) and (7.3.2) of [FOT94]. Moreover, it is local in the sense of [FOT94] (7.3.12), thanks to th 4.2.16.

Thus we may apply th 7.3.2 of [FOT94] :
There exists a $\varphi^2 dx$ symmetric Hunt process on Γ which is associated with $(\mathcal{E}^\Gamma, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma))$. This process is a diffusion in the sense of [FOT94] (4.5.2).

We denote by Q^Γ the law of this process starting from $\varphi^2 dx$. Q^Γ may be considered as a Probability measure on $\mathcal{C}([0,+\infty[, \mathbb{R}^d)$ because if ξ denotes the explosion time of the paths :

$$Q^\Gamma(\xi = +\infty) = \lim_{n\to+\infty} Q^\Gamma(X_n \in \Gamma) = (\varphi^2 dx)(\Gamma) = 1$$

For the same reason as in section 4.3.1, we have that :

- ${\mathcal{C}_c^\infty}_{|\Gamma} \subset \mathcal{D}(A^\Gamma)$ and $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty \quad A^\Gamma(f_{|\Gamma}) = (A_\varphi^\sigma f)_{|\Gamma}$.
- Q^Γ is a solution of $\mathcal{M}(A^\Gamma, {\mathcal{C}_c^\infty}_{|\Gamma})$

Thus Q^Γ, considered as a Probability measure on $\mathcal{C}([0,+\infty[, \mathbb{R}^d)$, is a $\varphi^2 dx$-symmetric solution of $\mathcal{M}(A_\varphi^\sigma, \mathcal{C}_c^\infty)$ with paths in Γ. Th 4.3.2 then says that $Q^\Gamma = Q_\varphi^\sigma$, and according to prop 4.3.3 $Q^\Gamma(\theta < +\infty) = 0$.

Now consider the Hunt process $(\Omega, (\mathcal{F}_t^\Omega)_t, Y, (Q_x^\Gamma)_{x\in\Gamma})$ associated with $(\mathcal{E}^\Gamma, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma))$, and let χ_n^Γ denote the 1-equilibrium potential of $\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}$ with respect to $(\mathcal{E}^\Gamma, \mathcal{D}(\mathcal{E}^\Gamma))$.

According to (iii) of [FOT94] p 307, we may choose this version of χ_n^Γ :

$$\forall x \in \Gamma \qquad \chi_n^\Gamma(x) = E^{Q_x^\Gamma}\left(e^{-\inf\{t>0 \ / \ \varphi(Y_t)\notin[\frac{1}{n},n]\}}\right)$$

and we have

$$\begin{aligned} Cap_{\mathcal{E}^\Gamma}(\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}) &= \left\|\chi_n^\Gamma\right\|^2_{L^2(dx)} + \mathcal{E}^\Gamma(\chi_n^\Gamma, \chi_n^\Gamma) \\ &= \int \chi_n^\Gamma \, \varphi^2 \, dx \\ &= E^{Q^\Gamma}\left(e^{-\inf\{t>0 \ / \ \varphi(X_t) \notin [\frac{1}{n}, n]\}}\right) \end{aligned}$$

This last equality, and the fact that $Q^\Gamma(\theta < +\infty) = 0$, proves that

$$\lim_{n \to +\infty} Cap_{\mathcal{E}^\Gamma}(\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}) = 0$$

Thus if, for each n, we choose a $\chi_n \in H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ verifying $\chi_{n|\Gamma} = \chi_n^\Gamma$, this χ_n will have the same properties as the χ_n used in the proof of th 4.3.4 :

- $\chi_n \in H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$
- χ_n and $\overline{\sigma\nabla}\chi_n$ converge to 0 in $L^2(\varphi^2 dx)$
- $0 \leq \chi_n \leq 1$ and $\chi_n = 1$ on $\{\varphi \notin [\frac{1}{n}, n]\}$

Using exactly the same proof, we obtain the same result :

Theorem 4.3.7 *If $\sigma \in \mathcal{C}_b^4$ and $\varphi \in H(dx, a\,dx)$, then $\mathcal{C}_c^\infty$ is dense in $H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, i. e. $H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx) = H_o(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$. In particular, $(\mathcal{E}_\varphi^\sigma, H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx))$ is a regular Dirichlet form.*

4.4 Invariant measures

We now want to apply the preceding results about $H_b(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ to the study of the invariant measures for the associated process.

Framework :
In this last section, we will work under the assumption :
(HAC) $\qquad \forall x_o \in \mathbb{R}^d \quad \forall t \in [0,T] \quad W_{x_o}^\sigma \circ X_t^{-1} << dx$

A measure μ on $\mathbb{R}^d$ will be called invariant for the process $(\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d), (\mathcal{F}_t)_t, X, (Q_x^\sigma)_x)$ if the measure $Q_\mu^\sigma = \int_{\mathbb{R}^d} Q_x^\sigma \, d\mu(x)$ is stationary. It will be called symmetric if Q_μ^σ is time reversal invariant, that is $Q_\mu^\sigma \circ r_T = Q_\mu^\sigma$.

To begin with, we have to choose a good disintegration $(Q_x^\sigma)_x$ of the Probability measure Q_φ^σ. The first step consists in choosing a good (dx a. e.) version of φ.

4.4.1 Choice of a nice version of φ

Consider the solutions W_x^σ of the s.d.e.'s

$$X_t = x + \int_o^t \sigma(X_s)\, dB_s + \int_o^t \frac{\nabla.a}{2}(X_s)\, ds$$

and their associated regular Dirichlet form $(\mathcal{E}^\sigma, H(dx, a\,dx))$. According to [Fuk80] th 3.1.3 and th 4.3.2(i), since $\varphi \in H(dx, a\,dx)$, there exists an $L^2(dx)$ version (still denoted by φ) of φ, and a properly exceptional set $\mathcal{N}_1 \subset \mathbb{R}^d$, such that

$$\forall x \notin \mathcal{N}_1 \qquad t \longrightarrow \varphi(X_t) \text{ right continuous } W_x^\sigma \; a.s.$$

Since $\mathcal{N}_1$ is dx-negligeable and $\mathbb{R}^d - \mathcal{N}_1$ is invariant by the diffusion $(W_x^\sigma)_x$, we may assume that this version of φ vanishes on $\mathcal{N}_1$, i.e. $\mathcal{N}_1 \subset \{\varphi = 0\}$. From now on, we will use this version of φ.

Lemma 4.4.1 *The set $\{\varphi = 0\}$ is finely closed (for the fine topology defined by $(W_x^\sigma)_x$).*

Proof: Let $\{\varphi = 0\}^r$ be the set of regular points of $\{\varphi = 0\}$, i.e.

$$x \in \{\varphi = 0\}^r \;\Leftrightarrow\; W_x^\sigma(T_{\{\varphi=0\}} = 0) = 1 \qquad \text{where } T_{\{\varphi=0\}} = \inf\{t > 0 \,/\, \varphi(X_t) = 0\}$$

We only have to prove that $\{\varphi = 0\}^r \subset \{\varphi = 0\}$. But for all x in $\{\varphi = 0\}^r$ and not in $\mathcal{N}_1$:

$$W_x^\sigma(T_{\{\varphi=0\}} = 0 \text{ and } t \to \varphi(X_t) \text{ right continuous }) = 1$$

which implies that

$$W_x^\sigma(\varphi(X_o) = 0) = 1, \quad \text{i.e.} \quad \varphi(x) = 0$$

and this means that $\{\varphi = 0\}^r \subset \{\varphi = 0\} \cup \mathcal{N}_1 = \{\varphi = 0\}$. ∎

4.4.2 The family $(Q_x^\sigma)_{x\in\mathbb{R}^d}$

Let us introduce as in the section 4.3.2 the processes $(Z_t^{\sigma,\varphi})_t$ and $(\overline{Z_t^{\sigma,\varphi}})_t$ defined by

$$Z_t^{\sigma,\varphi} = \exp\left(\int_o^{t\wedge\tau} B_\varphi(X_s).\left[dX_s - \frac{\nabla.a}{2}(X_s)\,ds\right] - \frac{1}{2}\int_o^{t\wedge\tau}\left|\frac{\overline{\sigma\nabla\varphi}}{\varphi}\right|^2(X_s)\,ds\right)$$

$$\overline{Z_t^{\sigma,\varphi}} = 1\!\!1_{t<\tau}\,\exp\left(\int_o^{t} B_\varphi(X_s).\left[dX_s - \frac{\nabla.a}{2}(X_s)\,ds\right] - \frac{1}{2}\int_o^{t}\left|\frac{\overline{\sigma\nabla\varphi}}{\varphi}\right|^2(X_s)\,ds\right)$$

for $t \in [0,T]$ and by $Z_t^{\sigma,\varphi} = Z_T^{\sigma,\varphi}$ and $\overline{Z_t^{\sigma,\varphi}} = \overline{Z_T^{\sigma,\varphi}}$ for $t \geq T$. Both $Z^{\sigma,\varphi}$ and $\overline{Z^{\sigma,\varphi}}$ are W_x^σ supermartingales, and of course

$$\overline{Z^{\sigma,\varphi}} \;\; W_x^\sigma\text{-martingale} \;\Leftrightarrow\; E^{W_x^\sigma}\left(\overline{Z_T^{\sigma,\varphi}}\right) = 1 \qquad (\text{ idem for } Z^{\sigma,\varphi})$$

Also remark that $\overline{Z^{\sigma,\varphi}} \leq Z^{\sigma,\varphi}$, and that they only differ on $\left\{\int_o^\tau \left|\frac{\overline{\sigma\nabla\varphi}}{\varphi}\right|^2(X_s)\,ds < +\infty\right\}$, i.e. $\{\cup_k(\tau = \tau_k)\}$, for $t \geq \tau$. Thus

$$W_x^\sigma\left(\cup_k(\tau = \tau_k)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{Z^{\sigma,\varphi}} = Z^{\sigma,\varphi} \;\; W_x^\sigma \; a.s.$$

Moreover, $Z^{\sigma,\varphi}$ is W_x^σ a.s. continuous, while $\overline{Z^{\sigma,\varphi}}$ is only W_x^σ a.s. right-continuous, but is a strongly multiplicative functional.

Now let us introduce the sets

$$\begin{aligned}\mathcal{N}'_1 &= \left\{x \in \mathbb{R}^d \ / \ E^{W_x^\sigma}\left(\overline{Z_T^{\sigma,\varphi}}\right) < 1\right\}\\ \mathcal{N}'_2 &= \left\{x \in \mathbb{R}^d \ / \ W_x^\sigma\left(\cup_k(\tau = \tau_k)\right) > 0\right\}\\ \mathcal{N}' &= \mathcal{N}'_1 \cup \mathcal{N}'_2\end{aligned}$$

They are borelian sets because $x \longrightarrow W_x^\sigma$ is measurable.

Lemma 4.4.2 *The set $\mathcal{N}'$ is $\varphi^2 dx$ negligible and finely closed (for the fine topology relative to $(W_x^\sigma)_x$).*

Proof: We know that $W_\varphi^\sigma(\cup_k\{\tau = \tau_k\}) = 0$ (see the correction of [CL94]). Consequently, $(\varphi^2 dx)(\mathcal{N}'_2) = 0$ and $\overline{Z^{\sigma,\varphi}} = Z^{\sigma,\varphi}$ $\quad W_\varphi^\sigma$ a.s. As said in section 4.3.2, $Z^{\sigma,\varphi}$ is a W_φ^σ martingale, thus $E^{W_\varphi^\sigma}(\overline{Z_T^{\sigma,\varphi}}) = E^{W_\varphi^\sigma}(Z_T^{\sigma,\varphi}) = 1$ and this implies that $(\varphi^2 dx)(\mathcal{N}'_1) = 0$.

We just proved the first assertion of the lemma, let us now proceed with the proof of the second one. T_A will denote here the hitting time of the Borelian set A : $T_A = \inf\{t > 0 \ / \ X_t \in A\}$, and for each $x \in \mathbb{R}^d$, $(K_n(x,A))_n$ will be an increasing sequence of compact subsets of A such that $T_{K_n(x,A)} \searrow T_A$ (such a sequence exists thanks to th I.10.12 of [BG68]).

Pick an $x \in \mathbb{R}^d$ which is regular for $\mathcal{N}'$. Either x is regular for $\mathcal{N}'_1$, or it is regular for $\mathcal{N}'_2$.

First suppose it is regular for $\mathcal{N}'_1$: $W_x^\sigma(T_{\mathcal{N}'_1} = 0) = 1$. If in addition $x \notin \mathcal{N}'_2$, then $W_x^\sigma(\tau > 0) = 1$ and it is possible to find an $n \in \mathbb{N}$ such that

$$W_x^\sigma(T_{K_n(x,\mathcal{N}'_1)} < \tau \wedge T) > 0$$

Since X is a continuous process, $X_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_1)}} \in K_n(x,\mathcal{N}'_1) \subset \mathcal{N}'_1$, thus

$$E^{W^\sigma_{X_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_1)}}}}\left(\overline{Z_T^{\sigma,\varphi}}\right) < 1 \qquad W_x^\sigma \ a.s.$$

Consequently, applying the strong Markov property of $(W_x^\sigma)_x$ and the strong multiplicativity of $\overline{Z^{\sigma,\varphi}}$:

$$\begin{aligned}&E^{W_x^\sigma}\left(\overline{Z_T^{\sigma,\varphi}}\ \mathbb{1}_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_1)}<\tau\wedge T}\right)\\ &= E^{W_x^\sigma}\left(\overline{Z^{\sigma,\varphi}_{T+T_{K_n(x,\mathcal{N}'_1)}}}\ \mathbb{1}_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_1)}<\tau\wedge T}\right)\\ &\qquad \text{because } \overline{Z_t^{\sigma,\varphi}} = \overline{Z_T^{\sigma,\varphi}} \text{ for } t \geq T\\ &= E^{W_x^\sigma}\left(\overline{Z^{\sigma,\varphi}_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_1)}}}\ E^{W^\sigma_{X_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_1)}}}}\left(\overline{Z_T^{\sigma,\varphi}}\right)\ \mathbb{1}_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_1)}<\tau\wedge T}\right)\\ &< E^{W_x^\sigma}\left(\overline{Z^{\sigma,\varphi}_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_1)}}}\ \mathbb{1}_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_1)}<\tau\wedge T}\right)\end{aligned}$$

thus $x \in \mathcal{N}'_1$ because

$$
\begin{aligned}
&E^{W^\sigma_x}\left(\overline{Z^{\sigma,\varphi}_T}\right)\\
&\quad < \; E^{W^\sigma_x}\left(\overline{Z^{\sigma,\varphi}_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_1)}}}\; 1\!\!1_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_1)}<\tau\wedge T}\right) + E^{W^\sigma_x}\left(\overline{Z^{\sigma,\varphi}_T}\; 1\!\!1_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_1)}\geq\tau\wedge T}\right)\\
&\quad < \; E^{W^\sigma_x}\left(\overline{Z^{\sigma,\varphi}_{\tau\wedge T}}\right)\\
&\quad < \; 1
\end{aligned}
$$

It remains to consider the case where x is regular for $\mathcal{N}'_2$: $W^\sigma_x(T_{\mathcal{N}'_2} = 0) = 1$. Take such an x and suppose it is not in $\mathcal{N}'_2$. Then $W^\sigma_x(\tau > 0) = 1$ and there exists an $n \in \mathbb{N}$ such that $W^\sigma_x(T_{K_n(x,\mathcal{N}'_2)} < \tau \wedge T) > 0$. Since $X_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_2)}}$ belongs to $\mathcal{N}'_2$:

$$
\begin{aligned}
&W^\sigma_x\left(\cup_k\{\tau = \tau_k\}\right)\\
&\quad \geq \; W^\sigma_x\left(\left\{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_2)} < \tau\wedge T\right\}\cap\left\{\cup_k\{\tau=\tau_k\}\right\}\right)\\
&\quad \geq \; E^{W^\sigma_x}\left(1\!\!1_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_2)}<\tau\wedge T}\; W^\sigma_{X_{T_{K_n(x,\mathcal{N}'_2)}}}\left(\cup_k\{\tau=\tau_k\}\right)\right)\\
&\quad > \; 0
\end{aligned}
$$

which is in contradiction with $x \notin \mathcal{N}'_2$. We thus have proved that every regular point for $\mathcal{N}'$ is in $\mathcal{N}'$, which exactly means that $\mathcal{N}'$ is finely closed.

∎

Now define Q^σ_x by

$$
\begin{array}{ll}
dQ^\sigma_x = Z^{\sigma,\varphi}_T\; dW^\sigma_x & \text{if } x \notin \mathcal{N}\cup\mathcal{N}'\\
dQ^\sigma_x = \delta_{\{x\}} & \text{if } x \in \mathcal{N}\cup\mathcal{N}'
\end{array}
$$

where $\delta_{\{x\}}$ is the Dirac mass on the constant path $X_t = x\ \forall t \in [0,T]$. $(Q^\sigma_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ is a family of Probability measures on $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ and it is clear that

$$
\int Q^\sigma_x\; \varphi^2(x)\; dx = Q^\sigma_\varphi
$$

Proposition 4.4.3 *Let* $\theta' = \theta \wedge \inf\{t \geq 0 \;\;/\;\; X_t \in \mathcal{N}'\}$.
For all $x \notin \mathcal{N}\cup\mathcal{N}'$, $\quad Q^\sigma_x(\theta' < +\infty) = 0$.

Proof: We first show that

$$
\forall x \notin \mathcal{N}\cup\mathcal{N}' \quad Q^\sigma_x(\inf\{t \geq 0 \;\;/\;\; X_t \in \mathcal{N}'\} < +\infty) = 0
$$

Fix a $x \notin \mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$, let $T_{\mathcal{N}'} = \inf\{t \geq 0 \ / \ X_t \in \mathcal{N}'\}$ and let $T_{\mathcal{N}'_1}$, $T_{\mathcal{N}'_2}$ denote the corresponding stopping times for $\mathcal{N}'_1$, $\mathcal{N}'_2$. Since $x \notin \mathcal{N}'_2$, the supermartingales $Z^{\sigma,\varphi}$ and $\overline{Z^{\sigma,\varphi}}$ are equal W^σ_x a.s., and since $\overline{Z^{\sigma,\varphi}_t} = 0$ for $t \geq \tau$:

$$Q^\sigma_x(\tau \leq T_{\mathcal{N}'} < +\infty) \leq E^{W^\sigma_x}\left(\mathbb{I}_{\tau \leq T_{\mathcal{N}'} < +\infty} \ \overline{Z^{\sigma,\varphi}_{T_{\mathcal{N}'}}}\right) = 0$$

thus we only have to prove that

$$Q^\sigma_x(T_{\mathcal{N}'_1} < \tau) = 0 \quad \text{ and } \quad Q^\sigma_x(T_{\mathcal{N}'_2} < \tau) = 0$$

First suppose that $Q^\sigma_x(T_{\mathcal{N}'_2} < \tau) > 0$:
Then

$$\begin{aligned} & Q^\sigma_x\left(\cup_k(\tau = \tau_k)\right) \\ \geq \ & E^{W^\sigma_x}\left(Z^{\sigma,\varphi}_{T+T_{\mathcal{N}'_2}} \ \mathbb{I}_{\cup_k(\tau=\tau_k)} \ \mathbb{I}_{T_{\mathcal{N}'_2} < \tau}\right) \ \text{ since } Z^{\sigma,\varphi}_t = Z^{\sigma,\varphi}_T \text{ for } t \geq T \\ \geq \ & E^{W^\sigma_x}\left(Z^{\sigma,\varphi}_{T_{\mathcal{N}'_2}} \ E^{W^\sigma_{X_{T_{\mathcal{N}'_2}}}}\left(Z^{\sigma,\varphi}_T \ \mathbb{I}_{\cup_k(\tau=\tau_k)}\right) \mathbb{I}_{T_{\mathcal{N}'_2} < \tau}\right) \end{aligned}$$

and we showed in the proof of prop 4.4.2 that $\mathcal{N}'_2$ is finely closed, which implies that $X_{T_{\mathcal{N}'_2}} \in \mathcal{N}'_2 \quad W^\sigma_x$ a.s. Thus, since $Z^{\sigma,\varphi}_T = Z^{\sigma,\varphi} > 0$ on $\cup_k(\tau = \tau_k)$:

$$E^{W^\sigma_{X_{T_{\mathcal{N}'_2}}}}\left(Z^{\sigma,\varphi}_T \ \mathbb{I}_{\cup_k(\tau=\tau_k)}\right) > 0 \quad W^\sigma_\varphi \ a.s.$$

The fact that

$$E^{W^\sigma_x}\left(Z^{\sigma,\varphi}_{T_{\mathcal{N}'_2}} \ \mathbb{I}_{T_{\mathcal{N}'_2} < \tau}\right) \geq Q^\sigma_x(T_{\mathcal{N}'_2} < \tau) > 0$$

then implies that

$$Q^\sigma_x\left(\cup_k(\tau = \tau_k)\right) > 0$$

Using again the equivalence between Q^σ_x and W^σ_x on $\cup_k(\tau = \tau_k)$, we obtain that $x \in \mathcal{N}'_2$.

Now suppose that $Q^\sigma_x(T_{\mathcal{N}'_1} < \tau) > 0$:
There exist an n such that $Q^\sigma_x\left(T_{K_n} < \tau\right) > 0$ (using again the $K_n := K_n(x, \mathcal{N}'_1)$ defined in the proof of prop 4.4.2).

$$\begin{aligned} & E^{W^\sigma_x}\left(\overline{Z^{\sigma,\varphi}_T}\right) \\ & \leq E^{W^\sigma_x}\left(\mathbb{I}_{T_{K_n} < \tau} \ \overline{Z^{\sigma,\varphi}_{T_{K_n}}} \ E^{W^\sigma_{X_{T_{K_n}}}}\left(\overline{Z^{\sigma,\varphi}_T}\right) + \mathbb{I}_{T_{K_n} \geq \tau} \ \overline{Z^{\sigma,\varphi}_T}\right) \end{aligned}$$

Now recall that $X_{T_{K_n}} \in \mathcal{N}'_1$, thus

$$E^{W^\sigma_x}\left(\overline{Z^{\sigma,\varphi}_T}\right) < E^{W^\sigma_x}\left(\mathbb{I}_{T_{K_n} < \tau} \ \overline{Z^{\sigma,\varphi}_{T_{K_n}}} + \mathbb{I}_{T_{K_n} \geq \tau} \ \overline{Z^{\sigma,\varphi}_T}\right) \leq 1$$

thus $x \in \mathcal{N}'_1$.

It remains to prove that

$$\forall x \notin \mathcal{N} \cup \mathcal{N}' \quad Q^\sigma_x(\theta < +\infty) = 0$$

First remark that

$$\forall x \notin \mathcal{N} \cup \mathcal{N}' \quad Q_x^\sigma(\tau = +\infty) = W_x^\sigma(\mathbb{1}_{\tau=+\infty}\ \overline{Z_T^{\sigma,\varphi}}) = W_x^\sigma(\overline{Z_T^{\sigma,\varphi}}) = 1$$

because $\mathbb{1}_{\tau \leq T}\ \overline{Z_T^{\sigma,\varphi}} = 0$ by definition of $\overline{Z^{\sigma,\varphi}}$. So we only have to prove that

$$\forall x \notin \mathcal{N} \cup \mathcal{N}' \quad Q_x^\sigma(\tau \wedge \theta < +\infty) = 0$$

Suppose we can find an $x \notin \mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$ such that

$$Q_x^\sigma(\tau \wedge \theta < +\infty) > \alpha > 0$$

By definition of $\mathcal{N}'$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad W_x^\sigma(\tau_n < \tau) = 1$$

and for n large enough

$$W_x^\sigma(0 < \tau_n < \tau) = 1$$

thus

$$Q_x^\sigma(0 < \tau_n < \tau \wedge \theta < +\infty) > \alpha > 0$$

Moreover, since $t \longrightarrow \varphi(X_t)$ is W_x^σ a.s. right-continuous and since $\varphi(x) \neq 0$, we have

$$W_x^\sigma(\theta_n > 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

thus for n large enough

$$Q_x^\sigma(0 < \tau_n \wedge \theta_n < \tau \wedge \theta < +\infty) > \alpha > 0$$

and there exists a $t_o > 0$ such that

$$\forall t \leq t_o \quad Q_x^\sigma(t < \tau_n \wedge \theta_n < \tau \wedge \theta < +\infty) > \frac{\alpha}{2} > 0$$

But

$$\begin{aligned}
&Q_x^\sigma(t < \tau_n \wedge \theta_n < \tau \wedge \theta < +\infty) \\
&\quad = \int \mathbb{1}_{t<\tau_n\wedge\theta_n<\tau\wedge\theta<+\infty}(\omega)\ \overline{Z_{\tau\wedge\theta}^{\sigma,\varphi}}(\omega)\ dW_x^\sigma(\omega) \\
&\quad = \int \mathbb{1}_{t<\tau_n\wedge\theta_n<\tau\wedge\theta}(\omega)\ \overline{Z_t^{\sigma,\varphi}}(\omega)\ \int \mathbb{1}_{\tau\wedge\theta<+\infty}(\omega')\ \overline{Z_{\tau\wedge\theta}^{\sigma,\varphi}}(\omega')\ dW_{X_t(\omega)}^\sigma(\omega')\ dW_x^\sigma(\omega) \\
&\quad = \int \mathbb{1}_{t<\tau_n\wedge\theta_n<\tau\wedge\theta}\ \overline{Z_t^{\sigma,\varphi}}\ h(X_t)\ dW_\varphi^\sigma \\
&\qquad \text{where } h(x) = \int \mathbb{1}_{\tau\wedge\theta<+\infty}\ \overline{Z_{\tau\wedge\theta}^{\sigma,\varphi}}\ dW_x^\sigma \\
&\quad = \int \mathbb{1}_{t<\tau_n\wedge\theta_n}\ \overline{Z_{\tau_n\wedge\theta_n}^{\sigma,\varphi}}\ h(X_t)\ dW_x^\sigma \\
&\quad = \int \overline{Z_{\tau_n\wedge\theta_n}^{\sigma,\varphi}}\ h(X_t)\ dW_x^\sigma
\end{aligned}$$

Now recall that we assumed that $W^\sigma_{x_o} \circ X_t^{-1} << dx$ for all $t \in [0, +\infty[$ and all $x_o \in \mathbb{R}^d$. Thus $\left(\overline{Z^{\sigma,\varphi}_{\tau_n\wedge\theta_n}} dW^\sigma_{x_o}\right) \circ X_t^{-1} << dx$, and letting $p^n_t(x,\cdot)$ denote its density, we obtain :

$$Q^\sigma_x(t < \tau_n \wedge \theta_n < \tau \wedge \theta < +\infty) \leq \int_{\mathbb{R}^d} h(y)\ p^n_t(x,y)\ dy$$

But $h(x) = Q^\sigma_x(\tau \wedge \theta < +\infty)$ on $(\mathcal{N} \cup \mathcal{N}')^c$, thus $\varphi^2 dx$ a.s., and since $Q^\sigma_\varphi(\tau \wedge \theta < +\infty) = \int h(x)\ \varphi^2(x)\ dx = 0$, h vanishes dx a.e. on $\{\varphi \neq 0\}$ and the last inequality reduces to

$$Q^\sigma_x(t < \tau_n \wedge \theta_n < \tau \wedge \theta < +\infty) \leq \int_{\mathcal{N}} h(y)\ p^n_t(x,y)\ dy$$

Thus

$$\forall t \leq t_o \quad \frac{\alpha}{2} \leq E^{W^\sigma_x}\left(\mathbb{1}_{X_t \in \mathcal{N}}\ \overline{Z^{\sigma,\varphi}_{\tau_n\wedge\theta_n}}\right)$$

which implies

$$W^\sigma_x\left(\inf\{t > 0\ /\ X_t \in \mathcal{N}\} = 0\right) > 0$$

This is a contradiction with the fact that $\mathcal{N}$ is finely closed.

∎

Corollary 4.4.4 *The family $(Q^\sigma_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ is strongly Markovian.*

Proof: This is immediate using prop 4.4.3 and the strong multiplicativity of $\overline{Z^{\sigma,\varphi}}$.
∎

4.4.3 Study of a bounded invariant measure

Let μ be a bounded invariant measure for $(Q^\sigma_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$. We split μ into $\mu = \mu_+ + \mu_o$ where

$$\mu_+ = \mu \mathbb{1}_{(\mathcal{N}\cup\mathcal{N}')^c} \qquad \text{and} \qquad \mu_o = \mu \mathbb{1}_{\mathcal{N}\cup\mathcal{N}'}$$

Proposition 4.4.5 *The measure μ_+ is absolutely continuous with respect to Lebesgue's measure.*

Proof: For each Borelian set A :

$$\mu_+(A) = \int_{(\mathcal{N}\cup\mathcal{N}')^c} E^{W^\sigma_x}\left(\mathbb{1}_{X_t\in A}\ Z^{\sigma,\varphi}_T\right)\ d\mu(x)$$

thus the absolute continuity assumption on $W^\sigma_x \circ X_t^{-1}$ implies that :

$$dx(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^d\ \ W^\sigma_x(X_t \in A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu_+(A) = 0$$

∎

In the sequel, ψ will denote the square root of the density of μ_+, that is $d\mu_+(x) = \psi^2 dx$. Since μ_+ is bounded, ψ belongs to $L^2(dx)$. So without loss of generality we may assume that $\int \psi^2 dx = 1$ (dividing by a constant if necessary).

The bounded measure μ_o is obviously symmetric. We want to prove that, under some assumptions, μ_+ also is symmetric. Let us first present these assumptions.

Framework :

We assume here that :

(H1) $\psi = \sqrt{\dfrac{d\mu_+}{dx}}$ is bounded, and $\ln\psi \in L^2(\mu_+)$

(H2) φ is bounded and $\dfrac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi} \in L^2(\mu_+)$ (finite energy hypothesis)

(H3) $\psi \in H(dx, a\,dx)$

Our main result in this section is

Theorem 4.4.6 *Every bounded invariant measure satisfying assumptions (H1), (H2) and (H3) is symmetric.*

Let us now prove this theorem.

Proof :

The Probability measure $Q^\sigma_{\mu_+}$ is defined by $\displaystyle\int Q^\sigma_x \, d\mu_+(x)$. Since μ_+ is supported by $(\mathcal{N} \cup \mathcal{N}')^c$, we have

$$dQ^\sigma_{\mu_+} = Z^{\sigma,\varphi}_T \, dW^\sigma_\psi \qquad \text{where} \quad W^\sigma_\psi = \int W^\sigma_x \, d\mu_+(x)$$

and according to th 5.3 of [CL94], the following proposition holds :

Proposition 4.4.7 *The function $H(\cdot, W^\sigma_\psi)$ has a unique minimizing element on the set $\mathcal{A}_\psi$ of $\psi^2 dx$ stationary Probability measures. This minimizing element is equal to $Q^\sigma_{\mu_+}$ if and only if $\dfrac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi}$ belongs to $\overline{\{\sigma\nabla f \ ; \ f \in \mathcal{C}^\infty_c\}}^{L^2(\psi^2 dx)}$ (the closure in $L^2(\psi^2 dx)$ of the set $\{\sigma\nabla f \ ; \ f \in \mathcal{C}^\infty_c\}$).*

So we now want to prove that $\dfrac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi} \in \overline{\{\sigma\nabla f \ ; \ f \in \mathcal{C}^\infty_c\}}^{L^2(\psi^2 dx)}$.

Therefore, we use again the functions Θ_n defined in the proof of prop 4.3.3. Since ψ belongs to $H(dx, a\,dx)$ and is bounded, $H(\psi^2 dx, a\,\psi^2 dx)$ is well defined and, according to prop 4.2.12 :

$$\varphi \in H(\psi^2 dx, a\,\psi^2 dx) \quad \text{and} \quad \overline{\sigma\nabla}^{\psi}\varphi = \overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi$$

Moreover, th 4.3.4 implies that φ is the limit in $H(\psi^2 dx, a\,\psi^2 dx)$ of a sequence of $\mathcal{C}^\infty_c$ functions. Using th 4.2.16, we obtain for each $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln \circ\Theta_n \circ \varphi \in H(\psi^2 dx, a\,\psi^2 dx)$$

$$\text{and} \qquad \overline{\sigma\nabla}^{\psi}(\ln \circ\Theta_n \circ \varphi) = \frac{\Theta_n' \circ \varphi}{\Theta_n \circ \varphi} \ \overline{\sigma\nabla}^{\psi}\varphi$$

Since $\ln \circ \Theta_n \circ \varphi$ is bounded, th 4.3.4 again implies that

$$\overline{\sigma\nabla}^{\psi}(\ln \circ\Theta_n \circ \varphi) \in \overline{\{\sigma\nabla f \; ; \; f \in \mathcal{C}_c^\infty\}}^{L^2(\psi^2 dx)}$$

But

$$\left\| \frac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi} - \overline{\sigma\nabla}^{\psi}(\ln \circ\Theta_n \circ \varphi) \right\|^2_{L^2(\psi^2 dx)} = \int \left(1 - \frac{\Theta_n' \circ \varphi}{\Theta_n \circ \varphi}\varphi\right)^2 \left| \frac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi} \right|^2 \psi^2 \, dx$$

The difference $\left|1 - \frac{\Theta_n' \circ \varphi}{\Theta_n \circ \varphi}\varphi\right|$ converges dx a.e. to 0 and is uniformly bounded in n (because $\frac{x \; \Theta_n'(x)}{\Theta_n(x)} \leq \frac{n+2}{n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$) thus hypothesis (H2) implies that $\overline{\sigma\nabla}^{\psi}(\ln \circ\Theta_n \circ \varphi)$ converges to $\frac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi}$ in $L^2(\psi^2 dx)$.

Consequently, $\frac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi} \in \overline{\{\sigma\nabla f \; ; \; f \in \mathcal{C}_c^\infty\}}^{L^2(\psi^2 dx)}$ and

$$H(Q^\sigma_{\mu_+}, W^\sigma_\varphi) = \inf\{H(Q, W^\sigma_\varphi) \; ; \; Q \in \mathcal{A}_\psi\}$$

Since $H(Q, W^\sigma_{dx}) = H(Q, W^\sigma_\varphi) + \int (\ln \psi^2)\psi^2 \, dx$ for all $Q \in \mathcal{A}_\psi$, and since $\int (\ln \psi^2)\psi^2 \, dx < +\infty$, $Q^\sigma_{\mu_+}$ also is the unique minimizing element of the function $H(\cdot, W^\sigma_{dx})$:

$$H(Q^\sigma_{\mu_+}, W^\sigma_{dx}) = \inf\{H(Q, W^\sigma_{dx}) \; ; \; Q \in \mathcal{A}_\psi\}$$

Relative entropy is time reversal invariant and the measure W^σ_{dx} is symmetric, thus

$$H(Q^\sigma_{\mu_+} \circ r_T^{-1}, W^\sigma_{dx}) = H(Q^\sigma_{\mu_+}, W^\sigma_{dx})$$

which implies $Q^\sigma_{\mu_+} \circ r_T^{-1} = Q^\sigma_{\mu_+}$ because $H(\cdot, W^\sigma_{dx})$ has only one minimizing element. Consequently, μ_+ is a symmetric measure for the family $(Q^\sigma_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$. ∎

Proposition 4.4.8 *Under the assumptions of th 4.4.6, we also have*

$$\frac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\varphi}{\varphi} = \frac{\overline{\sigma\nabla}^{dx}\psi}{\psi} \quad \psi^2 dx \quad a.s.$$

Proof: Consider the generators

$$A^\sigma_\varphi f = \frac{\nabla.(a\nabla f)}{2} + \frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi}.\sigma\nabla f \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty$$

and

$$A^\sigma_\psi f = \frac{\nabla.(a\nabla f)}{2} + \frac{\overline{\sigma\nabla}\psi}{\psi}.\sigma\nabla f \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty$$

The operator A^σ_ψ is symmetric in $L^2(\psi^2 dx)$ by construction, and A^σ_φ also is symmetric because it is associated with the symmetric Probability measure $Q^\sigma_{\mu_+}$. Thus

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_c^\infty \quad \int (g \; \sigma\nabla f - f \; \sigma\nabla g). \left(\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi} - \frac{\overline{\sigma\nabla}\psi}{\psi}\right) \psi^2 dx$$

We know that $\dfrac{\overline{\sigma\nabla\varphi}}{\varphi} \in \overline{\{\sigma\nabla f\ ;\ f \in \mathcal{C}_c^\infty\}}^{L^2(\psi^2 dx)}$ and since ψ is assumed to be bounded, we also will have $\dfrac{\overline{\sigma\nabla\psi}}{\psi} \in \overline{\{\sigma\nabla f\ ;\ f \in \mathcal{C}_c^\infty\}}^{L^2(\psi^2 dx)}$. Consequently, since $g\ \sigma\nabla f - f\ \sigma\nabla g = \sigma\nabla(fg) - 2f\ \sigma\nabla g$, we get

$$\forall f,g \in \mathcal{C}_c^\infty \qquad \int f\ \sigma\nabla g.\left(\frac{\overline{\sigma\nabla\varphi}}{\varphi} - \frac{\overline{\sigma\nabla\psi}}{\psi}\right)\ \psi^2 dx$$

Choosing f's which are equal to the coordinates functions on the support of g and using the density of $\mathcal{C}_c^\infty$ in $L^2(\psi^2 dx)$, we obtain

$$\forall i \in \{1,\cdots,d\} \qquad \sigma\ e_i\ .\ \left(\frac{\overline{\sigma\nabla\varphi}}{\varphi} - \frac{\overline{\sigma\nabla\psi}}{\psi}\right) = 0 \quad \psi^2 dx \ \ a.e.$$

where $\{e_1,\cdots,e_d\}$ denotes the canonical basis of $\mathbb{R}^d$. So the term in the parentheses belongs $\psi^2 dx$ a.s. to the orthogonal of the range of σ. It also belongs $\psi^2 dx$ a.s. to this range, as an element of $\overline{\{\sigma\nabla f\ ;\ f \in \mathcal{C}_c^\infty\}}^{L^2(\psi^2 dx)}$, thus it vanishes a.s. ∎

4.4.4 A sufficient condition for (H3) to hold

In the "$\sigma = Id$" case, (H3) has been proved to always hold, using Föllmer's time reversal results. This time reversal techniques have recently been extended to the case of a general diffusion matrix by Cattiaux and Petit (cf [CP95]). We will use this generalization here to show that $\psi \in H(dx, a\,dx)$. However, this result essentially says that "$\sigma^*\sigma\nabla\psi \in L^2(\psi^2 dx)$", and we need more, since we need "$\sigma\nabla\psi \in L^2(\psi^2 dx)$". So we have to assume that σ is non-degenerate out of a dx-negligeable set, which is a very strong assumption (thought weaker than the usual ellipticity assumption) :

Proposition 4.4.9 *If (H1) and (H2) are verified, and if $\sigma(x)$ is invertible for dx almost all x in $\mathbb{R}^d$, then $\psi \in H(dx, a\,dx)$.*

Proof :

We will use the integration by parts formula proved by P. Cattiaux and F. Petit in [CP95]. Therefore, we need to have :

(i) $H(Q^\sigma_{\mu_+}, W^\sigma_{dx}) < +\infty$

(ii) $\forall\varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \int_\varepsilon^T \int_{|x|\le k} (\nabla.a)(x)\ \psi^2(x)\ dx\ dt < +\infty$

These assumptions are clearly verified here (thanks to (H1), (H2) and the fact that $\nabla.a$ is bounded).

So according to [CP95], since $Q^\sigma_{\mu_+}$ is Markovian, we can find a Borel function $\overline{\beta}$ such that

$$E^{Q^\sigma_{\mu_+}}\left(\int_o^T \overline{\beta}(s,X_s).a(X_s)\overline{\beta}(s,X_s)\right) < +\infty$$

$$\frac{d(Q^\sigma_{\mu_+}\circ r_T^{-1})}{dW^\sigma_{dx}}|_{\mathcal{F}_t} = \psi^2(X_o)\ \exp\left(\int_o^t \overline{\beta}(s,X_s).(dX_t - \frac{\nabla.a}{2}(X_t)\ dt) - \frac{1}{2}\int_o^t \overline{\beta}(s,X_s).a(X_s)\overline{\beta}(s,X_s)\ ds\right)$$

and for dt almost all $t \in]0,T]$, for all $f,u \in \mathcal{C}_c^\infty$, the function $\overline{\beta}$ verify :

$$\begin{aligned} &-E^{Q^\sigma_{\mu^+}}\left((\nabla u.a\nabla f)(X_t)\right) \\ &= E^{Q^\sigma_{\mu^+}}\left(f(X_t)\ \nabla u(X_t).\left[\frac{\nabla.a}{2}(X_t) + a(X_t)(B_\varphi(X_t) + \overline{\beta}(1-t,X_t))\right]\right) \end{aligned}$$

In our case, this relation reduces to :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u.a\nabla f\ \psi^2\ dx = \int_{\mathbb{R}^d} f\ \nabla u\ \left[\frac{\nabla.(\sigma^*\sigma)}{2} + \sigma^*\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi} + \sigma^*\sigma\overline{\beta}(1-t,\cdot)\right]\ \psi^2(x)\ dx$$

Choose a t such that the preceding equality holds and let $\overline{B} = \sigma\overline{\beta}(1-t,\cdot)$ (actually, $\sigma\overline{\beta}$ does not depend on t). Thanks to the finite energy result verified by $\overline{\beta}$, we know that $\overline{B} \in L^2(\psi^2 dx)$. This equality becomes :

$$\forall u,f \in \mathcal{C}_c^\infty \quad \int_{\mathbb{R}^d}(\sigma\nabla u).(\sigma\nabla f)\ \psi^2\ dx = \int_{\mathbb{R}^d} f\ (\sigma\nabla u)\ \left[\frac{\nabla.(\sigma^*)}{2} + \frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi} + \overline{B}\right]\ \psi^2\ dx$$

that is

$$\forall u,f \in \mathcal{C}_c^\infty \quad \int \sigma\nabla u.\left[\frac{\nabla.(\sigma^*\ f)}{2} + f\ \frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi} + f\ \overline{B}\right]\ \psi^2(x)\ dx$$

Applying this equality with (u,f) replaced by (v,fh) , $(-h,fv)$ and (hv,f), and summing up the results, we obtain :

$$\forall f,v,h \in \mathcal{C}_c^\infty \quad \int h\ \sigma\nabla v.\left[\frac{\nabla.(\sigma^*\ f)}{2} + f\ \frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi} + f\ \overline{B}\right]\ \psi^2\ dx$$

then choosing $v \in \mathcal{C}_c^\infty$ such that $v(x) = x_i$ on the support of h, for each $i \in \{1,\cdots,d\}$, and using the density of $\mathcal{C}_c^\infty$ in $L^2(\psi^2 dx)$, we get :

$$\sigma^*\left[\frac{\nabla.(\sigma^*\ f)}{2} + f\ \frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi} + f\ \overline{B}\right] = 0 \quad \psi^2 dx\ a.s.$$

Since we assumed σ dx almost everywhere invertible, this implies

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty \qquad \frac{\nabla.(\sigma^*\ f)}{2} + f\ \frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi} + f\ \overline{B} = 0 \qquad \psi^2\ dx\ a.s.$$

and

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty \quad \int \nabla.(\sigma^*\ f)\ \psi\ dx = -2\int f\ \psi\left(\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi} + \overline{B}\right)\ dx$$

We already know that $\left(\psi\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi} + \psi\overline{B}\right)$ belongs to $L^2(dx)$, thus this means that $\psi \in H(dx, a\,dx)$ and $\overline{\sigma\nabla}^{dx}\psi = \psi\left(\frac{\overline{\sigma\nabla}\varphi}{\varphi} + \overline{B}\right)$

∎

References

[Ada75] R. A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[AHKS77] S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn, and L. Streit. Energy forms, Hamiltonians, and distorted Brownian paths. *J. Math. Phys.*, 18(1):907–917, 1977.

[AKR90] S. Albeverio, S. Kusuoka, and M. Röckner. On partial integration in infinite dimensional spaces and application to Dirichlet forms. *J. London Math. Soc.*, 42:122–136, 1990.

[AM91] S. Albeverio and Z. Ma. Necessary and sufficient conditions for the existence of m-perfect processes associated with Dirichlet forms. Séminaire de proba. XXV. *Lect. Notes Math.*, 1485, 1991.

[AMR92] S. Albeverio, Z. Ma, and M. Röckner. Non-symmetric Dirichlet forms and Markov processes on general state spaces. *C. R. Acad Sci. Paris, Sér. 1*, 314:77–82, 1992.

[AR89] S. Albeverio and M. Röckner. Classical Dirichlet forms on topological vector spaces - the construction of the associated diffusion process. *Probab. Theory Relat. Fields*, 83:405–434, 1989.

[AR90] S. Albeverio and M. Röckner. Classical Dirichlet forms on topological vector spaces - closability and Cameron-Martin formula. *J. Funct. Anal.*, 88:395–436, 1990.

[AR91] S. Albeverio and M. Röckner. Stochastic differential equations in infinite dimensions : Solutions via Dirichlet forms. *Probab. Theory Relat. Fields*, 89:347–386, 1991.

[ARZ93a] S. Albeverio, M. Röckner, and T. S. Zhang. Girsanov transform for symmetric diffusions with infinite dimensional state space. *Ann. Prob.*, 21(2):961–978, 1993.

[ARZ93b] S. Albeverio, M. Röckner, and T. S. Zhang. Markov uniqueness for a class of infinite dimensional Dirichlet operators. *Stochastic Processes and Optimal Control. Stochastic Monographs*, 7:1–26, 1993.

[BG68] R. M. Blumenthal and R. K. Getoor. *Markov Processes and Potential Theory.* Academic Press, New York and London, 1968.

[BH90] R. F. Bass and P. Hsu. The semimartingale structure of reflecting Brownian motion. *Proc. Am. Math. Soc.*, 108:1007–1010, 1990.

[BH91] R. F. Bass and P. Hsu. Some potential theory for reflecting Brownian motion in Hölder and lipschitz domains. *Ann. Prob.*, 19:486–508, 1991.

[Bil69] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New York, 1969.

[BR94a] V. I. Bogachev and M. Röckner. Hypoellipticity of invariant measures of infinite dimensional diffusions. *C. R. Acad Sci. Paris, Sér. 1*, 318:553–558, 1994.

[BR94b] V. I. Bogachev and M. Röckner. Regularity of invariant measures on finite and infinite dimensional spaces and applications. Preprint, 1994.

[Car84] E. Carlen. Conservative diffusions. *Comm. Math. Phys.*, 94:293–316, 1984.

[Car85] R. Carmona. Probabilistic construction of Nelson processes. *Taniguchi Symp. PMMP Katata*, pages 55–81, 1985.

[CFW93] Z. Q. Chen, P. J. Fitzsimmons, and R. J. Williams. Reflecting brownian motions : Quasimartingales and strong caccioppoli sets. *Potential Analysis*, 2:219–243, 1993.

[Che92] Z. Q. Chen. Pseudo Jordan domains and reflecting Brownian motions. *Probab. Theory Relat. Fields*, 94:271–280, 1992.

[Che93] Z. Q. Chen. On reflecting diffusions processes and Skorokhod decomposition. *Probab. Theory Relat. Fields*, 94:281–315, 1993.

[CL94] P. Cattiaux and C. Léonard. Minimization of the Kullback information of diffusion processes. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 30(1):83–132, 1994. and correction to appear in *Ann. Inst. Henri Poincaré* in 1995.

[CL95a] P. Cattiaux and C. Léonard. Large deviations and Nelson processes. *Forum Mathematicum*, 7:95–115, 1995.

[CL95b] P. Cattiaux and C. Léonard. Minimization of the Kullback information for general markov processes. Preprint, 1995.

[CP95] P. Cattiaux and F. Petit. Preprint, 1995.

[CRZ94] P. Cattiaux, S. Roelly, and H. Zessin. Une approche Gibbsienne des diffusions Browniennes infinidimensionnelles. To appear in *Prob. Th. and Rel. Fields.* Preprint BiBos, 1994.

[DM87] C. Dellacherie and P. A. Meyer. *Probabilités et potentiel*, volume 4. Hermann, 1987.

[Fit89] P. J. Fitzsimmons. Markov processes and non-symmetric Dirichlet forms without regularity. *J. Funct. Anal.*, 85:287–306, 1989.

[Föl72] H. Föllmer. The exit measure of a supermartingale. *Z.W.*, 21:154–166, 1972.

[Föl84] H. Föllmer. Time reversal on Wiener space. proceedings bielefeld 84. *Lect. Notes Math.*, 1158:119–129, 1984.

[Föl88] H. Föllmer. Random fields and diffusion processes, Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour. *Lect. Notes Math.*, 1362:101–204, 1988.

[FOT94] M. Fukushima, Oshima, and M. Takeda. *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*. Number 19 in Studies in Mathematics. De Gruyter, Berlin New York, 1994.

[FP94] H. Föllmer and P. Protter. An extension of K. Ito's change of variables formula. Preprint, 1994.

[FT84] M. Fukushima and M. Takeda. A transformation of a symmetric Markov process and the Donsker-Varadhan theory. *Osaka J. Math.*, 21:311–326, 1984.

[Fuk67] M. Fukushima. A construction of reflecting barrier Brownian motions for bounded domains. *Osaka J. Math.*, 4:183–215, 1967.

[Fuk80] M. Fukushima. *Dirichlet Forms and Markov Processes*. Kodansha. North-Holland, Amsterdam, 1980.

[Gro93] L. Gross. Logarithmic Sobolev inequalities and contractivity properties of semi-groups in Dirichlet forms. *Lect. Notes Math.*, 1563:54–88, 1993.

[Hör85] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[IW88] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North-Holland, Amsterdam, 2nd edition, 1988.

[Jac79] J. Jacod. Problèmes de martingales. *Lect. Notes Math.*, 714, 1979.

[JS87] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987.

[KP91] T. G. Kurtz and Ph. Protter. Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations. *Ann. Prob.*, 19:1035–1070, 1991.

[LeJ83] Y. LeJan. Quasi continuous functions and Hunt processes. *J. Math. Soc. Japan*, 35:37–42, 1983.

[LS84] P. L. Lions and A. S. Sznitman. Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 37:511–537, 1984.

[LZ88] T. J. Lyons and W. A. Zheng. A crossing estimate for the canonical process on a Dirichlet space and a tightness result. *Asterisque*, 157–158:249–271, 1988.

[MR92] Z. M. Ma and M. Rockner. *An Introduction to the Theory of (non-symmetric) Dirichlet Forms.* Springer, Berlin, 1992.

[MZ84] P. A. Meyer and W. A. Zheng. Tightness criteria for laws of semimartingales. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 20:353–372, 1984.

[MZ85] P. A. Meyer and W. A. Zheng. Construction de processus de Nelson réversibles, Sem. probab. XIX. *Lect. Notes Math.*, 1123:12–26, 1985.

[Nel88] E. Nelson. Stochastic mechanics and random fields, Ecole d' été de probabilités de Saint-Flour. *Lect. Notes Math.*, 1362:429–450, 1988.

[PW94] E. Pardoux and R. J. Williams. Symmetric reflected diffusions. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 30:13–62, 1994.

[RZ92] M. Rockner and T. S. Zhang. Uniqueness of generalized Schrödinger operators and applications. *J. Funct. Anal.*, 105:187–231, 1992.

[RZ94] M. Rockner and T. S. Zhang. Uniqueness of generalized Schrödinger operators - Part II. *J. Funct. Anal.*, 119:455–467, 1994.

[Sha88] M. J. Sharpe. *General Theory of Markov Processes.* Academic Press, 1988.

[Sil76] M. L. Silverstein. Boundary theory of symmetric Markov processes. *Lect. Notes Math.*, 516, 1976.

[Son94a] S. Song. Markov uniqueness and essential self-adjointness of perturbed Ornstein-Uhlenbeck operators. Preprint, 1994.

[Son94b] S. Song. A study on Markovian maximality, change of probability and regularity. *Potential Analysis*, 3(4):391–422, 1994.

[Ste70] E. M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press, 1970.

[SV71] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan. Diffusions processes with boundary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 24:147–225, 1971.

[Tak92] M. Takeda. The maximum Markovian self-adjoint extension of generalized Schrödinger operators. *J. Math. Soc. Japan*, 44:113–130, 1992.

[Tan79] H. Tanaka. Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions in convex regions. *Hiroshima Math. J.*, 9:163–177, 1979.

[WZ90] R. J. Williams and W. A. Zheng. On reflecting Brownian motion - a weak convergence approach. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 26(3):461–488, 1990.

[Zhe85] W. A. Zheng. Tightness results for law of diffusion processes, application to stochastic mechanics. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 21:103–124, 1985.

N° D'IMPRESSION 1688
2ème TRIMESTRE 1995

Auteur : Myriam FRADON

Titre : Diffusions dégénérées, réfléchies ou à dérives singulières :
étude des lois et des formes de Dirichlet associées.

Résumé : Sur un domaine D de $\mathbb{R}^d$, pour une fonction à valeurs matricielles σ et une densité de probabilité p fixées, on étudie les processus associés à différentes extensions de la forme bilinéaire symétrique positive

$$\mathcal{E}(f,g) = \frac{1}{2}\int_D (\sigma\nabla f).(\sigma\nabla g)\ p\ dx \qquad f,g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ ou } \mathcal{C}_b^\infty(D)$$

La fonction σ est toujours supposée lisse ($\mathcal{C}_b^4$). On s'intéresse particulièrement au cas où σ peut dégénérer.

On se place d'abord dans le cas où D est borné et à bord peu lisse, p régulière ($\mathcal{C}_b^1$) et σ quelconque (lisse, autorisée à dégénérer). On construit par intégration par parties l'extension $\overline{\sigma\nabla}$ de l'opérateur $\sigma\nabla$, et on définit l'espace de Sobolev généralisé

$$H(D, p\,dx, a\,p\,dx) = \{f \in L^2(D, p\,dx)\ /\ \overline{\sigma\nabla} f \in L^2(D, p\,dx)\}$$

La forme $(\mathcal{E}, H(D, p\,dx, a\,p\,dx))$ est une forme de Dirichlet, non régulière a priori sur $\overline{D}$. Grâce à une suite d'approximations par des formes régulières, on prouve que le processus réfléchi dans $\overline{D}$ associé est une semi-martingale. Sous l'hypothèse que $(\mathcal{E}, H(D, p\,dx, a\,p\,dx))$ et la forme associée au mouvement brownien réfléchi sont régulières sur une même compactification de D, on montre que la réflexion se fait dans la direction conormale $\sigma^*\sigma\vec{n}$, où $\vec{n}$ est la direction de réflexion du brownien.

On travaille ensuite dans le cadre : $D = \mathbb{R}^d$, $\sigma = Id$ et $\varphi = \sqrt{p} \in H^1$. Dans ce cas, l'extension maximale $(\mathcal{E}, H^1(\varphi^2 dx))$ de $(\mathcal{E}, \mathcal{C}_c^\infty)$ est connue. On présente deux nouvelles démonstrations de l'unicité Markovienne pour cette forme. La première est élémentaire et purement analytique. La seconde est probabiliste. Elle repose sur l'étude du processus associé à l'extension minimale $(\mathcal{E}, H_o^1(\varphi^2 dx))$, qui est un mouvement brownien avec un drift singulier $\frac{\nabla\varphi}{\varphi}$. Comme application, on démontre que toute mesure stationnaire d'énergie finie pour ce processus est réversible.

Enfin, dans le cas où $D = \mathbb{R}^d$ et où σ peut dégénérer, on construit les espaces $H(dx, a\,dx)$ et $H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$, respectivement analogues à H^1 et $H^1(\varphi^2 dx)$, pour $\varphi \in H(dx, a\,dx)$. Les résultats de la première partie assurent la régularité, cruciale ici, de la forme $(\frac{1}{2}\int \overline{\sigma\nabla} f.\ \overline{\sigma\nabla} g\ dx, H(dx, a\,dx))$. L'analogue de la démonstration probabiliste précédente montre alors la régularité de $\mathcal{E}$ sur la fermeture de $L^\infty \cap H(\varphi^2 dx, a\,\varphi^2 dx)$ (mais non l'unicité Markovienne, faute de résultat de maximalité comme celui du cas elliptique). Sous des hypothèses de bornitude sur les densités, on en déduit à nouveau la réversibilité des mesures stationnaires d'énergie finie.

Mots-clés : Forme de Dirichlet, Processus réversible, Diffusion réfléchie, Dérive singulière, Unicité Markovienne, Matrice de diffusion dégénérée.

Classification AMS : 31C25, 60J45, 60G10, 60J60