Université Lille 1
Sciences et Technologies

U.F.R. de Mathématiques

Master 1 MathFi, 2012-2013 **M.Fradon**

Processus Stochastiques. Examen du 18 mai 2013
durée : 3 heures
Calculatrice et un recto-verso A4 manuscrit autorisés

Ex 1. Call américain

Un call américain est une option d'achat qui peut être exercée *à chaque instant jusqu'à l'échéance*, et non pas seulement à l'échéance comme pour le call européen. Le détenteur a donc à chaque instant t le choix entre conserver (ou revendre) ce call de valeur C_t^{am}, ou l'exercer et encaisser la différence $(S_t - K)_+$ entre le cours S_t du sous-jacent et le prix d'exercice K.
En comparant la prime C_t^{am} du call américain, la prime C_t du call européen de même strike et de même échéance, et le montant $(S_t - K)_+$ qu'on encaisse si on exerce à l'instant t, prouver qu'avant l'échéance, le détenteur n'a jamais intérêt à exercer le call.

Ex 2. EDS de la probabilité d'exercice d'un call

On modélise une action de cours initial S_0, de rendement μ et volatilité σ dans un modèle de Black-Scholes de taux d'intérêt r. Cette action est le sous-jacent d'un call d'échéance T et de strike K dont on veut étudier la probabilité qu'il soit exercé.

1) Rappeler l'expression du cours S_t et l'équation différentielle stochastique satisfaite par ce cours sous la probabilité historique P.

2) Calculer, à l'instant $t = 0$, la probabilité X_0 qu'à l'échéance le call termine dans la monnaie (i.e. $S_T > K$) et donc soit exercé. Noter Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

3) Sans refaire les calculs précédents, indiquer comment les adapter pour obtenir la probabilité de $S_T > K$ calculée cette fois à un instant t quelconque entre 0 et T. L'expression obtenue, qu'on notera X_t, dépend du cours S_t qui est une variable aléatoire : $X_t = P(S_T > K|\mathcal{F}_t)$ est donc un processus.

4) On note P^* la probabilité risque-neutre du modèle de Black-Scholes. On souhaite avoir aussi une expression de la probabilité à t sous P^* que le call soit exercé. Toujours en adaptant les calculs sans les refaire, trouver une expression de cette probabilité qu'on notera

$$X_t^* = P^*(S_T > K|\mathcal{F}_t)$$

5) On veut savoir si X^* est une martingale sous P^* quand le taux d'intérêt est nul.
La formule d'Itô, énoncée en cours pour un processus à valeurs dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, est également valable pour une fonction $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}$ dès lors que le processus d'Itô auquel on l'applique est à valeurs dans cet ouvert.
Dans le cas où $r = 0$, à partir de l'EDS satisfaite par le processus S, déterminer l'EDS satisfaite par le processus X^* et conclure. On notera φ la densité de la $\mathcal{N}(0;1)$. On ne demande pas de simplifier l'EDS de X^* plus qu'il n'est nécessaire pour déterminer si c'est une martingale.

Ex 3. straddle à la monnaie

Un straddle à la monnaie est une option européenne dont le payoff est égal à la valeur absolue de la différence entre le cours initial du sous-jacent et son cours à l'échéance : $h = |S_T - S_0|$. On notera A_t la prime à l'instant t de cette option.

1) On modélise le cours de l'action sous-jacente S en utilisant le modèle binomial qui a pour paramètres $u = e^{\nu}$ et $d = e^{-\nu}$ où $\nu = 0,1$. Le taux d'intérêt r par période est très petit et pour simplifier on prend $r = 0$. Cette modélisation satisfait-elle la condition de Cox, Ross et Rubinstein ? Vérifier l'absence d'opportunité d'arbitrage.

2) Le cours initial est $S_0 = 100$€. Représenter sous forme d'arbre les valeurs possibles $(S_n)_{0\leq n\leq 3}$ de cette action après une, deux ou trois périodes.

3) Déterminer la probabilité risque-neutre P^* de ce modèle (faute d'ordinateur, on arrondira à 3 chiffres après la virgule).

4) On s'intéresse aux processus $(C_n)_{0\leq n\leq 3}$ et $(P_n)_{0\leq n\leq 3}$ des valeurs du call et du put européens d'échéance 3 et de strike 100. Expliquer pourquoi ce sont des martingales sous P^* dans le cadre de ce modèle (et pourquoi ce n'est pas le cas dans la plupart des modèles). En déduire une relation permettant de calculer C_{n-1} à partir des différentes valeurs possibles de C_n, ou P_{n-1} à partir des valeurs de P_n.

5) Représenter sous forme d'arbre les valeurs des processus $(C_n)_{0\leq n\leq 3}$ et $(P_n)_{0\leq n\leq 3}$.

6) Vérifier que $|x| = (x)_+ + (-x)_+$ pour tout réel x. Représenter sous forme d'arbre les valeurs $(A_n)_n$ du straddle d'échéance 3 de payoff $h = |S_3 - 100|$.

7) On souhaite répliquer (i.e. simuler) le straddle, c'est-à-dire gérer des actions et de l'argent de telle sorte que la valeur à chaque instant de notre portefeuille est la même que celle du straddle. Sur un arbre, indiquer la quantité d'actions que doit contenir ce portefeuille de couverture dans les différents cas.

8) Un modèle binomial à trois périodes est utile pour une modélisation à court terme. Mais on s'intéresse maintenant à des straddles à la monnaie à plus "long" terme (échéance T supérieure à un mois). Le cours initial de l'action est toujours $S_0 = 100$ euros, sa volatilité est notée σ, et on suppose toujours, pour simplifier, que le taux d'intérêt annuel est très petit et on prend donc $r = 0$. En utilisant la formule de Black-Scholes, donner la prime et le delta du straddle à la monnaie, calculés à l'instant initial. On notera Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Prouver que le delta du straddle à la monnaie est positif et inférieur à $\frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}$, ce qui justifie l'habitude de considérer que les straddles à la monnaie sont quasiment delta-neutres (pour des échéance et volatilité pas trop grandes).

Université Lille1
Sciences et Technologies

U.F.R. de Mathématiques

Master 1 MathFi, 2012-2013 **M.Fradon**

Processus Stochastiques. Examen, 31 mai 2012. Corrigé

Ex 1. Call américain

Si le détenteur du call l'exerce à l'instant t, il obtiendra le montant $(S_t - K)_+$. S'il ne l'exerce pas, il conservera le montant $C_t^{\rm am}$ (sous forme d'option, ou sous forme de cash s'il revend l'option). Le détenteur n'a donc intérêt à exercer l'option que si $(S_t - K)_+ > C_t^{\rm am}$, autrement dit si $S_t - K > C_t^{\rm am}$.
Il est clair qu'une option américaine offre au moins les mêmes possibilités de gain qu'une option européenne (on peut décider d'exercer à l'échéance T). Elle offre aussi des possibilités supplémentaires (on peut décider d'exercer avant T). Par conséquent la valeur de l'option américaine est au moins égale à celle de l'option européenne : $C_t^{\rm am} \geq C_t$ à chaque instant t.
La relation de parité entre le call et le put européens de mêmes caractéristiques indique que

$$C_t + \frac{K}{S_T^0} S_t^0 = P_t + S_t \quad \text{ i.e. } \quad S_t - K = C_t + K\frac{S_t^0 - S_T^0}{S_T^0} - P_t$$

Les termes $S_t^0 - S_T^0$ et $-P_t$ sont négatifs, ce qui prouve que dans tous les cas et pour tout t on a $S_t - K \leq C_t$. Conclusion :

$$\forall t \in [0;T] \quad (S_t - K)_+ \leq C_t \leq C_t^{\rm am}$$

Il vaut donc toujours mieux conserver ou revendre un call américain plutôt que l'exercer.

Ex 2. EDS de la probabilité d'exercice d'un call

1) Dans le modèle de Black-Scholes, le cours de l'action S est représenté par le processus $S_t = S_0\, e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$ où B est un brownien sous la probabilité historique P. Il satisfait l'EDS

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sigma S_s\, dB_s + \int_0^t \mu S_s\, ds$$

2) La probabilité que le call soit exercé est à l'instant initial égale à $X_0 = P(S_T > K)$.

$$X_0 = P(S_0\, e^{\sigma B_T + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} > K) = P\left(\sigma B_T + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T > -\ln(\frac{S_0}{K})\right)$$

B est brownien sous P donc $\frac{B_T}{\sqrt{T}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$ et comme cette loi est symmétrique on a

$$X_0 = P\left(\sigma\sqrt{T}\ \frac{B_T}{\sqrt{T}} > -\ln(\frac{S_0}{K}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln(\frac{S_0}{K}) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T\right)\right)$$

3) $X_t = P(S_T > K | \mathcal{F}_t)$ peut être obtenu par un raisonnement identique au précédent. On se place à l'instant t, le cours actuel est S_t au lieu de S_0 et la durée jusqu'à l'échéance est $T - t$ au lieu de T

$$X_t = \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln(\frac{S_t}{K}) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right)\right)$$

4) On veut maintenant un résultat analogue sous la probabilité risque-neutre P^*. Les égalités précédentes restent vraies en remplaçant B_t par $B_t^* = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$ qui est un brownien sous P^* d'après le théorème de Girsanov, et en remplaçant μ par r, dans l'expression de S et dans l'EDS. On obtient

$$X_t^* = P^*(S_T > K|\mathcal{F}_t) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right)\right)$$

5) On utilise la formule d'Itô pour calculer $X_t^* = f(t, S_t)$ où

$$f(x,t) = \Phi(\alpha(t,x)) \quad \text{où} \quad \alpha(t,x) = \frac{\ln(x) - \ln(K)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t}$$

La fonction ln est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$, donc f est une fonction $\mathcal{C}^2$ de x sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $(S_t)_t$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, cette régularité est suffisante. La fonction f est aussi une fonction $\mathcal{C}^1$ de t sur $[0;T[$ mais non sur $[0;T]$, le résultat obtenu sera donc valable pour $t < T$ mais non pas jusqu'à T. On note $\varphi = \Phi'$ la densité de la loi $\mathcal{N}(0;1)$. On a P^*-p.s. pour tout $t < T$

$$X_t^* = X_0^* + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, S_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, S_s)\sigma S_s\, dB_s^* + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, S_s)\sigma^2 S_s^2\, ds$$

A cause de l'unicité de la décomposition en processus d'Itô, X^* sera une martingale sous P^* si et seulement si le terme de drift est nul. Il nous faut les dérivées de f.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}}\varphi(\alpha(t,x))$ et comme $\varphi'(\alpha) = -\alpha\varphi(\alpha)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = -\frac{\varphi(\alpha(t,x))}{x^2\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{\alpha(t,x)}{x^2\sigma^2(T-t)}\varphi(\alpha(t,x)) = -\frac{\varphi(\alpha(t,x))}{x^2}\left(\frac{1}{2\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\ln(x)-\ln(K)}{(\sigma\sqrt{T-t})^3}\right)$$

et $\quad \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \dfrac{1}{2\sqrt{T-t}}\left(\dfrac{\ln(x)-\ln(K)}{\sigma(T-t)} + \dfrac{\sigma}{2}\right)\varphi(\alpha(t,x))$

donc $\quad X_t^* = X_0^* + \displaystyle\int_0^t \frac{1}{\sqrt{T-t}}\varphi(\alpha(s,S_s))\, dB_s^* + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,S_s) + \frac{\sigma^2}{2}S_s^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,S_s)\, ds$

On constate que le drift est

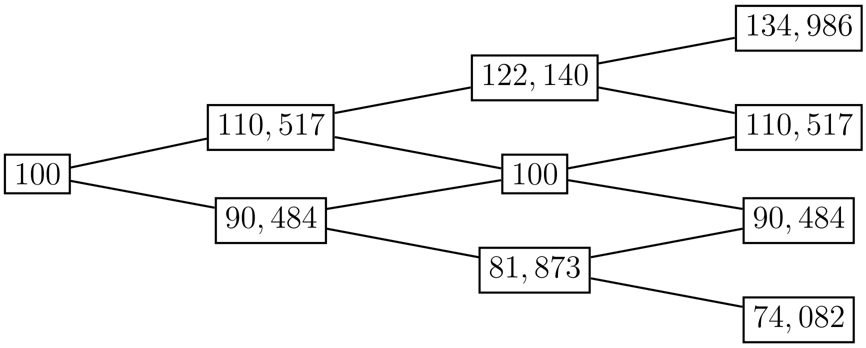
$$\left(\frac{1}{2\sqrt{T-t}}\left(\frac{\ln(x)-\ln(K)}{\sigma(T-t)} + \frac{\sigma}{2}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{2\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\ln(x)-\ln(K)}{(\sigma\sqrt{T-t})^3}\right)\right)\varphi(\alpha(t,x)) = 0$$

et que X^* est donc une martingale. On pouvait le prévoir en pensant à l'écrire sous la forme $X_t^* = E(\mathbb{1}_{S_T>K}|\mathcal{F}_t)$.

Ex 3. straddle à la monnaie

1) On modélise l'action sous-jacente S en utilisant le modèle binomial qui a pour paramètres $u = e^\nu$ et $d = e^{-\nu}$ où $\nu = 0,1$ et $r = 0$. La condition de Cox, Ross et Rubinstein est l'égalité $ud = 1 + r$ qui est satisfaite ici. L'absence d'opportunité d'arbitrage et donc l'existence de la probabilité risque-neutre est assurée car $d = e^{-\nu} < 1 + r = 1 < u = e^\nu$.

2) Puisque le cours initial est $S_0 = 100$€, les valeurs possibles de l'action pendant les trois périodes suivantes sont :



3) La probabilité risque-neutre de ce modèle est P^* sous laquelle à chaque période, indépendamment, le rendement vaut u avec probabilité p^* (et d avec probabilité $1 - p^*$) où

$$p^* = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{1 - e^{-\nu}}{e^{\nu} - e^{-\nu}} \simeq 0,475$$

4) On a vu que la valeur actualisée d'un portefeuille autofinancé forme une martingale sous la probabilité risque-neutre. Ici, ce sont donc les valeurs actualisées du call et du put qui sont des martingales sous P^*. Mais puisque $r = 0$, les valeurs actualisées $(\tilde{C}_n)_n$ et $(\tilde{P}_n)_n$ sont les mêmes que les valeurs non actualisées $(C_n)_n$ et $(P_n)_n$. Donc, contrairement à ce qui se passe quand r est non-nul, $(C_n)_n$ et $(P_n)_n$ sont ici des martingales :

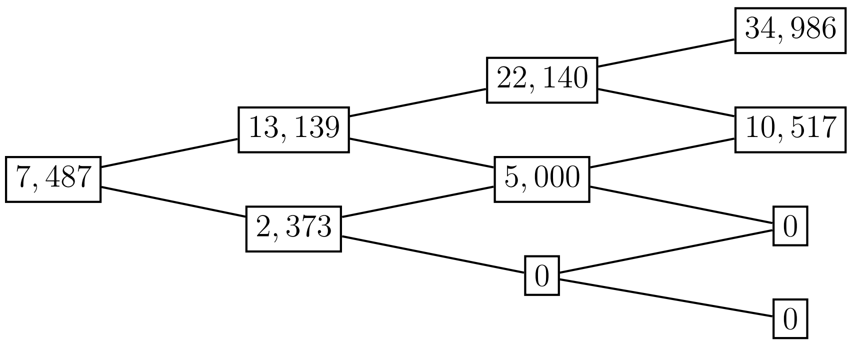
$$C_n = E^*\left((S_3 - 100)_+ | \mathcal{F}_n\right) \quad \text{et} \quad P_n = E^*\left((100 - S_3)_+ | \mathcal{F}_n\right)$$

En conséquence

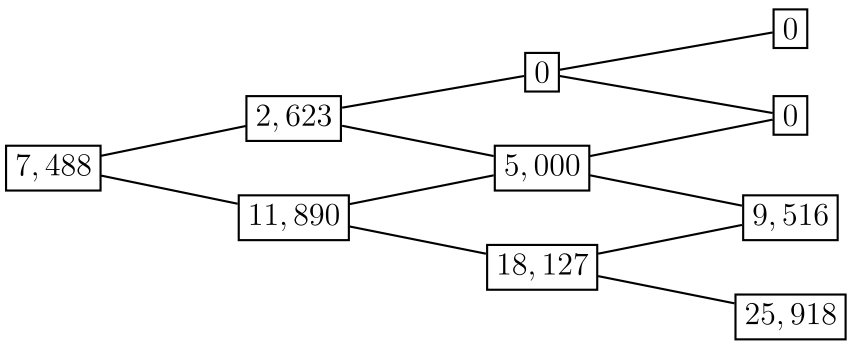
$$C_{n-1} = E^*\left(C_n | \mathcal{F}_{n-1}\right) = p^* C_n(S_{n-1}u) + (1 - p^*) C_n(S_{n-1}d)$$

La même relation existe entre P_n et P_{n-1}.

5) Les relations précédentes, et le fait que les valeurs du call et du put à l'échéance sont connues car égales à leur payoff, permet de remplir "en remontant le temps" les arbres de valeurs pour le call :

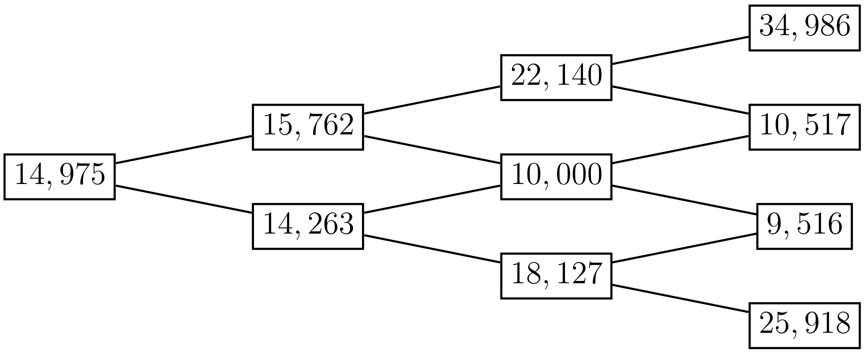


et pour le put (on pourrait aussi utiliser ici la relation de parité) :



Remarque : La relation de parité dans le cas où $r = 0$ et $K = S_0$ donne $C_0 = P_0$, ce qu'on retrouve ici aux arrondis près.

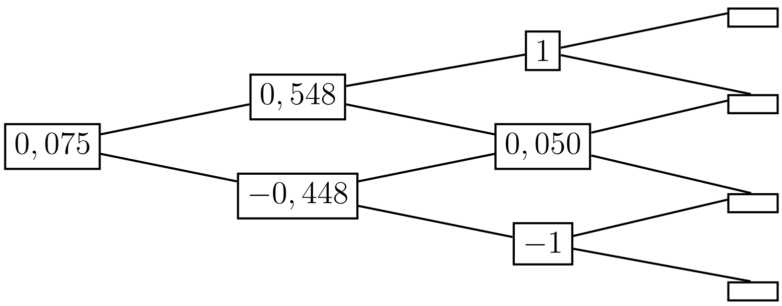
6) Si x est positif, $|x| = x = (x)_+$ et $(-x)_+ = 0$. Si x est négatif, $|x| = -x = (-x)_+$ et $(x)_+ = 0$, dans dans tous les cas $|x| = (x)_+ + (-x)_+$. Le straddle à la monnaie a pour payoff $h = |S_3 - 100| = (S_3 - 100)_+ + (100 - S_3)_+$, il est donc équivalent à la détention d'un call (payoff $(S_3 - 100)_+$) et d'un put payoff $(100 - S_3)_+$) d'échéance 3 et de strike 100. On en déduit que $A_n = C_n + P_n$ ce qui donne l'arbre suivant :



7) La quantité d'actions à avoir en portefeuille pour répliquer le straddle est son delta, donné par la formule :

$$\Delta_{n-1} = \frac{A_n(S_{n-1}u) - A_n(S_{n-1}d)}{S_{n-1}(u-d)}$$

Les arbres des valeurs de S_n et de A_n donnent le nombre d'actions à détenir dans les différents cas :



8) La formule de Black-Scholes donne les primes du call et du put à l'instant initial. Avec $r = 0$ et $K = S_0 = 100$ elle s'écrit

$$C_0 = 100\Phi(d_1) - 100\Phi(d_1 - \sigma\sqrt{T}) \quad \text{et} \quad P_0 = 100\Phi(-d_1 + \sigma\sqrt{T}) - 100\Phi(-d_1) \quad \text{où} \quad d_1 = \frac{\sigma}{2}\sqrt{T}$$

ce qui donne

$$C_0 = P_0 = 100\ \left(\Phi(\frac{\sigma}{2}\sqrt{T}) - \Phi(-\frac{\sigma}{2}\sqrt{T})\right) = 100\ \left(2\ \Phi(\frac{\sigma}{2}\sqrt{T}) - 1\right)$$

On retrouve l'égalité des primes qui découle de la relation de parité. On a prouvé que le straddle est somme du call et du put donc

$$A_0 = 200\ \left(2\ \Phi(\frac{\sigma}{2}\sqrt{T}) - 1\right)$$

On sait aussi que $\Delta_0^{\text{call}} = 1 + \Delta_0^{\text{put}} = \Phi(d_1) = \Phi(\frac{\sigma}{2}\sqrt{T})$ d'où

$$\Delta_0^{\text{straddle}} = \Delta_0^{\text{call}} + \Delta_0^{\text{put}} = 2\Phi(\frac{\sigma}{2}\sqrt{T}) - 1 = \int_{-\frac{\sigma}{2}\sqrt{T}}^{\frac{\sigma}{2}\sqrt{T}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma\sqrt{T}$$

en majorant la densité gaussienne par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Université Lille1 Sciences et Technologies

U.F.R. de Mathématiques

Master 1 MathFi, 2012-2013 **M.Fradon**

Examen,deuxième session, 26 juin 2013
durée : 3 heures
Calculatrice et un recto-verso A4 manuscrit autorisés

Ex 1. L'action GLE a un cours actuel de 27, 37€. Sa volatilité annuelle est de 0, 35.

1) Quelle est la volatilité mensuelle de GLE ?

2) En utilisant la formule de Black-Scholes, calculer la prime de l'option d'achat européenne de prix d'exercice 28€ sur cette action. La durée jusqu'à échéance est égale à 11 mois. Le taux d'intérèt à utiliser (l'EURIBOR 11 mois) vaut 0, 45%. Attention, son nom ne l'indique pas, mais il s'agit bien d'un taux d'intérèt *annuel.*

3) Combien vaut la prime de l'option de vente européenne de prix d'exercice 28€ et d'échéance 11 mois sur GLE ?

Ex 2. Soit $(X_t)_{t\in[0;T]}$ un processus d'Itô qui satisfait l'équation différentielle stochastique

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s\sqrt{X_s}\, dB_s + \int_0^t X_s^2\, ds$$

où B désigne le Brownien.

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 1$. En écrivant sous forme d'une série l'expression $\dfrac{e^x - 1}{x}$ prouver que f est $\mathcal{C}^\infty$, i.e. qu'elle a une infinité de dérivées.

2) Déterminer l'équation différentielle stochastique satisfaite par le processus $(f(X_t))_{t\in[0;T]}$. Ce processus est-il une martingale ? (justifier)

Ex 3. On veut pricer et couvrir des options d'échéance trois semaines sur une action donc le cours actuel est $S_0^1 = 150$€. Pour cela, on utilise un modèle binomial dont la période est la semaine. On considèrera pour simplifier qu'une année dure 52 semaines. Le taux d'intérêt par semaine est $r = 0,0006$. On utilise le modèle binomial de période la semaine et de paramètres $u = 1,002$ et $d = 0,9992$.

1) A quel taux d'intérêt annuel correspond le taux d'intérêt hebdomadaire de $r = 0,06\%$?

2) Ce modèle admet une probabilité risque-neutre. Le vérifier et la calculer.

3) Ce modèle satisfait-il la condition de Cox, Ross et Rubinstein ?

4) Représenter sur un arbre toutes les valeurs possibles du cours de l'action d'après ce modèle, de la valeur initiale 150€ jusqu'aux différentes valeurs finales. Indiquer les sommes encaissées à échéance par le détenteur d'une option d'achat de prix d'exercice 150€ sur cette action, et celles encaissées par le détenteur d'une option de vente de même prix d'exercice.

5) Une personne détient un portefeuille composé à l'instant 2 de 1500€ placés au taux r, 100 actions et 120 puts de prix d'exercice 150€ comme ci-dessus. Calculer la valeur liquidative et le delta de son portefeuille dans le cas où l'action cote actuellement à $149,76$€. Cette personne a-t-elle intérêt à ce que le cours de l'action monte ou baisse lors de la dernière période ?

6) On s'intéresse à une option de type "call spread". Celui qui la détient recevra à l'échéance

- cinquante euros si le cours de l'action est au-dessus de $150,50$€ à l'échéance ;
- cent fois la différence entre le cours final et le cours initial, i.e. $100(S_3^1 - S_0^1)$, si le cours final est entre $150,00$ et $150,50$€ ;
- rien sinon.

Calculer la prime de cette option aux instants 0, 1 et 2 en fonction du cours de l'action (expliquer comment vous procédez).

7) On veut détenir un call spread du type décrit à la question précédente, mais qu'il n'est pas en vente sur le marché. Une solution consiste à gérer un portefeuille selon une stratégie qui assure que la valeur finale du portefeuille est la même que celle qu'aurait le call spread. Décrire cette stratégie, en présentant sur un arbre la composition du portefeuille à chaque étape.

Corrigé de la 2eme session

Ex 1. 1) Sous l'hypothèse d'indépendance des rendements sucessifs, ce qui est le cas quand on utilise la formule de Black-Scholes, la variance σ_a^2 du rendement annuel est la somme des variances σ_m^2 des rendements mensuels. La volatilité mensuelle de GLE est donc

$$\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{12}}\sigma_a = \frac{0,35}{\sqrt{12}} \simeq 0.101 = 10,1\%$$

2) On applique simplement la formule de Black-Scholes avec $S_0 = 27,37$, $K = 28$, $T = 11/12$ (échéance en années), $r = 0,0045$ (taux d'intérêt annuel) et $\sigma_a = 0,35$:

$$d_1 = \frac{1}{0,35\sqrt{11/12}}\left(\ln(27,37/28) + (0,0045 + \frac{0,35^2}{2})\frac{11}{12}\right) \simeq 0,112$$

La table de la gaussienne donne les valeurs nécessaire pour obtenir la prime du call :

$$C_0 = 27,37\Phi(0,112)-28e^{-0,0045\frac{11}{12}}\Phi(-0,223) \simeq 27,37\times0,5438-28e^{-0,0045\frac{11}{12}}(1-0,5871) \simeq 3,37€$$

3) La prime du put peut en être déduite grâce à la relation de parité :

$$P_0 = C_0 + 28e^{-0,0045\frac{11}{12}} - 27,37 \simeq 3,88€$$

Ex 2. 1) On utilise la série exponentielle, qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$$

Cette série a un rayon de convergence infini : f est analytique donc $\mathcal{C}^\infty$. En particulier f est $\mathcal{C}^2$ et on pourra appliquer la formule d'Itô.

2)

$$f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{x^3e^x - 2x((x-1)e^x + 1)}{x^4} = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x - 2)}{x^3}$$

En appliquant la formule d'Itô :

$$f(X_t) = f(1) + \int_0^t f'(X_s)X_s\sqrt{X_s}\, dB_s + \int_0^t f'(X_s)X_s^2\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)X_s^3\, ds$$

$$f(X_t) = (e-1)+\int_0^t \frac{(X_s-1)e^{X_s}+1}{\sqrt{X_s}}\, dB_s+\int_0^t ((X_s-1)e^{X_s}+1)\, ds+\frac{1}{2}\int_0^t (X_s^2-2X_s+2)e^{X_s}-2\, ds$$

$$f(X_t) = (e-1) + \int_0^t \frac{(X_s-1)e^{X_s}+1}{\sqrt{X_s}}\, dB_s + \int_0^t \frac{X_s^2}{2}e^{X_s}\, ds$$

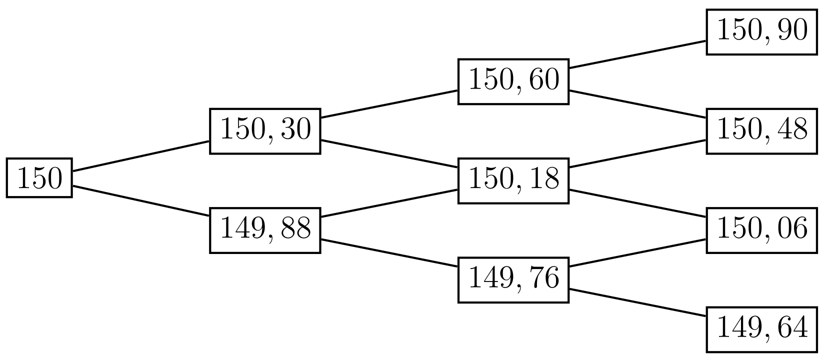
Le processus $(f(X_t))_{t\in[0;t]}$ n'est pas une martingale, comme l'indique la présence d'un drift non-nul dans l'équation. Par exemple, $E(f(X_t)) - E(f(X_0)) = E(\int_0^t \frac{X_s^2}{2}e^{X_s}\, ds) > 0$ pour t proche de 0.

Ex 3. 1) En considérant que l'année comporte 52 semaines, on obtient un taux d'intérèt annuel r_a approximatif de $52r \simeq 52\times 0,0006 = 3,12\%$. Le calcul précis donne $r_a = (1+r)^{52}-1 \simeq 3,1682\%$.

2) La condition $d < 1+r < u$ est satisfaite puisque $0,9992 < 1,0006 < 1,002$. Par conséquent ce modèle binomial admet une probabilité risque-neutre, sous laquelle les rendements sucessifs sont indépendants et prennent la valeur u avec probabilité $p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{1}{2}$ et la valeur d avec probabilité $1-p^* = \frac{1}{2}$.

3) La condition de Cox, Ross et Rubinstein est $ud = (1+r)^2$. Ici $0,9992\times 1,002/1.0006^2 \simeq 0,999998$. Il n'est pas abusif de considérer que ce rapport vaut pratiquement 1, autrement dit que la condition est satisfaite aux inévitables arrondis prêt.

4) Les valeurs successives du cours de l'action sont données par $S_n^1 = S_0^1 \prod_{k=1}^n U_k$ où les U_k sont à valeurs dans $\{d; u\}$ et où n varie de 1 à $N = 3$:



	call	put
$150,90$	$0,90$	0
$150,48$	$0,48$	0
$150,06$	$0,06$	0
$149,64$	0	$0,36$

5) On est à l'instant 2 et l'action cote actuellement à 149, 76€. On détient donc un portefeuille de valeur liquidative $V_2(149,76) = 1500 + 100S_2^1(149,76) + 120P_2(149,76)$. Le théorème de pricing donne pour chaque instant n le prix P_n du put :

$$P_n = \frac{(1+r)^n}{(1+r)^3} E_{P^*}((S_3^1 - 150)_+ | \mathcal{F}_n) \quad \text{donc} \quad P_2(149,76) = \frac{1}{1.0006} E_{P^*}(P_3 | S_2^1 = 149,76)$$

Les valeurs de P_3, qui dépend du cours final S_3^1 sont données à la question précédente.

$$P_2(149,76) = \frac{1}{1.0006}(0,36\times\frac{1}{2} + 0\times\frac{1}{2}) \simeq 0,18$$

La valeur du portefeuille est donc $V_2(149,76) \simeq 1500 + 100\times 149,76 + 120\times 0,18 = 16\,497,6$. Son delta est donné par la formule

$$\Delta_2(149,76) = \frac{V_3(150,06) - V_3(149,64)}{S_3^1(150,06) - S_3^1(149,64)}$$

$$\Delta_2(149,76) = \frac{(1500\times 1,0006 + 100\times 150,06 + 120\times 0) - (1500\times 1,0006 + 100\times 149,64 + 120\times 0,36)}{150,06 - 149,64}$$

$$\Delta_2(149,76) = 100 - \frac{120\times 0,36}{150,06 - 149,64} \simeq -2,86$$

Le delta est négatif, la personne a intérêt à ce que le cours de l'action baisse lors de la dernière période.

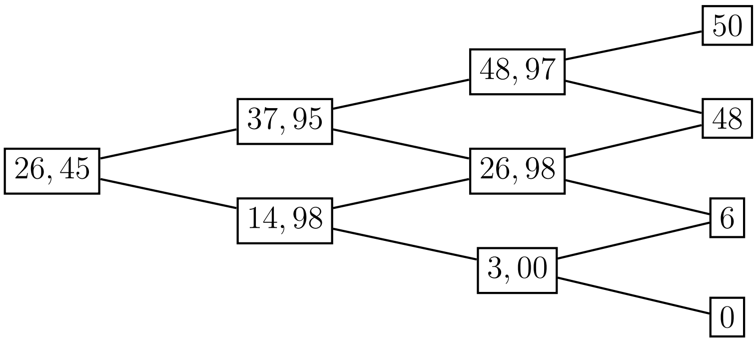
6) Notons X_n la prime à l'instant n de l'option "call spread" à étudier. Son payoff est

$$X_3 = \min(\max(100(S_3^1 - 150), 0), 50) = 100(S_3 - 150)\mathbb{1}_{150 \leq S_3^1 \leq 150,5} + 50\mathbb{1}_{S_3^1 > 150,5}$$

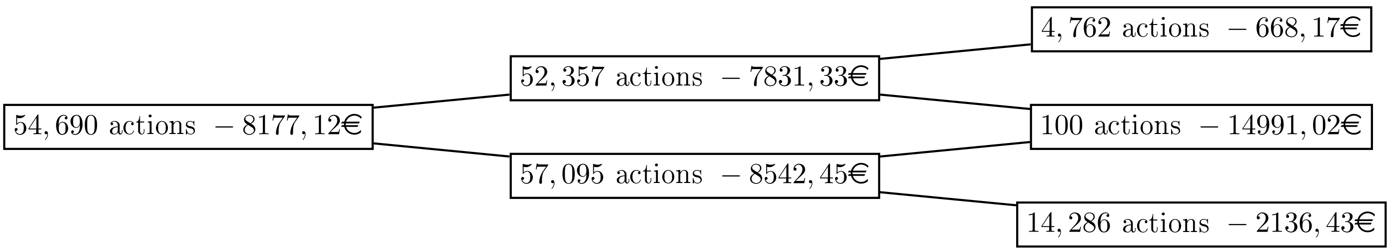
D'après le théorème de pricing, le processus $(X_n)_n$ est une martingale sous P^*, on peut donc calculer les valeurs de X_2 à partir de celles de X_3, puis recommencer pour obtenir les valeurs de X_1, etc. Par exemple :

$$X_2(150, 60) = \frac{1}{1.0006}(50 \times \frac{1}{2} + 48 \times \frac{1}{2}) \simeq 48,97$$

et d'une façon générale



7) On va suivre une stratégie répliquant le "call spread" X. On détermine grâce au delta la quantité d'action en portefeuille, et on obtient par soustraction la somme à laisser au taux r, pour les instants 0, 1 et 2.



U.F.R. de Mathématiques

Master 1 MathFi, 2012-2013 **M.Fradon**

Partiel, 19 mars 2013 (durée : 1h45)

Ex 1. Une action est modélisée par un modèle binomial tel que $u = 1.1$ et $d = 0.9$ avec pour période le trimestre. Le cours initial est $S_0 = 50$ euros et le taux d'intérèt est $r = 0.01$ par trimestre.

1) S'agit-il d'un modèle sans opprtunité d'arbitrage ?

2) On vend à l'instant initial un call européen de strike 55 euros et d'échéance un an sur cette action. Calculer sa prime.

3) Une banque a vendu 1000 calls de ce type et annule son risque en gérant le portefeuille de couverture correspondant. Déterminer la composition de ce portefeuille à l'instant initial.

4) Calculer la prime du put européen de strike 55 euros et d'échéance un an sur l'action modélisée, et indiquer la composition du portefeuille de couverture de ce put.

Ex 2. Autour d'une intégrale stochastique
$B = (B_t)_{t\in[0;T]}$ est un brownien défini sur $[0;T]$ et dans cet exercice on fixe $T > 2$. On définit le processus H par :

$$\forall s \in [0;T] \quad H_s = e^{-|B_1|}\mathbb{1}_{1<s\leq 2}$$

1) H est-il un processus adapté ? Pour quelle filtration ?

2) Exprimer l'intégrale stochastique $\displaystyle\int_0^T H_s\, dB_s$ à partir de la trajectoire du brownien B.

3) Quelle est l'espérance de cette intégale stochastique ?

4) Quelle est sa variance ?

5) Est-il vrai que $\displaystyle\int_0^T H_s\, dB_s$ a au moins 95% de chances d'être entre -10 et 10 ? (prouver cette affirmation ou donner un contre-argument).

6) On définit $I = \int_0^\cdot H_s\, dB_s$ de la façon habituelle : $\forall t \in [0;T] \quad I_t = \displaystyle\int_0^t H_s\, dB_s$
Est-ce une martingale ?
Son carré $\left(\displaystyle\int_0^\cdot H_s\, dB_s\right)^2$ est-il une martingale ?
Même question concernant son cube $\left(\displaystyle\int_0^\cdot H_s\, dB_s\right)^3$.

Université Lille1 Sciences et Technologies

U.F.R. de Mathématiques

Master 1 MathFi, 2012-2013 **M.Fradon**

Corrigé du partiel du 19 mars 2013

Ex 1. 1) Le modèle binomial est sans opportunité d'arbitrage si $d < 1+r < u$, ce qui est le cas ici puisque $0.9 < 1.01 < 1.1$.

2) La probabilité risque-neutre de ce modèle est donnée par :

$$P^*(U_i = u) = 1 - P^*(U_i = d) = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{0.11}{0.2} = \frac{11}{20}$$

L'échéance du call est un an, i.e. $T = 4$ trimestres. Le théorème de pricing donne la prime du call à l'instant initial :

$$C_0 = E^*\left(\frac{(S_4 - 55)_+}{1.01^4}\right)$$

Puisque le nombre de fois où le rendement est u parmi les 4 périodes suit sous P^* la loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{11}{20}$, ceci donne :

$$C_0 = \frac{1}{1.01^4}\sum_{j=0}^{4}(50u^j d^{4-j} - 55)_+ \; C_4^j \; (\frac{11}{20})^j \; (\frac{9}{20})^{4-j}$$

Le terme $50u^j d^{4-j}$ augmente avec j, mais il n'est supérieur à 55 que si $j = 3$ ou $j = 4$ $j = 3$, donc :

$$C_0 = \frac{1}{1.01^4}\left((50(1.1)^3 0.9 - 55)4(\frac{11}{20})^3 \; (\frac{9}{20}) + (50(1.1)^4 - 55)(\frac{11}{20})^4\right) \simeq 3.0095996$$

3) Pour connaitre la composition du portefeuille de couverture, il faut calculer le delta de ce call à l'instant initial, donc connaitre la valeur $C_1(55)$ du call à l'instant 1 si le premier rendement tiré est u, et la valeur $C_1(45)$ du call à l'instant 1 si le premier rendement tiré est d. On procède comme à la question précédente.

$$C_1(55) = \frac{1}{1.01^3}\left((55(1.1)^2 0.9 - 55)3(\frac{11}{20})^2 \; (\frac{9}{20}) + (50(1.1)^3 - 55)(\frac{11}{20})^3\right) \simeq 4.879984$$

$$C_1(45) = \frac{1}{1.01^3}\left((45(1.1)^3 - 55)(\frac{11}{20})^3\right) \simeq 0.790454$$

$$\Delta_0^{call} = \frac{C_1(55) - C_1(45)}{55 - 45} \simeq 0.408953$$

La banque qui a vendu 1000 calls peut donc annuler son risque en utilisant les 3009.60€ encaissés et un emprunt de 17440.40 pour acheter 409 actions à 50€.

4) Pour éviter des calculs, on déduit la prime du put de celle du call grâce à la relation de parité, et on déduit de même le delta :

$$S_0 + P_0 = \frac{K}{(1+r)^4} + C_0 \quad \text{i.e.} \quad P_0 \simeq \frac{55}{1.01^4} + 3.0095996 - 50 \simeq 5.86$$

$$1 + \Delta_0^{put} = \Delta_0^{call} \quad \text{i.e.} \quad \Delta_0^{put} \simeq 0.408953 - 1 \simeq -0.59$$

La couverture d'un put nécessite de vendre à découvert 0.59 actions et de placer 35.36€ au taux r.

Ex 2. 1) L'espace probabilisé sur lequel on travaille est muni d'un brownien. Il est habituel de mettre dessus la filtration naturelle du brownien. Autrement dit, la filtration $(\mathcal{F}_s)_s$ qu'on prend ici est la plus petite filtration qui complète $(\sigma(\{B_u\ ;\ 0 \leq u \leq s\}))_s$.
Avec ce choix, le processus H sera adapté dès lors que H_s est $\sigma(\{B_u\ ;\ 0 \leq u \leq s\})$-mesurable pour tout s. Or si $s \leq 1$ ou $s > 2$ la variable aléatoire H_s est nulle donc mesurable par rapport à n'importe quelle tribu. Et si $1 < s \leq 2$ la variable aléatoire H_s est égale à $e^{-|B_1|}$ qui est $\sigma(\{B_u\ ;\ 0 \leq u \leq 1\})$-mesurable donc $\mathcal{F}_s$-mesurable. Par conséquent, H est adapté.

2) H est un processus élémentaire, donc par définition de l'intégale stochastique :

$$\int_0^t H_s\, dB_s = e^{-|B_1|}(B_{2\wedge t} - B_{1\wedge t}) \quad \text{et en particulier} \quad \int_0^T H_s\, dB_s = e^{-|B_1|}(B_2 - B_1)$$

puisque $T > 2$.

3) L'intégrale stochastique est une martingale, elle est donc constante en espérance, ce qui donne ici

$$E\left(\int_0^T H_s\, dB_s\right) = E\left(\int_0^0 H_s\, dB_s\right) = E(0) = 0$$

4) On utilise la propriété d'isométrie :

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^T H_s\, dB_s\right) = E\left((\int_0^T H_s\, dB_s)^2\right) = E\left(\int_0^T H_s^2\, ds\right) = E\left(\int_1^2 e^{-2|B_1|}\, ds\right) = E\left(e^{-2|B_1|}\right)$$

Puisque B_1 suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$:

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^T H_s\, dB_s\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x|} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-2x}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{2e^4}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+2)^2}{2}}\, dx$$

et en utilisant la table de la gaussienne :

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^T H_s\, dB_s\right) = 2e^4 \int_2^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy = 2e^4 P(B_1 > 2) \simeq 2e^4(1 - 0,9772) \simeq 0,3369$$

5) Puisque la variance est connue, utilisons l'inégalité de Tchebychev :

$$P\left(\left|\int_0^T H_s\, dB_s\right| \geq 10\right) \leq \frac{2,490}{100} = 0,003369$$

Il y a donc moins de 1% de chances que cette intégrale stochastique soit hors de $]-10;10[$ et donc plus de 99% de chances qu'elle soit entre -10 et 10.

6) Le processus $\displaystyle\int_0^{\cdot} H_s\, dB_s$ est une martingale puisque c'est l'intégrale stochastique d'un processus élémentaire. Son carré $\displaystyle\left(\int_0^{\cdot} H_s\, dB_s\right)^2$ n'est pas une martingale sinon son espérance serait constante, donc égale à celle de $\displaystyle\left(\int_0^0 H_s\, dB_s\right)^2$ qui est nulle. Or on vient de prouver que l'espérance de $\displaystyle\left(\int_0^T H_s\, dB_s\right)^2$ est non-nulle. Reste à étudier le cube :

$$I_t^3 = \left(\int_0^t H_s\, dB_s\right)^3 = e^{-3|B_1|}(B_{2\wedge t} - B_{1\wedge t})^3$$

Fixons $s < t$ dans $[0;T]$ et essayons de prouver que $E\left(I_t^3 - I_s^3 | \mathcal{F}_s\right) = 0$. Si $s < t \leq 1$ c'est evident. Sinon on calcule :

$$E\left(I_t^3 - I_s^3 | \mathcal{F}_s\right) = E\left(e^{-3|B_1|}((B_{2\wedge t} - B_{1\wedge t})^3 - (B_{2\wedge s} - B_{1\wedge s})^3) | \mathcal{F}_s\right)$$

Si $1 < s < t \leq 2$ c'est égal à $e^{-3|B_1|}\ E\left((B_t - B_1)^3 - (B_s - B_1)^3 | \mathcal{F}_s\right)$ qu'on peut développer :

$$= e^{-3|B_1|}\ E\left((B_t - B_s)^3 + 3(B_t - B_s)^2(B_s - B_1) + 3(B_t - B_s)(B_s - B_1)^2 | \mathcal{F}_s\right)$$

Comme $(B_t - B_s)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et $(B_s - B_1)$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable, on obtient :

$$= e^{-3|B_1|}\left(E((B_t - B_s)^3) + 3(B_s - B_1)E((B_t - B_s)^2) + 3(B_s - B_1)^2 E(B_t - B_s)\right)$$

et puisque $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0; t-s)$:

$$E\left(I_t^3 - I_s^3 | \mathcal{F}_s\right) = 3(t-s)e^{-3|B_1|}(B_s - B_1)$$

Ceci n'est pas la variable aléatoire nulle, c'est même presque surement non-nul, donc I^3 n'est pas une martingale