Université Lille1 Sciences et Technologies

U.F.R. de Mathématiques

Master 1 MathFi, 2013-2014 **M.Fradon**

Processus Stochastiques. Examen du 23 mai 2014

durée : 3 heures

Calculatrice et un recto-verso A4 manuscrit autorisés

Ex 1. On rappelle la formule de Black-Scholes pour le call (vanille) européen de strike K et d'échéance T sur un sous-jacent de prix initial S_0 et de volatilité σ :

$$C_0 = S_0\ \Phi(d_1) - K\ e^{-rT}\ \Phi(d_1 - \sigma\sqrt{T}) \quad \text{où} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + rT + (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Réécrire cette formule dans le cas d'un call de prix d'exercice 90€ et d'échéance 6 mois sur une action de cours actuel 94€ et de volatilité annuelle $0,60$ dans un marché où on peut emprunter ou placer de l'argent au taux de 0,3% par mois. Puis calculer la prime de ce call.

Ex 2. Le carré d'un cours de bourse

Le cours d'une action fluctue avec une tendance (rendement) μ et une volatilité σ. On le représente selon le modèle de Black-Scholes par l'équation différentielle stochastique

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sigma S_s\ dB_s + \int_0^t \mu S_s\ ds$$

Le carré $U_t = S_t^2$ du cours de cette action fluctue également. Déterminer quelle équation différentielle stochastique suit le carré U et corriger l'affirmation fausse suivante : "Quand on élève au carré un cours, la tendance et la volatilité sont doublées".

Est-il possible que le carré du cours soit une martingale ? Si oui, à quelle(s) condition(s) ? (justifier)

Ex 3. Gap Option

Une "option Gap" est une option présentant un écart entre le strike K_1 (prix d'exercice) qui détermine le montant versé au détenteur et le trigger K_2 (prix d'activation) qui détermine si l'option est exercée ou non. Dans un marché sans opportunité d'arbitrage, on veut évaluer la prime d'un call Gap. Le sous-jacent est une action S dont le cours à l'échéance T vaut S_T. Le détenteur du call Gap reçoit à l'échéance la somme

$$G_T = \begin{cases} S_T - K_1 & \text{si } S_T > K_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le strike K_1 et le trigger K_2 sont fixés dans le contrat, de même que l'échéance T.

1) A quelle condition sur K_1 et K_2 le call Gap est-il une option d'achat classique ? En finance, l'option d'achat "classique", souvent appelée *call* tout court, est appelée *call vanille* lorsqu'il est nécessaire de la distinguer d'autres options d'achat plus exotiques, comme les calls binaires. Ici, on utilisera cette terminologie pour éviter de confondre le call vanille et le call Gap.

2) A quelle condition sur K_1 et K_2 le call Gap est-il un actif conditionnel ? Dans la suite, on supposera cette condition satisfaite.

3) On note $C_0(K_1)$ et $C_0(K_2)$ les primes à l'instant initial des calls vanilles de prix d'exercice K_1 et K_2 sur S. L'échéance T reste la même. Par un argument d'absence d'arbitrage, établir deux inégalité permettant de comparer la prime initiale G_0 du call Gap et les primes des deux calls vanilles.

4) Dans cette question et la suivante, l'action sous-jacente est modélisée par un modèle binomial tel que $u = 1,1$ et $d = 0,9$ avec pour période le trimestre. Le cours initial est $S_0 = 50$ euros et le taux d'intérêt est $r = 0,01$ par trimestre. Le call Gap est d'échéance 9 mois, de strike $K_1 = 50$€ et de trigger $K_2 = 55$€. Quelle est, sous la probabilité risque-neutre, la probabilité que le détenteur de l'option Gap reçoivent un versement à l'échéance (i.e. un payoff strictement positif) ? De combien est alors ce versement ? En déduire la prime G_0 de l'option Gap à l'instant 0.

5) L'émetteur de l'option Gap se constitue un portefeuille de couverture : le montant G_0 est réparti en Δ_1 actions et une somme placée au taux r. Calculer cette répartition.

6) A partir d'ici, l'action sous-jacente est modélisée par un modèle de Black-Scholes. On note, comme dans le cours, σ sa volatilité, μ son rendement par unité de temps, et r le taux d'intérêt.

Exprimer le payoff G_T du call Gap comme combinaison linéaire du payoff $C_T(K_2)$ du call vanille de strike K_2 et du payoff $\mathbb{1}_{S_T > K}$ du call binaire de prix d'exercice K, pour un K que l'on déterminera. En déduire un lien entre la prime initiale G_0 du call Gap et la prime initiale $C_0(K)$ du call vanille. En utilisant la formule de Black-Scholes pour les calls vanilles, établir une formule analogue pour les calls Gap.

7) Pour couvrir le call Gap, on a besoin de connaitre son Delta. Le calculer. On pourra utiliser le fait que le Delta du call vanille est $\Phi(d_1)$ et on laissera le résultat sous la forme d'une fonction de d_1.

8) La formule de pricing établie à la question 6 donne-t-elle toujours la valeur du call Gap dans le cas où la condition établie à la question 2 n'est pas remplie, i.e. quand K_1 et K_2 ne sont pas tels que le call Gap est un actif conditionnel ? (justifier)

Processus Stochastiques. Examen, 23 mai 2014. Corrigé

Ex 1. On utilise la formule de Black-Scholes en veillant à la cohérence entre les valeurs auxquelles on l'applique. Si on décide d'utiliser la volatilité annuelle $0,60$, il faut exprimer en années l'échéance de 6 mois : $T = 0,5$. Et on utilise le taux d'intérêt annuel $r = (1+0,003)^{12} - 1 \simeq 3,66\% = 0,0366$. La prime à l'instant initial du call de prix d'exercice $K = 90$€ sur l'action de cours actuel $S_0 = 94$€ vaut alors :

$$C_0 = S_0\ \Phi(d_1) - K\ e^{-rT}\ \Phi(d_1 - \sigma\sqrt{T}) \quad \text{où} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + rT + (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Ici, ceci donne

$$d_1 = \frac{\ln(94/90) + 0,0366 \times 0,5 + (0,6^2/2) \times 0,5}{0,6\sqrt{0,5}} \simeq 0,357761$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0,357761 - 0,6\sqrt{0,5} \simeq -0,066503$$

D'après la table $\Phi(0,3578) \simeq 0,6398$ et $\Phi(-0,0665) \simeq 1 - 0,5265$ donc

$$C_0 \simeq 94 \times 0,6398 - 90\ e^{-0,0366\times 0,5}(1 - 0,5265) \simeq 18,299€$$

Ex 2. Le carré d'un cours de bourse

Le cours d'une action fluctuant avec tendance μ et volatilité σ est représenté par l'EDS

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sigma S_s\ dB_s + \int_0^t \mu S_s\ ds$$

D'après la formule d'Itô, le carré $U_t = S_t^2$ du cours évolue selon l'équation

$$S_t^2 = S_0^2 + \int_0^t 2\sigma S_s^2\ dB_s + \int_0^t 2\mu S_s^2\ ds + \frac{1}{2}\int_0^t 2\sigma^2 S_s^2\ ds$$

Autrement dit $U = S^2$ satisfait l'EDS

$$U_t = U_0 + \int_0^t 2\sigma U_s\ dB_s + \int_0^t (2\mu + \sigma^2) U_s\ ds$$

Quand on élève au carré un cours, la volatilité est donc doublée, mais la tendance est plus que le double de la tendance initiale : elle devient le double de la tendance d'origine plus le carré de la volatilité.

Est-il possible que U soit une martingale ? Il faut pour cela que chaque $\int_0^t (2\mu + \sigma^2) U_s\ ds$ soit d'espérance nulle, puisque U_t a alors même espérance que U_0 et que $\int_0^t 2\sigma U_s\ dB_s$ est d'espérance nulle. U étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, les $\int_0^t U_s\ ds$ ne peuvent être d'espérance nulle et la seule possibilité pour que U soit une martingale est donc d'avoir $2\mu+\sigma^2$ nul, i.e. $\mu=-\frac{\sigma^2}{2}$. Comme $E^*\left(\int_0^t U_s^2\ ds\right)<+\infty$, $\int_0^{\cdot} 2\sigma U_s\ dB_s$ est bien une martingale, donc $\mu=-\frac{\sigma^2}{2}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que le carré U soit une martingale.

Une autre approche de cette question, peut-être moins naturelle mais plus rapide, consiste à résoudre l'EDS

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sigma S_s\ dB_s + \int_0^t \mu S_s\ ds$$

Le drift $x \longmapsto \mu x$ et le coefficient de diffusion $x \longmapsto \sigma x$ sont lipschitziens et sous-linéaires, et S_0 déterministe, donc cette EDS admet pour unique solution

$$S_t = S_0\ e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

dont le carré

$$U_t = S_0^2\ e^{2\sigma B_t + (2\mu-\sigma^2)t}$$

est une martingale si et seulement si $2\mu-\sigma^2=-(2\sigma)^2/2$ i.e. $\mu=-\frac{\sigma^2}{2}$.

Ex 3. Gap Option

1) Le call Gap a pour payoff $G_T=(S_T-K_1)\mathbb{1}_{S_T>K_2}$ et un call classique (vanille) a pour payoff $C_T=(S_T-K)\mathbb{1}_{S_T>K}$. Donc le call Gap est une option d'achat classique si le stike et le trigger sont égaux, i.e. $K_1=K_2$.

2) Un actif conditionnel est défini comme un actif de payoff aléatoire, connu à T, et positif. Le call Gap est donc un actif conditionnel dès lors que son payoff $G_T=(S_T-K_1)\mathbb{1}_{S_T>K_2}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire si $K_2\geq K_1$.

3) On suppose désormais que $K_2\geq K_1$. On remarque que

$$(S_T-K_2)\mathbb{1}_{S_T>K_2} \leq (S_T-K_1)\mathbb{1}_{S_T>K_2} \leq (S_T-K_1)\mathbb{1}_{S_T>K_1}$$

A l'échéance, le détenteur du call vanille de prix d'exercice K_1 reçoit plus que le détenteur du call Gap, qui reçoit plus que celui qui détient un call vanille de prix d'exercice K_2. Il y aurait moyen de s'enrichir sans investissement si à l'instant initial un actif qui rapporte plus à l'échéance était vendu moins cher qu'un actif qui rapporte moins : en l'absence d'opportunité d'arbitrage, $C_0(K_2)\leq G_0\leq C_0(K_1)$.

4) Ici, S est modélisée par un modèle binomial tel que $u=1,1$ et $d=0,9$ avec pour période le trimestre, et l'échéance est $T=3$ trimestres. Le cours final est $S_3=S_0u^Jd^{(3-J)}=50(1,1)^J(0,9)^{(3-J)}$ en notant J le nombre aléatoire de fois où le cours monte. La probabilité (risque-neutre) que le détenteur de l'option Gap reçoivent un payoff strictement positif est

$$P^*(G_3>0)=P^*\left((S_3-50)\mathbb{1}_{S_3>55}>0\right)=P^*\left(S_3>55\right)$$

Pour J allant de 0 à 3, les valeurs possibles de S_3 sont 36,45€, 44,55€, 54,45€ et 66,55€. Le payoff n'est donc strictement positif que dans le cas où S_3 a pris la valeur $50(1,1)^3=66,55$. A chaque période, la probabilité risque-neutre de tirer u est

$$p^*=\frac{1+r-d}{u-d}=\frac{1,01-0,9}{1,1-0,9}=\frac{11}{20}$$

La probabilité d'un payoff strictement positif est donc

$$P^*(G_3>0)=P^*(S_3=50(1,1)^3)=(p^*)^3=16,6375\%$$

et si cela se produit le payoff est de $66,55 - 50 = 16,55$€.

D'après le théorème de pricing, la prime initiale de l'option Gap est

$$G_0 = E^*\left(\frac{G_T}{(1+r)^3}\right) = \frac{1}{(1,01)^3}E^*\left((S_3-50)1\!\!1_{S_3>55}\right) = \frac{1}{(1,01)^3}(66,55-50)\left(\frac{11}{20}\right)^3 \simeq 2,6725€.$$

5) On veut répartir les $2,6725$€ de la prime pour se constituer un portefeuille de couverture. Le nombre d'actions à acheter est

$$\Delta_1 = \frac{G_1(u)-G_1(d)}{S_0u - S_0d}$$

$G_1(d)$ est la prime du call Gap à l'instant 1 dans le cas où l'action vaut alors $50\times 0,9 = 45$€. Mais dans ce cas on est certain que le call Gap aura un payoff nul et donc sa prime est nulle : $G_1(d) = 0$. $G_1(u)$ est la prime du call Gap à l'instant 1 dans le cas où l'action vaut alors $50\times 1,1 = 55$€. Dans ce cas, le payoff du call Gap peut valoir $16,55$€, cela se produit avec probabilité $(p^*)^2$, et c'est le seul cas où il est non-nul. Donc $G_1(u) = \frac{1}{(1,01)^2}16,55\left(\frac{11}{20}\right)^2 \simeq 4,9077$€ et

$$\Delta_1 \simeq \frac{4,9077}{55-45} = 0,49077$$

Le portefeuille de couverture contient $0,49077$ actions de cours 50€, ce qui coûte $0,49077\times 50 = 24,5385$€. Il contient aussi une dette envers la banque, de $24,5385 - 2,6725 = 21,8660$€.

6) A partir d'ici, l'action est modélisée par un modèle de Black-Scholes de brownien B et le cours vaut

$$S_t = S_0\ e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

On sait que $G_T = (S_T - K_1)1\!\!1_{S_T>K_2}$ et $C_T(K_2) = (S_T-K_2)1\!\!1_{S_T>K_2}$ donc $G_T = C_T(K_2) + (K_2 - K_1)1\!\!1_{S_T>K_2}$. Le théorème de pricing et la linéarité de l'espérance donnent pour la prime du call Gap

$$G_0 = e^{-rT}E^*(G_T) = e^{-rT}E^*\left(C_T(K_2) + (K_2-K_1)1\!\!1_{S_T>K_2}\right) = C_0(K_2) + (K_2-K_1)e^{-rT}P^*(S_T>K_2)$$

En utilisant la formule de Black-Scholes pour les calls vanilles, on obtient

$$G_0 = S_0\ \Phi(d_1) - K_2\ e^{-rT}\ \Phi(d_1-\sigma\sqrt{T}) + (K_2-K_1)e^{-rT}P^*(S_T>K_2)$$

où

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K_2) + rT + (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Il reste à calculer $P^*(S_T>K_2)$. On utilise $B_t^* = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$ qui est un brownien sous P^*

$$P^*(S_T>K_2) = P^*\left(S_0\ e^{\sigma B_T^* + (r-\frac{\sigma^2}{2})T} > K_2\right) = P^*\left(\sigma B_T^* + (r - \frac{\sigma^2}{2})T > -\ln(S_0/K_2)\right)$$

Par définition du brownien, $Z = B_T^*/\sqrt{T}$ suit la loi gaussienne centrée réduite, de fonction de répartition Φ.

$$P^*(S_T>K_2) = P^*\left(\sigma\sqrt{T}Z > -\ln(S_0/K_2) - rT + (\sigma^2/2)T\right) = P^*\left(Z > -d_1 + \sigma\sqrt{T}\right)$$

Au final $P^*(S_T>K_2) = \Phi(d_1 - \sigma\sqrt{T})$ et donc

$$G_0 = S_0\ \Phi(d_1) - K_2\ e^{-rT}\ \Phi(d_1-\sigma\sqrt{T}) + (K_2-K_1)e^{-rT}\Phi(d_1-\sigma\sqrt{T})$$

La "formule de Black-Scholes pour le call Gap" de strike K_1, de trigger K_2 et d'échéance T donne donc pour prime

$$G_0 = S_0\ \Phi(d_1) - K_1\ e^{-rT}\ \Phi(d_1 - \sigma\sqrt{T}) \quad \text{où} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K_2) + rT + (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

sous la condition que $K_2 \geq K_1$.

7) On sait que le Delta du call vanille est $\frac{\partial C_0(K_2)}{\partial S_0} = \Phi(d_1)$. On doit calculer le Delta du call Gap :

$$\Delta_0^{\text{Gap}} = \frac{\partial G_0}{\partial S_0} = \frac{\partial}{\partial S_0}\big(C_0(K_2) + (K_2 - K_1)e^{-rT} P^*(S_T > K_2)\big)$$

$$\Delta_0^{\text{Gap}} = \Phi(d_1) + (K_2 - K_1)e^{-rT}\frac{\partial}{\partial S_0}(\Phi(d_1 - \sigma\sqrt{T}))$$

La dérivée de Φ est la densité de la gaussienne centrée réduite donc

$$\Delta_0^{\text{Gap}} = \Phi(d_1) + (K_2 - K_1)e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(d_1-\sigma\sqrt{T})^2/2}\frac{\partial}{\partial S_0}(d_1)$$

$$\Delta_0^{\text{Gap}} = \Phi(d_1) + (K_2 - K_1)e^{-rT}\frac{1}{S_0\sigma\sqrt{T}\sqrt{2\pi}}e^{-(d_1-\sigma\sqrt{T})^2/2}$$

8) Dans le cas où $K_2 < K_1$, le call Gap n'est pas un actif conditionnel puisque le flux financier à l'échéance $G_T = (S_T - K_1)\mathbb{1}_{S_T > K_2}$ est positif (le détenteur reçoit la somme $S_T - K_1$) si $S_T \geq K_1$ et négatif (le détenteur paye la somme $K_1 - S_T$) si $K_2 < S_T < K_1$. Mais on peut considérer cet actif non conditionnel comme un portefeuille constitué de deux actifs conditionnels, comme on l'a déja fait à la question 6 : $G_T = C_T(K_2) - (K_1 - K_2)\mathbb{1}_{S_T > K_2}$ donc le call Gap est équivalent à une position longue sur un call vanille de strike K_2 et une position courte sur $K_1 - K_2$ calls binaires de strike K_2 (situation que quelqu'un qui détient un call vanille et doit $K_1 - K_2$ calls binaires). La valeur initiale d'un tel portefeuille est bien sûr celle du call vanille moins $K_1 - K_2$ fois celle du call binaire, i.e. $C_0(K_2)$ diminuée de $(K_2 - K_1)$ fois $e^{-rT}E^*(\mathbb{1}_{S_T > K_2}) = e^{-rT}P^*(S_T > K_2)$ calculé ci-dessus. Le calcul est le même que que celui effectué dans le cas où $K_2 \geq K_1$, et donne bien sûr le même résultat : la "formule de Black-Scholes pour le call Gap" reste valable si $K_2 < K_1$.

Université Lille 1 Sciences et Technologies

U.F.R. de Mathématiques

Master 1 MathFi, 2013-2014 **M.Fradon**

Examen, deuxième session, 30 juin 2014
durée : 3 heures
Calculatrice et un recto-verso A4 manuscrit autorisés

Ex 1. On note $(X_t)_{t\in[0;T]}$ un processus d'Itô qui satisfait l'équation différentielle stochastique

$$X_t = U + \int_0^t \sigma\, dB_s - \int_0^t \alpha X_s\, ds \qquad (1)$$

où σ et α sont des réels fixés, et U est une variable aléatoire de carré intégrable indépendante du brownien B.

1) Vérifier que cette équation a bien une solution unique.

2) En utilisant la formule d'Itô, trouver quelle EDS est satisfaite par le processus $(e^{\alpha t}X_t)_{t\in[0;T]}$. En déduire la solution de l'EDS (1), i.e. donner une expression de X_t fonction uniquement de t, B, U, σ et α.

3) Calculer l'espérance de X_t en fonction de t, σ, α et l'espérance de U (justifier).

4) Calculer la variance de X_t en fonction de t, σ, α et la variance de U (justifier).

5) Pour quel(s) choix de la variable aléatoire U les valeurs de l'espérance et de la variance de X_t sont-elle constantes par rapport au temps t ?

Ex 2. Swap

1) On considère un modèle binomial à deux périodes, chaque période durant un semestre. Il sert à modéliser le cours d'une action S^1 qui vaut initialement $S^1_0 = 100$€. A l'instant 1, le cours passe à $S^1_1 = S^1_0 U^1_1$ et à l'instant 2 (instant final) il vaut $S^1_2 = S^1_0 U^1_1 U^1_2$. Pour $k \in \{1, 2\}$ les U^1_k sont à valeurs dans $\{u_1, d_1\}$ avec $u_1 = 1,3$ et $d_1 = 0,8$. Le cours de S^1 n'est nulle part déterministe : sous la probabilité historique P, la probabilité de chaque tirage dans $\{u_1, d_1\}^2$ est strictement positive. Ce modèle comporte aussi un actif sans risque S^0 dont la valeur est $S^0_k = (1 + r)^k$ à l'instant k avec $r = 0,02$.

Ce modèle admet-il une opportunité d'arbitrage ? A-t-il une ou plusieurs probabilité(s) risque-neutre ? Si oui, laquelle (lesquelles) ?

2) Représenter sur un arbre les évolutions de cours possibles pour l'action S^1. Calculer la prime (à l'instant initial) d'un put sur l'action S^1 de strike $K = 68$€ et d'échéance un an.

3) On modélise aussi le cours d'une autre action S^2 par un modèle binomial à deux périodes, chaque période durant un semestre. Elle vaut initialement $S^2_0 = 70$€, à l'instant 1, son cours passe à $S^2_1 = S^2_0 U^2_1$ et à l'instant 2 à $S^2_2 = S^2_0 U^2_1 U^2_2$. Les U^2_k sont à valeurs dans $\{u_2, d_2\}$ avec $u_2 = 1,1$ et $d_2 = 0,9$ et sous la probabilité historique P, les probabilités de chaque tirage possible dans $\{u_2, d_2\}^2$ sont strictement positives. Le taux d'intérêt est encore $r = 0,02$.

Représenter sur un arbres les cours possibles de S^2 et calculer la prime (à l'instant initial) d'un call sur S^2 de strike $K = 68$€ et d'échéance un an.

4) Un trader veut se constituer un portefeuille V qui contient "la meilleure des deux actions". Pour cela, il envisage d'acheter une action S^1 et un put et un call comme ci-dessus : si S^1 baisse trop, le put et la vente de S^1 lui rapporteront $K = 68$€ qui, grâce au call, lui permettront d'acheter S^2. Cette stratégie garantit-elle d'avoir $V_2 = \max(S_2^1, S_2^2)$ au bout d'un an ?

5) Finalement, le trader se décide pour un portefeuille W constitué d'une action S^1 et d'un swap. Le swap est une option qui donne le droit, et non l'obligation, d'échanger une action S^1 contre une action S^2 à une échéance qui, ici, est d'un an. Le payoff d'un swap est $h = (S_2^2 - S_2^1)_+$ puisque qu'on reçoit S_2^2 en cédant S_2^1 si l'échange est profitable i.e. si $S_2^2 > S_2^1$, et qu'on n'exerce pas le swap sinon.

On utilise un modèle binomial à deux périodes (semestres), dont le taux d'intérêt est toujours $r = 0,02$, mais dont le processus de prix est maintenant (S^0, S^1, S^2) (les deux actions, et l'actif sans risque). Les cours des deux actions varient à chaque période d'un facteur U_1^1 ou U_k^2 tiré au hasard dans $\{u_1, d_1\}$ et $\{u_2, d_2\}$ respectivement. La probabilité historique P donne une probabilité strictement positive à tous les éléments de $\Omega = \{u_1, d_1\}^2 \times \{u_2, d_2\}^2$. La filtration est constituée de $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale, $\mathcal{F}_1 = \sigma(U_1^1, U_1^2)$ et $\mathcal{F}_2 = \sigma(U_1^1, U_1^2, U_2^1, U_2^2) = \mathcal{P}(\Omega)$. Ecrire sous forme de matrice le processus de prix actualisé de ce modèle.

6) Chercher une probabilité risque-neutre pour ce modèle. A quelle condition peut-on en construire ? Cette condition est-elle vérifiée avec les valeurs numériques qu'on a ici ? Y a-t-il plusieurs possibilités de construction, i.e. plusieurs probabilités risque-neutre ?

7) On a établi une formule permettant de calculer la prime initiale du swap sous certaines conditions. Indiquer ces conditions et écrire cette formule. Peut-on calculer la prime du swap ici ? (si oui, calculer, si non, justifier)

Corrigé de la 2eme session

Ex 1. Ornstein-Uhlenbeck

1) On sait que l'EDS (1) admet une solution (trajectoriellement) unique dès lors que la valeur initiale U est de carré intégrable et le drift et le coefficient de diffusion sont lipschitziens et sous-linéaires en espace. C'est le cas ici puisque le drift $x \longmapsto -\alpha x$ est linéaire et le coefficient de diffusion $x \longmapsto \sigma$ est constant.

2) Pour trouver quelle EDS satisfait le processus $(e^{\alpha t} X_t)_{t\in[0;T]}$, on applique la formule d'Itô. La fonction $(x,t) \longmapsto f(x,t) := e^{\alpha t} x$ est $\mathcal{C}^\infty$, donc $\mathcal{C}^2$ en tant que fonction de x et $\mathcal{C}^1$ en tant que fonction de t.

$$f(X_t,t) = f(U,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(X_s,s)\ ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s,s)\ dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s,s)\ \sigma^2\ ds$$

c'est-à-dire

$$e^{\alpha t} X_t = U + \int_0^t \alpha\ e^{\alpha s} X_s\ ds + \int_0^t e^{\alpha s}\sigma\ dB_s - \int_0^t \alpha e^{\alpha s} X_s\ ds + 0$$

et après simplification

$$e^{\alpha t} X_t = U + \int_0^t e^{\alpha s}\sigma\ dB_s$$

On conclut que, P-presque surement, pour tout $t \in [0;T]$

$$X_t = e^{-\alpha t}\left(U + \sigma\int_0^t e^{\alpha s}\ dB_s\right)$$

3) En utilisant la linéarité de l'espérance, puis le fait que $\int_0^\cdot e^{\alpha s}\ dB_s$ est une martingale donc constante en espérance :

$$E(X_t) = e^{-\alpha t}\left(E(U) + \sigma E\left(\int_0^t e^{\alpha s}\ dB_s\right)\right) = e^{-\alpha t}\left(E(U) + \sigma E\left(\int_0^0 e^{\alpha s}\ dB_s\right)\right) = e^{-\alpha t} E(U)$$

4) U est indépendante de B donc de toute fonction de B, en particulier $\int_0^\cdot e^{\alpha s}\ dB_s$ donc

$$\mathrm{Var}(X_t) = e^{-2\alpha t}\,\mathrm{Var}\left(U + \sigma\int_0^t e^{\alpha s}\ dB_s\right) = e^{-2\alpha t}\left(\mathrm{Var}(U) + \sigma^2\,\mathrm{Var}\left(\int_0^t e^{\alpha s}\ dB_s\right)\right)$$

On a constaté à la question précédente la nullité de l'espérance de $\int_0^t e^{\alpha s}\ dB_s$, donc l'égalité entre sa variance et son moment d'ordre deux. On en déduit d'après la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique :

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^t e^{\alpha s}\ dB_s\right) = E\left(\left(\int_0^t e^{\alpha s}\ dB_s\right)^2\right) = E\left(\int_0^t e^{2\alpha s}\ ds\right) = \int_0^t e^{2\alpha s}\ ds = \frac{e^{2\alpha t}-1}{2\alpha}$$

D'où la variance de la solution

$$\mathrm{Var}(X_t) = e^{-2\alpha t}\left(\mathrm{Var}(U) + \sigma^2\ \frac{e^{2\alpha t}-1}{2\alpha}\right) = e^{-2\alpha t}\,\mathrm{Var}(U) + \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1-e^{-2\alpha t}\right)$$

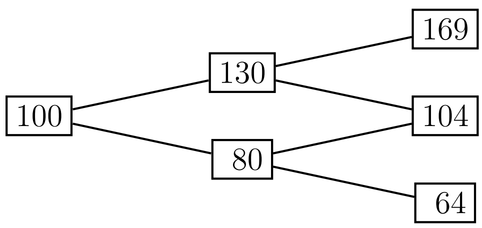
5) Pour que l'espérance de X_t soit constante comme fonction du temps t, la seule possibilité est que $E(U)$ soit nulle. Pour que la variance de X_t le soit aussi, il faut et il suffit que $e^{-2\alpha t}\,\mathrm{Var}(U) - \frac{\sigma^2}{2\alpha}e^{-2\alpha t}$ ne varie pas en temps, i.e. que $\mathrm{Var}(U) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}$. Les deux premiers moments sont donc constants dans le temps si la valeur initiale U est centrée de variance $\frac{\sigma^2}{2\alpha}$, ce qui n'est évidemment possible que si α est positif. Ce dernier point est assez intuitif, la solution de (1) ne pouvant avoir un comportement stable que si la force de rappel vers l'équilibre est positive.

Ex 2. Prime d'un Swap

1) On travaille sur un modèle binomial à deux périodes (semestres) de taux d'intérêt $r = 0,02$. A chaque période le cours de S^1 est multiplié par $u_1 = 1,3$ ou $d_1 = 0,8$. Comme $0,8 < 1 + r = 1,02 < 1,3$ on sait que ce modèle est sans opportunité d'arbitrage et que sa probabilité risque-neutre P^* est unique. Sous P^*, U_1^1 et U_2^1 sont indépendantes et de même loi donnée par

$$P^*(U_1^1 = u_1) = \frac{1+r-d_1}{u_1-d_1} = \frac{1,02-0,8}{1,3-0,8} = 0,44 \quad \text{et} \quad P^*(U_1^1 = d_1) = 0,56$$

2) Les possibilités sont :



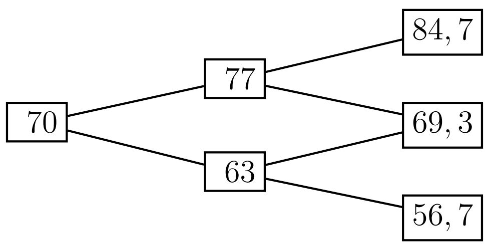
La prime initiale du put de strike $K = 68$€ et d'échéance un an sur S^1 est obtenue grâce au théorème de pricing.

$$P_0 = E^*\left(\frac{(68-S_2^1)_+}{(1+r)^2}\right) = \frac{1}{1,02^2}(68-64)(0,56)^2 \simeq 1,2057$$

3) Cette situatuion est analogue à la précédente. Les possibilités de fluctuation sont maintenant $u_2 = 1,1$ et $d_2 = 0,9$ donc la probabilité risque-neutre est P_2^* sous laquelle U_1^2 et U_2^2 sont i.i.d. de loi

$$\frac{1+r-d_2}{u_2-d_2}\ \delta_{u_2} + \frac{u_2-1-r}{u_2-d_2}\ \delta_{d_2} = 0,6\ \delta_{1,1} + 0,4\ \delta_{0,9}$$

et l'arbre des cours possibles est



La prime initiale du call de strike $K = 68$€ sur S^2 est donc

$$C_0 = E^*\left(\frac{(S_2^2-68)_+}{(1+r)^2}\right) = \frac{1}{1,02^2}\left((84,7-68)\times(0,6)^2 + (69,3-68)\times 2\times 0,6\times 0,4\right) \simeq 6,3783$$

4) Tel qu'il est envisagé le portefeuille est $V = S^1 + C + P$ et sa valeur finale est donc $V_2 = S_2^1 + C_2 + P_2 = S_2^1 + (S_2^2 - 68)_+ + (68 - S_2^1)_+$. Dans le cas où S_2^2 est supérieur à 68 et S_2^1 est inférieur à 68, la technique envisagée fonctionne : le put et la vente de S^1 lui rapportent $K = 68$€ qui permettront d'acheter S^2 grâce au call. Dans le cas où S_2^2 est inférieur à 68 et S_2^1 est supérieur à 68, ni le put ni le call ne sont exercés et la valeur finale du portefeuille est celle de S^1. Dans ces deux cas $V_2 = \max(S_2^1, S_2^2)$. Mais si S_2^2 et S_2^1 sont tous les deux supérieurs à 68€, seul le call est exercé, et la valeur finale est $V_2 = S_2^1 + (S_2^2 - 68)_+ > \max(S_2^1, S_2^2)$. Et si S_2^2 et S_2^1 sont tous les deux inférieurs à 68€, seul le put est exercé, et la valeur finale est $V_2 = S_2^1 + (68 - S_2^1)_+ = 68 > \max(S_2^1, S_2^2)$.

5) Ce nouveau modèle comporte deux actions S^1 et S^2 dont les cours varient à chaque période d'un facteur U_k^1 ou U_k^2 tiré au hasard dans $\{u_1, d_1\}$ et $\{u_2, d_2\}$ respectivement. Le processus de prix actualisé est donc

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ S_0^1 & S_0^1U_1^1/(1+r) & S_0^1U_1^1U_2^1/(1+r)^2 \\ S_0^2 & S_0^2U_1^2/(1+r) & S_0^2U_1^2U_2^2/(1+r)^2 \end{bmatrix}$$

6) P^* est une probabilité risque-neutre si elle charge tous les éléments de $\Omega = \{u_1, d_1\}^2 \times \{u_2, d_2\}^2$ (équivalence avec la probabilité historique P) et si elle fait de $\tilde{S}$ une martingale. La filtration est constituée de $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale, $\mathcal{F}_1 = \sigma(U_1^1, U_1^2)$ et $\mathcal{F}_2 = \sigma(U_1^1, U_1^2, U_2^1, U_2^2) = \mathcal{P}(\Omega)$. Donc $\tilde{S}$ est martingale sous P^* si

$$E^*\left(\frac{S_0^1U_1^1}{1+r}\right) = S_0^1 \quad E^*\left(\frac{S_0^2U_1^2}{1+r}\right) = S_0^2$$

$$E^*\left(\frac{S_0^1U_1^1U_2^1}{(1+r)^2}\Big|U_1^1, U_1^2\right) = \frac{S_0^1U_1^1}{1+r} \quad E^*\left(\frac{S_0^2U_1^2U_2^2}{(1+r)^2}\Big|U_1^1, U_1^2\right) = \frac{S_0^2U_1^2}{1+r}$$

i.e. si on a

$$E^*(U_1^1) = 1+r \quad E^*(U_1^2) = 1+r \quad E^*\left(U_2^1|U_1^1, U_1^2\right) = 1+r \quad E^*\left(U_2^2|U_1^1, U_1^2\right) = 1+r$$

Comme $U_1^1 = d_1 + (u_1 - d_1)\mathbb{1}_{U_1^1=u_1}$ la première égalité est équivalente à

$$d_1 + (u_1 - d_1)P^*(U_1^1 = u_1) = 1+r \qquad \text{i.e.} \qquad P^*(U_1^1 = u_1) = \frac{1+r-d_1}{u_1-d_1} = 0,44$$

et de même $P^*(U_1^2 = u_2) = \dfrac{1+r-d_2}{u_2-d_2} = 0,6$.

L'égalité $E^*\left(U_2^1|U_1^1, U_1^2\right) = 1+r$ implique que pour tous boréliens I et J

$$E^*\left(U_2^1\ \mathbb{1}_{U_1^1\in I}\ \mathbb{1}_{U_1^2\in J}\right) = E^*\left((1+r)\ \mathbb{1}_{U_1^1\in I}\ \mathbb{1}_{U_1^2\in J}\right) = (1+r)\ P^*\left(U_1^1 \in I,\ U_1^2 \in J\right)$$

i.e.

$$d_1P^*\left(U_1^1 \in I,\ U_1^2 \in J\right) + (u_1-d_1)P^*(U_2^1 = u_1,\ U_1^1 \in I,\ U_1^2 \in J) = (1+r)\ P^*\left(U_1^1 \in I,\ U_1^2 \in J\right)$$

donc

$$P^*(U_2^1 = u_1,\ U_1^1 \in I,\ U_1^2 \in J) = \frac{1+r-d_1}{u_1-d_1}\ P^*\left(U_1^1 \in I,\ U_1^2 \in J\right)$$

ce qui dit à la fois que $P^*(U_2^1 = u_1) = \frac{1+r-d_1}{u_1-d_1} = 0,44$ et que U_2^1 est indépendant de U_1^1 et U_1^2 sous P^*.

Le même raisonnement à partir de $E^*\left(U_2^2 | U_1^1, U_1^2\right) = 1+r$ donne que $P^*(U_2^2 = u_2) = \frac{1+r-d_2}{u_2-d_2} = 0,6$ et que U_2^2 aussi est indépendant de U_1^1 et U_1^2 sous P^*.

Tout probabilité P^* est donc risque-neutre dès lors qu'elle donne une probabilité positive à tous les éléments de $\{u_1, d_1\}^2 \times \{u_2, d_2\}^2$ et que sous P^* les U_k^1 $(k \in \{1; 2\})$ sont indépendantes de loi $P^*(U_k^1 = u_1) = \frac{1+r-d_1}{u_1-d_1} = 1 - P^*(U_k^1 = d_1)$ et les U_k^2 $(k \in \{1; 2\})$ sont indépendantes de loi $P^*(U_k^2 = u_2) = \frac{1+r-d_2}{u_2-d_2} = 1 - P^*(U_k^2 = d_2)$.

Pour définir complétement une probabilité sur $\{u_1, d_1\}^2 \times \{u_2, d_2\}^2$, il faut spécifier toutes les probabilités d'événements élémentaires $P^*(U_1^1 = \alpha,\ U_1^2 = \beta,\ U_2^1 = \gamma,\ U_2^2 = \delta)$. Ici, l'indépendance permet de se limiter aux $P^*(U_1^1 = \alpha,\ U_1^2 = \beta)$ et $P^*(U_2^1 = \gamma,\ U_2^2 = \delta)$ et d'en déduire les probabilités d'événements élémentaires par multiplication. Cherchons

$$x = P^*(U_1^1 = u_1,\ U_1^2 = u_2) \qquad y = P^*(U_1^1 = u_1,\ U_1^2 = d_2) \qquad z = P^*(U_1^1 = d_1,\ U_1^2 = d_2)$$

On a évidemment $P^*(U_1^1 = d_1,\ U_1^2 = u_2) = 1 - x - y - z$. Pour que P^* soit risque-neutre on a établi les conditions suivantes concernant l'instant 1 :

$$x + y = p_1^* = 0,44 \qquad y + z = 1 - p_2^* = 0,4$$

$$x + (1 - x - y - z) = 1 - y - z = p_2^* = 0,6 \qquad z + (1 - x - y - z) = 1 - x - y = 1 - p_1^* = 0,56$$

Les deux dernières sont visiblement conséquences des deux premières. On constate que pour n'importe quel choix de $y = P^*(U_1^1 = u_1,\ U_1^2 = d_2)$ dans $]0; 0,4[$ on peut trouver x et z satisfaisant les équations ci-dessus. Et de même pour n'importe quel choix de $P^*(U_2^2 = u_1,\ U_2^2 = d_2)$ dans $]0; 0,4[$ on peut trouver $P^*(U_2^1 = u_1,\ U_2^2 = u_2)$, $P^*(U_2^1 = d_1,\ U_2^2 = d_2)$ et $P^*(U_2^1 = d_1,\ U_2^2 = u_2)$ qui complètent la construction de P^* de façon à ce qu'elle soit risque-neutre.

Ce modèle admet donc plusieurs probabilités risque-neutre.

Il est clair que la construction ci-dessus est possible dès lors que

$$d_1 < 1 + r < u_1 \quad \text{et} \quad d_2 < 1 + r < u_2$$

Dans le cas contraire, elle serait impossible : certaines probabilités seraient négatives !

7) Le théorème de pricing assure que, si le swap est réplicable, pour toute probabilité risque-neutre sa prime à l'instant initial est donnée par la formule

$$V_0^{\text{Swap}} = E^*\left(\frac{(S_2^2 - S_2^1)_+}{(1+r)^2}\right) = E^*\left(\frac{(S_0^2 U_1^2 U_2^2 - S_0^1 U_1^1 U_2^1)_+}{(1+r)^2}\right)$$

Le swap est exercé si S_2^1 prend la valeur 64€ et S_2^2 la valeur 69,3€ ou 84,7€. Si le swap est réplicable, sa prime à l'instant initial est donc

$$V_0^{\text{Swap}} = E^*\left(\frac{(S_2^2 - S_2^1)_+}{(1+r)^2}\right)$$

$$V_0^{\text{Swap}} = \frac{1}{(1,02)^2}\left((84,7 - 64)P^*(S_2^1 = 64,\ S_2^2 = 84,7) + (69,3 - 64)P^*(S_2^1 = 64,\ S_2^2 = 69,3)\right)$$

Or d'après la question précédente, il y a plusieurs valeurs possibles pour

$$P^*(S_2^1 = 64,\ S_2^2 = 84,7) = P^*(U_1^1 = d_1,\ U_1^2 = u_2)P^*(U_2^1 = d_1,\ U_2^2 = u_2)$$

et pour $P^*(S_2^1 = 64,\ S_2^2 = 69,3)$ qui est égal à

$$P^*(U_1^1 = d_1,\ U_1^2 = u_2)P^*(U_2^1 = d_1,\ U_2^2 = d_2) + P^*(U_1^1 = d_1,\ U_1^2 = d_2)P^*(U_2^1 = d_1,\ U_2^2 = u_2)$$

Si le swap était réplicable, on obtiendrait plusieurs valeurs pour son prix, alors que l'existence de probabilités risque-neutre ici prouve l'absence d'opportunité d'arbitrage et donc l'unicité des prix. Le swap n'est donc pas réplicable, on ne peut pas calculer sa valeur par le théorème de pricing (on peut vérifier directement que si on tente de construire un portefeuille répliquant le swap, on a plus d'équations que d'inconnues, et elles sont incompatibles entre elles).