Université Lille 1
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

GIS 5 MathFi, 2011-2012 **M.Fradon**

Mathématiques Financières

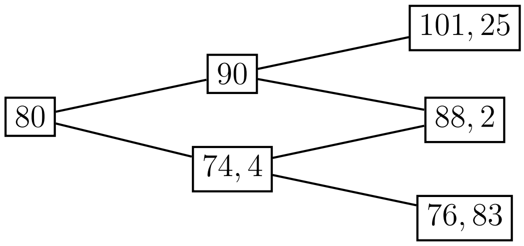
Documents et calculatrices autorisés

Ex 1. 1) Si le taux d'intérèt par mois est 0.5%, à quel taux d'intérèt annuel cela correspond-il ?

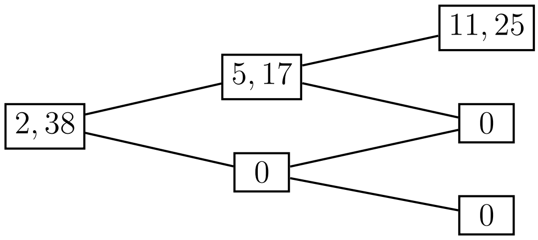
2) Et si une action a une volatilité mensuelle de 0.11, quelle est sa volatilité annuelle ?

Ex 2. L'action Lafarge a un cours actuel de $27,94$€. En utilisant la formule de Black-Scholes, calculer la prime de l'option d'achat européenne de prix d'exercice 30€ sur cette action. L'échéance de l'option est en septembre 2012 (on prendra pour simplifier une durée jusqu'à échéance exactement égale à 9 mois). La volatilité annuelle de Lafarge est de $0,39$. Le taux d'intérèt à utiliser (l'EURIBOR 9 mois) vaut $1,9\%$. Attention, son nom ne l'indique pas, mais il s'agit bien d'un taux d'intérèt *annuel.*

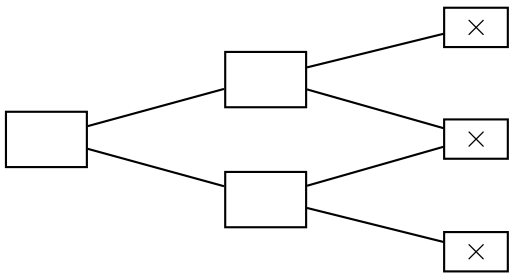
Ex 3. Une action vaut 80€ à l'instant 0 et son prix évolue pendant deux périodes selon le modèle binomial suivant :



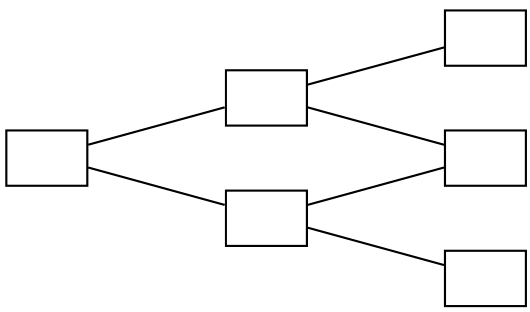
On veut couvrir une option d'échéance deux périodes sur cette action. Il s'agit d'une option d'achat de prix d'exercice 90€, et on a calculé sa prime aux différents instants en fonction du cours de l'action. On a obtenu :



1) Indiquer sur le graphe suivant le nombre d'actions à avoir en portefeuille aux instants 0 et 1 pour couvrir cette option d'achat (il n'est pas nécessaire de recomposer le protefeuille à l'instant final).



2) Ce modèle binomial est sans opportunité d'arbitrage. En utilisant la relation de parité, remplir le graphe suivant avec les valeurs de la prime de l'option de *vente* de même échéance (deux périodes) et même strike (90€). Le taux d'intérèt par période est de 5%.

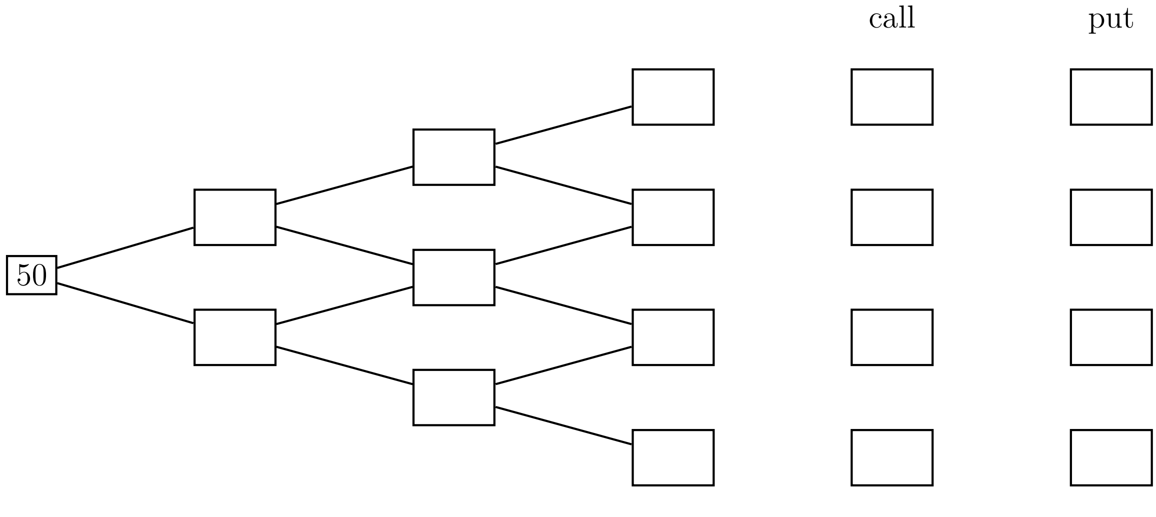


Ex 4. On veut pricer et couvrir des options d'échéance trois semaines sur une action donc le cours actuel est de 50€. Pour cela, on utilise un modèle binomial dont la période est la semaine. On considèrera pour simplifier qu'une année dure 52 semaines. Le taux d'intérèt par semaine est $r = 0,0006$. Les rendements hebdomadaires possibles pour l'action sous-jacente sont $b = 0,002$ et $a = -0,0008$.

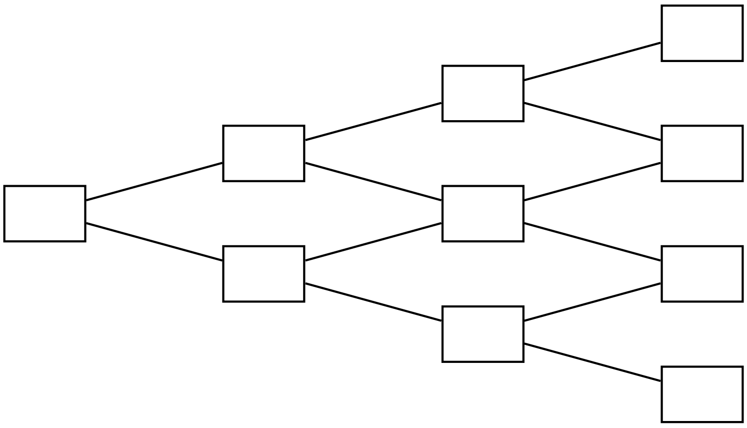
1) A quoi voit-on que ce modèle a une probabilité risque-neutre ? La calculer.

2) Ce modèle satisfait-il la condition de Cox, Ross et Rubinstein ?

3) Représenter sur cet arbre toutes les valeurs possibles du cours de l'action d'après ce modèle, de la valeur initiale 50€ jusqu'aux différentes valeurs finales. Puis rajouter dans dans les deux dernières colonnes les sommes encaissées à échéance par le détenteur d'une option d'achat de prix d'exercice 50€ sur cette action, et celles encaissées par le détenteur d'une option de vente de même prix d'exercice.



4) Calculer la prime de l'option de vente aux instants 0, 1 et 2 en fonction du cours de l'action. En pratique, on remplira l'arbre suivant en remplaçant le cours de l'action par la valeur correspondante pour le put. Il est conseillé de procéder "en remontant le temps", c'est-à-dire de placer d'abord les valeur finales déjà calculés, d'en déduire les primes du put à l'instant 2, puis celles à l'instant 1, jusqu'à la prime à l'instant initial. Justifier les valeurs trouvées par un petit calcul.



Université Lille 1
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

GIS 5 MathFi, 2011-2012 **M.Fradon**

Mathématiques Financières
Corrigé de l'examen de décembre 2010

Ex 1. 1) Puisqu'une année comporte 12 mois, un taux d'intérèt mensuel de $r = 0,005$ correspond à un taux annuel $r_a = (1+r)^12 - 1 \simeq 6,17\%$.

2) La volatilité annuelle correspondant à 12% de volatilité mensuelle est $\sigma_a = \sqrt{12} \times 0.11 \simeq 38,1\%$.

Ex 2. Il suffit d'appliquer la formule de Black-Scholes. La prime de ce call est :

$$C_0 = S_0\ \Phi(d_1) - K\ e^{-rT}\ \Phi(d_1 - \sigma\sqrt{T}) \quad \text{où} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + rT + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

avec $T = 0,75$ (9 mois), $\sigma = 0,39$, $S_0 = 28$, $K = 30$ et $r = 0,019$. On trouve $d_1 \simeq 0,0004425528$ donc la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0;1)$ prend les valeurs $\Phi(d_1) \simeq 0,5$ et $\Phi(d_1 - \sigma\sqrt{T}) \simeq \Phi(-0,34) \simeq 0,3669$ et on obtient $C_0 = 3,12$€.

Ex 3. 1) Le cours de l'action est : et la prime de l'option d'achat vaut :

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & & \boxed{101,25} \\
 & \boxed{90} \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\boxed{80} \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & \boxed{88,2} \\
 & \boxed{74,4} \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\
 & & \boxed{76,83}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & & \boxed{11,25} \\
 & \boxed{5,17} \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\boxed{2,38} \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & \boxed{0} \\
 & \boxed{0} \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\
 & & \boxed{0}
\end{tikzcd}$$

On sait que la quantité d'action à avoir en portefeuille de l'instant $n-1$ à l'instant n pour couvrir le call est égale à

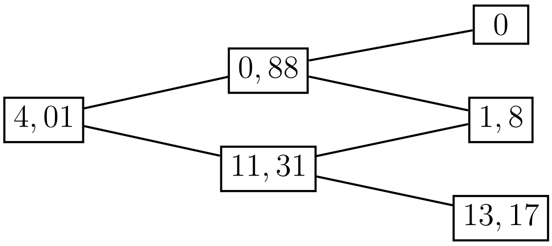
$$\Delta(n; S^1_{n-1}) = \frac{C_n(S^1_{n-1}(1+b)) - C_n(S^1_{n-1}(1+a))}{S^1_{n-1}(1+b) - S^1_{n-1}(1+a)}$$

où S^1_{n-1} est le cours le l'action à l'instant $n-1$ et $C_n(x)$ désigne la valeur du call à l'instant n si le cours de l'action vaut alors x. Pour chaque valeur $\Delta(n, S^1_{n-1})$, on lit donc $S^1_{n-1}(1+b)$ et $S^1_{n-1}(1+a)$ dans le graphe ci-dessus à gauche, et $C_n(S^1_{n-1}(1+b))$ et $C_n(S^1_{n-1}(1+a))$ dans le graphe de droite. On trouve :
$\Delta(1;80) = \frac{5,17-0}{90-74,4} \simeq 0,33$ $\Delta(2;90) = \frac{11,25-0}{101,25-88,2} \simeq 0,86$ $\Delta(2;74,4) = \frac{0-0}{88,2-16,83} = 0$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & & \boxed{\times} \\
 & \boxed{0,86} \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\boxed{0,33} \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & \boxed{\times} \\
 & \boxed{0} \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\
 & & \boxed{\times}
\end{tikzcd}$$

2) D'après la relation de parité, la prime $C_n(S^1_n)$ du call et la prime $P_n(S^1_n)$ du put sont liées à l'instant n au cours S^1_n de l'action par la relation $S^1_n + P_n(S^1_n) =$

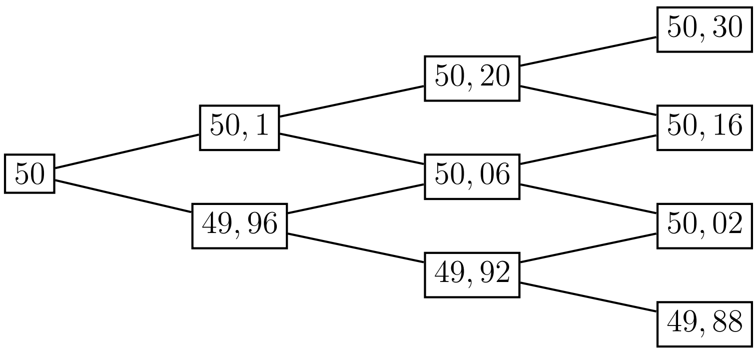
$C_n(S_n^1) + K(1+r)^n/(1+r)^N$. Ici, $r = 0,05$, $K = 90$ et l'échéance est $N = 2$ ce qui donne
$P_0(80) = C_0(80) + 90/1,05^2 - 80 = 2,38 + 90/1,05^2 - 80 \simeq 4,01$
$P_1(90) = C_1(90) + 90/1,05^1 - 90 = 5,17 + 90/1,05^2 - 90 \simeq 0,88$
$P_1(74,4) = C_1(74,4) + 90/1,05^1 - 74,4 = 0 + 90/1,05^2 - 74,4 \simeq 0,88$
La valeur du put à l'instant final peut être déduite aussi par la relation de parité, mais il est plus simple de la calculer directement à partir du cours final de l'action :



Ex 4. 1) La condition $a < r < b$ est satisfaite puisque $-0,0008 < 0,0006 < 0,002$. Par conséquent de modèle binomial admet une probabilité risque-neutre, sous laquelle les rendements sucessifs sont indépendants et prennent la valeur b avec probabilité $p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{1}{2}$ et la valeur a avec prbabilité $1 - p^* = \frac{1}{2}$.

2) La condition de Cox, Ross et Rubinstein est $(1+a)(1+b) = (1+r)^2$. Ici $0,9992 \times 1,002/1.0006^2 \simeq 0,999998$. Il n'est pas abusif de considérer que ce rapport vaut pratiquement 1, autrement dit que la condition est satisfaite aux inévitables arrondis prêt.

3) Les valeurs successives du cours de l'action sont données par $S_n^1 = S_0^1 \prod_{k=1}^n (1+U_k)$ où les U_k sont à valeurs dans $\{a; b\}$ et où n varie de 1 à $N = 3$:



call	put
0,30	0
0,16	0
0,02	0
0	0,12

4) Le théorème de pricing donne pour chaque instant n le prix P_n du put :

$$P_n = \frac{(1+r)^n}{(1+r)^3} E_{P^*}((S_3^1 - 50)_+ | \mathcal{F}_n)$$

Les valeurs de P_3, qui dépend du cours final S_3^1, figurent à la question précédente. Les valeurs de P_2, qui dépend du cours final S_2^1 à l'instant 2, s'en déduisent en utilisant cette formule : $P_2(S_2^1) = \frac{1}{1,0006} E_{P^*}((S_2^1(1+U_3) - 50)_+) = \frac{1}{1,0006} E_{P^*}(P_3)$

$$P_2(S_2^1) = \frac{(S_2^1(1+b) - 50)_+ p^* + (S_2^1(1+a) - 50)_+ (1-p^*)}{1,0006}$$

et comme $p^* = 1 - p^* = \frac{1}{2}$ on obtient $P_2(49,92) = \frac{1}{1{,}0006}(0 \times p^* + 0,12(1-p^*)) = 0,06$ puis $P_2(50,20) = 0$ et $P_2(50,32) = 0$.
On peut recommencer pour obtenir les valeurs de P_1, mais le calcul va plus vite si on se souvient que $\tilde{P}_n = P_n/(1+r)^n$ est une martingale : $P_n = \frac{1}{1+r} E_{P^*}(P_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ donne pour $n = 1$ l'expression $P_1 = \frac{1}{1+r} E_{P^*}(P_2|\mathcal{F}_1)$:

$$P_1(49,96) = \frac{1}{1+r} E_{P^*}(P_2|S_0^1 = 50\ ,\ S_1^1 = 49,96) = \frac{0 \times p^* + 0,06 \times (1-p^*)}{1,0006} \simeq 0,03$$

et $P_1(50,1) = 0$. On obtient par la même technique :

$$P_0(50) = \frac{1}{1+r} E_{P^*}(P_1) = \frac{0 \times p^* + 0,03 \times (1-p^*)}{1,0006} \simeq 0,015$$