Familles libres, génératrices, bases

Définition 1 *Si $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel V sur un corps K, on appelle* combinaison linéaire *de ces vecteurs (ou* combili *en abrégé) tout vecteur $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres de K (ces nombres sont appelés les* coefficients *de la combili).*

Par convention, on dira que la famille vide $\emptyset$ a pour (seule) combili le vecteur $\vec{0}$.

Par exemple le vecteur $(1,2,4)$ est combili de $(1,1,1)$ et $(0,\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ car $(1,2,4) = 1(1,1,1)+2(0,\frac{1}{2},\frac{3}{2})$. Par contre $(1,2,4)$ n'est pas combili de $(1,1,1)$ et $(1,2,3)$. En effet si on avait $(1,2,4) = \lambda(1,1,1) + \mu(1,2,3)$, ceci entraînerait $\lambda + \mu = 1, \lambda + 2\mu = 2, \lambda + 3\mu = 4$; les deux premières équations entraînent $\mu = 1$ et $\lambda = 0$, mais alors la troisième équation n'est pas satisfaite.

Remarquons qu'un vecteur peut fort bien s'écrire comme combili d'une famille de différentes façons. Ainsi par exemple $(1,2) = 1(1,1)+1(0,1)+0(1,0) = 3(1,1) + (-1)(0,1) + (-2)(1,0)$.

Noter que $\vec{0}$ est combili de n'importe quelle famille de vecteurs $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ car on a toujours $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + \cdots + 0\vec{v}_n$.

Définition 2 *Une famille $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ d'un espace vectoriel V sur un corps K est dite* libre*, et ses vecteurs sont dits* linéairement indépendants*, lorsque*

$$\forall\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K, \quad \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite liée*.*

Autrement dit, une famille est libre lorsque la seule combili de ses vecteurs qui donne le vecteur $\vec{0}$ est celle dont tous les coefficients sont nuls. Inversément, une famille est liée lorsqu'il existe une combili de ses vecteurs qui donne $\vec{0}$ et dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

Par exemple $\{(1,1,1),(0,\frac{1}{2},\frac{3}{2})\}$ est une famille libre car si $\lambda(1,1,1)+\mu(0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}) = (0,0,0)$, ceci entraîne que $\lambda = 0, \lambda+\frac{1}{2}\mu = 0, \lambda+\frac{3}{2}\mu = 0$; les deux premières équations suffisent pour imposer que $\lambda = \mu = 0$. Par contre $\{(1,1,1),(0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}),(1,2,4)\}$ est liée car $1(1,1,1) + 2(0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}) + (-1)(1,2,4) = (0,0,0)$ avec des coefficients qui ne sont pas tous nuls (ils sont même tous non nuls).

Noter qu'une famille qui contient $\vec{0}$ est toujours liée.

Définition 3 *Une famille $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ d'un espace vectoriel V sur un corps K est dite* génératrice *lorsque tout vecteur $\vec{v} \in V$ est combili de ses vecteurs.*

Par exemple la famille $\{(1,1,1),(1,2,3)\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ car on a vu plus haut que $(1,2,4)$ (entre autres) n'est pas combili de ces vecteurs. Par contre $\{(1,1,1),(1,2,3),(1,2,4)\}$ est génératrice car étant donné un vecteur quelconque $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on peut trouver des coefficient λ, μ, ν tels que $(a, b, c) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 2, 3) + \nu(1, 2, 4)$. En effet pour obtenir ceci il faut et il suffit que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda + \mu + \nu & = & a \\ \lambda + 2\mu + 2\nu & = & b \\ \lambda + 3\mu + 4\nu & = & c \end{array} \right.$$

En résolvant ces équations on trouve :

$$\lambda = 2a - b \qquad \mu = -2a + 3b - c \qquad \nu = a - 2b + c$$

Ainsi par exemple le vecteur $(0, 1, 2)$ est combili de $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 2, 4)$ avec les coefficients $\lambda = -1, \mu = 1, \nu = 0$.

Définition 4 *Une famille $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ d'un espace vectoriel V sur un corps K est dite* base *de V lorsqu'elle est libre et génératrice.*

Par exemple la famille $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 2, 4)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet nous avons déjà vu que c'était une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$; de plus le calcul que nous avons fait des coefficients λ, μ, ν qui permettent d'obtenir (a, b, c) comme combili de ces vecteurs montre en particulier que pour obtenir $(0, 0, 0)$, il faut que les coefficients soient nuls ; par conséquent cette famille est aussi libre.

Remarquons que d'après nos conventions, la famille vide $\emptyset$ est une base de l'espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ qui ne contient qu'un élément.

Proposition 5 *Si $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ est une base d'un espace vectoriel V, tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit de façon unique comme combili des vecteurs de la base.*

Preuve. Tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit comme combili de $\mathcal{B}$ puisque c'est une partie génératrice.

Supposons que $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \mu_1\vec{v}_1 + \cdots + \mu_n\vec{v}_n$. Ceci entraîne que $(\lambda_1 - \mu_1)\vec{v}_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\vec{v}_n = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$. Et comme $\mathcal{B}$ est libre, ceci entraîne que $\lambda_1 - \mu_1 = \cdots = \lambda_n - \mu_n = 0$, c'est-à-dire que $\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_n = \mu_n$. Ainsi la combili des vecteurs de $\mathcal{B}$ qui donne $\vec{v}$ est bien unique. □

Définition 6 *Si $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ est une base d'un espace vectoriel V, et $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$ est un vecteur de V, les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de la combili (unique) des vecteurs de $\mathcal{B}$ qui donne le vecteur $\vec{v}$ sont appelés les* coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.

On écrit les coordonnées dans un tableau vertical qu'on notera

$$_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ainsi par exemple les coordonnées du vecteur $\vec{v} = (0, 1, 2)$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 2, 4)\}$ sont

$$_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ a aussi une base $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, appelée *base canonique*. Les coordonnées d'un vecteur <u>dans la base canonique</u> ne sont rien d'autre que ses composantes. Ainsi pour le même $\vec{v} = (0,1,2)$, on a

$$_{\mathcal{C}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lemme 7 *Si on ajoute un vecteur à une famille génératrice, elle reste génératrice. Si on retire à une famille génératrice un vecture qui est combili des <u>autres</u> vecteurs de cette famille, elle reste génératrice.*

Lemme 8 *Une famille est liée si et seulement si elle contient un vecteur qui est combili des <u>autres</u> vecteurs de cette famille.*

Proposition 9 *Si $\mathcal{G} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ est une famille génératrice, alors il existe une sous-famille de $\mathcal{G}$ qui est une base.*

Preuve. Si $\mathcal{G}$ n'est pas libre, elle contient par le lemme 8 un vecteur qui est combili des autres ; disons que c'est $\vec{u}_m$. Donc par le lemme 7, on peut le retirer de $\mathcal{G}$ et la famille $\mathcal{G}' = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{m-1}\}$ est encore génératrice. On réitère le raisonnement avec $\mathcal{G}'$, et ainsi de suite tant qu'on n'obtient pas une famille libre. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'éléments dans $\mathcal{G}$, le processus doit s'arrêter tôt ou tard.. $\square$

Lemme 10 *Si on retire un vecteur d'une famille libre, elle reste libre. Si on ajoute à une famille libre un vecteur ni n'est <u>pas</u> combili des vecteurs de cette famille, elle reste libre.*

Théorème 11 *Soit V un espace vectoriel. S'il y a une base $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ de V qui compte n éléments, alors*

- *toute famille libre de V compte au plus n éléments ;*
- *toute famille génératrice de V compte au moins n éléments ;*
- *et toute base de V compte exactement n éléments.*

Ce nombre n est appelé dimension *de V, et se note* $\dim V$.

En particulier la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur le corps $\mathbb{R}$ est n car il possède une base à n éléments, dite *canonique* :

$$\{(1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,0,1)\}$$

Notons que la dimension dépend non seulement de V mais aussi du corps K. Ainsi l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$ a pour base $\{(1,0),(0,1)\}$ et sa dimension est donc 2 mais l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ a pour base $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ et sa dimension est donc 4.

Preuve. Soient $\mathcal{G} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ une famille génératrice de V et $\mathcal{L} = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_r\}$ une famille libre. Puisque $\mathcal{G}$ est génératrice, $\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_m\vec{u}_m$. L'un des coefficients λ_i est non nul (sinon, $\vec{w}_1 = \vec{0}$ et $\mathcal{L}$ serait liée) ; disons qu'il s'agit de λ_1. Alors

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\lambda_1}\vec{w}_1 + (-\frac{\lambda_2}{\lambda_1})\vec{u}_2 + (-\frac{\lambda_3}{\lambda_1})\vec{u}_3 + \cdots + (-\frac{\lambda_m}{\lambda_1})\vec{u}_m$$

Donc $\vec{u}_1$ est combili de $\{\vec{w}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$. Or $\mathcal{G}$ est génératrice, donc $\{\vec{w}_1, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ aussi, donc par le lemme 7 $\mathcal{G}' = \{\vec{w}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ aussi.

Dès lors $\vec{w}_2 = \mu_1\vec{w}_1 + \lambda'_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda'_m\vec{u}_m$. L'un des coefficients λ'_i est non nul, sinon on aurait $\vec{w}_2 = \mu_1\vec{w}_1$ et $\mathcal{L}$ ne serait pas libre par le lemme 8 ; disons que c'est λ'_2 qui est non nul. Alors

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\lambda'_2}\vec{w}_2 + (-\frac{\mu_1}{\lambda'_2})\vec{w}_1 + (-\frac{\lambda'_3}{\lambda'_2})\vec{u}_3 + (-\frac{\lambda'_4}{\lambda'_2})\vec{u}_4 + \cdots + (-\frac{\lambda'_m}{\lambda'_2})\vec{u}_m$$

Donc $\vec{u}_2$ est combili de $\{\vec{w}_2, \vec{w}_1, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_m\}$. Or $\mathcal{G}'$ est génératrice, donc aussi $\{\vec{w}_2, \vec{w}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_m\}$, donc par le lemme 7 $\mathcal{G}'' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_m\}$ aussi.

On peut continuer de la sorte en remplaçant chaque $\vec{u}_i$ par $\vec{w}_i$ tout en conservant une famille génératrice.

Si on avait $m < r$, on obtiendrait ainsi $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ génératrice, et donc $\vec{w}_r$ serait combili de $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$, ce qui par le lemme 8 contredit la liberté de $\mathcal{L}$; par conséquent on a $r \leq m$.

On a ainsi montré que le nombre d'éléments de n'importe quelle famille libre est inférieur ou égal au nombre d'éléments de n'importe quelle famille génératrice. En particulier le nombre d'éléments de n'importe quelle famille libre est inférieur ou égal à n (qui est le nombre d'éléments d'une base, donc famille génératrice). Et en particulier le nombre d'éléments de n'importe quelle famille génératrice est supérieur ou égal à n (qui est le nombre d'éléments d'une base, donc famille libre). N'importe quelle base qui est à la fois libre et génératrice aura donc n éléments. □

Notons que ce théorème a pour conséquence que toute famille qui n'a pas autant d'éléments que la dimension de l'espace ne peut pas être une base. Par exemple puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, on peut dire d'office que ni $\{(1,1,1),(1,2,3)\}$, ni $\{(1,1,1),(1,2,3),(1,-1,5),(0,8,2)\}$ ne sont des bases de $\mathbb{R}^3$, la première famille n'ayant pas assez d'éléments pour être génératrice, et la seconde famille ayant trop d'éléments pour être libre.

Proposition 12 *Soit V un espace vectoriel de dimension n. Alors*
- *toute famille libre de V qui compte n éléments est une base ;*
- *toute famille génératrice de V qui compte n éléments est une base.*

Preuve. Par hypothèse, V possède une base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ avec n éléments.

Soit une famille libre $\mathcal{L} = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ avec n éléments. Supposons $\mathcal{L}$ non génératrice, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur $\vec{v} \in V$ qui n'est pas combili des vecteurs de $\mathcal{L}$. Dans ce cas, $\mathcal{L}' = \{\vec{v}, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ est aussi libre par le lemme 10. Mais alors on a une famille libre $\mathcal{L}'$ qui a plus d'éléments qu'une famille génératrice $\mathcal{B}$, ce qui contredit le théorème 11.

Soit une famille génératrice $\mathcal{G} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ avec n éléments. Supposons $\mathcal{G}$ non libre, donc par le lemme 8 elle contient un élément qui est combili des autres ; disons que c'est $\vec{u}_n$. Par le lemme 7, la famille $\mathcal{G}' = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}\}$ est encore génératrice. Mais alors on a une famille génératrice $\mathcal{G}'$ qui a moins d'éléments qu'une famille libre $\mathcal{B}$, ce qui contredit le théorème 11. □

Retenons surtout de cette proposition que si on connaît la dimension d'un espace vectoriel V, alors pour vérifier qu'une famille est une base, il suffit de vérifier qu'elle possède autant d'éléments que la dimension, et qu'elle est libre.