

Table des matières

I	Préliminaires	25
1	Rappels généraux sur les catégories	27
1.1	Notations et exemples	27
1.2	Adjonctions	30
1.2.1	Adjonctions et algèbre homologique	31
1.2.2	Adjonctions et (co)monades	32
1.3	Propriétés de régularité des catégories abéliennes	33
1.4	Catégories abéliennes quotients	37
1.4.1	Quotient d'une catégorie abélienne par une sous-catégorie épaisse	37
1.4.2	Diagrammes de recollement	39
1.5	Dualité	40
1.6	Catégories abéliennes tensorielles	42
2	Notions de finitude dans les catégories abéliennes	47
2.1	Objets de type fini, noethériens	48
2.1.1	Généralités	48
2.1.2	Rôle des projectifs de type fini	50
2.1.3	Type-finitude et commutation aux colimites	51
2.2	Objets de présentation finie	52
2.2.1	Objets pf	52
2.2.2	Objets pf_n	54
2.2.3	Utilisation de foncteurs exacts	55
2.3	Catégories localement noethériennes	56
2.4	Notions duales	59
2.5	Sous-catégories de Serre stables par colimites	63
2.6	Objets finis	67
2.7	Objets semi-simples	70
2.8	Notions de finitude et catégories quotients	75
2.8.1	Généralités	75
2.8.2	Filtration de Krull	76
2.8.3	Objets simples et diagrammes de recollement	77
3	Catégories de foncteurs	79
3.1	La catégorie abélienne tensorielle $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$	79
3.1.1	Généralités	79
3.1.2	Générateurs projectifs de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Mod}_A)$	83
3.1.3	Dualité dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$	85
3.2	Foncteurs hom internes et foncteurs de division	86
3.3	Lien entre différentes catégories de foncteurs	89
3.3.1	Recollement de catégories de foncteurs	89
3.3.2	Produit tensoriel extérieur	92

4	La catégorie \mathcal{F} et la conjecture artinienne	97
4.1	La catégorie abélienne tensorielle \mathcal{F}	98
4.2	Foncteurs finis	99
4.2.1	Foncteurs polynomiaux	99
4.2.2	Quelques classes de foncteurs finis	105
4.2.3	Foncteurs simples et représentations des groupes symétriques	108
4.3	La conjecture artinienne : premiers énoncés, motivations	112
5	Les catégories \mathcal{F}_{surj} et \mathcal{F}_{inj}	117
5.1	Préliminaires	118
5.2	Structures tensorielles sur \mathcal{F}_{surj}	119
5.3	Objets finis	121
5.4	Liens avec la catégorie \mathcal{F}	124
5.4.1	Les foncteurs adjoints o et ϖ	124
5.4.2	La catégorie \mathcal{F}_{surj} et la conjecture artinienne	126
5.4.3	Foncteurs de Powell	127
5.5	Liens avec les systèmes de coefficients	128
5.6	Propriétés des foncteurs d'oubli $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$ et $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$	131
5.6.1	Résultats d'annulation cohomologique	131
5.6.2	Le foncteur $\text{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(\mathbb{F}_2, \cdot)$ et l'algèbre \mathbf{A}_{G_r}	132
5.6.3	La catégorie $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$	135
II	Catégories de foncteurs en grassmanniennes	137
6	Définition des catégories $\mathcal{F}_{G_r, I}$, $\tilde{\mathcal{F}}_{G_r, I}$ et $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$	139
6.1	Catégories de comodules sur un foncteur en coalgèbres de Boole	139
6.1.1	La catégorie de comodules $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_k)$	140
6.1.2	Recollements de catégories de comodules	142
6.1.3	Situation duale	144
6.2	Les catégories $\mathcal{E}_{G_r, I}^f$, $\tilde{\mathcal{E}}_{G_r, I}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$	145
6.2.1	Définition des catégories et foncteurs utilisés	146
6.2.2	Propriétés des foncteurs fondamentaux	150
6.2.3	Propriétés de structure des catégories $\mathcal{E}_{G_r}^f$, $\tilde{\mathcal{E}}_{G_r}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$	151
6.3	Les catégories de foncteurs en grassmanniennes	154
6.3.1	La catégorie $\mathcal{F}_{G_r, I}$	155
6.3.2	La catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$	158
6.3.3	La catégorie $\tilde{\mathcal{F}}_{G_r, I}$	159
7	Adjonctions et descriptions alternatives des catégories de foncteurs en grassmanniennes	163
7.1	La conjecture artinienne dans $\mathcal{F}_{G_r, I}$	164
7.2	La catégorie $\mathcal{F}_{G_r, I}$ comme catégorie de modules	164
7.3	L'équivalence de catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n} \simeq \mathbf{Comod}_{I_{E_n}}$	170
8	Propriétés fondamentales des catégories $\mathcal{F}_{G_r, I}$	177
8.1	Objets polynomiaux	178
8.2	Objets finis	183
8.3	Structures tensorielles sur \mathcal{F}_{G_r}	186
8.4	Foncteurs hom internes et foncteurs de division	189
8.4.1	Comparaison entre les différentes catégories $\mathcal{F}_{G_r, I}$	189
8.4.2	Propriétés formelles	191
8.4.3	Le morphisme $h_F^X : \omega(\mathbf{Hom}_{G_r}(\iota(F), X)) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \omega(X))$	194

8.5	Propriétés cohomologiques du foncteur ω	197
8.5.1	Préliminaires	198
8.5.2	L'isomorphisme $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega(F), \omega(X)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(F, \mathcal{I}(X))$ (F analytique)	200
8.5.3	Le foncteur ω et la conjecture artinienne	201
8.5.4	Retour sur la catégorie \mathcal{F}_{inj}	205

III Avancées sur la conjecture artinienne 211

9	Foncteur ω et ∇-nilpotence	213
9.1	La catégorie $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$	213
9.2	Les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ de Powell	217
9.3	Deuxième résultat d'annulation cohomologique	219
9.4	Estimation de $\tilde{\nabla}_n \omega_n$	223
9.5	Théorème de simplicité généralisé	227
9.6	Foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ -adaptés	230
10	Facteurs de composition des foncteurs $\omega(X)$	233
10.1	Le morphisme $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \rightarrow G_0^{tf}(\mathcal{F}) \rightarrow \tilde{G}_0^f(\mathcal{F})$	235
10.2	Les foncteurs $(\cdot : \Lambda^1)$ et $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$	239
10.3	Préliminaires liés aux représentations des groupes symétriques	242
10.3.1	Liens formels entre les endofoncteurs $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$ et $(\cdot : \Lambda^1)$ de \mathcal{F} et les représentations des groupes symétriques	242
10.3.2	Quelques lemmes techniques	244
10.3.3	Hom interne et division par Λ^1 des foncteurs de Weyl	247
10.3.4	Partitions Weyl-séparantes et alternées	248
10.4	Détection de facteurs de composition par division par Λ^1	250
10.4.1	Préliminaires formels	251
10.4.2	Détection de facteurs de degré maximal dans un foncteur fini	254
10.4.3	Détection dans $\tilde{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda$	255
10.5	Application à la structure de $\omega_2(X)$	257
10.5.1	Facteurs de composition des foncteurs $\tilde{D}(2)$ et $L(2)$	257
10.5.2	Facteurs de composition des $\tilde{D}(2)$ -modules finis	261
10.5.3	Foncteur $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \cdot)$ et structure des $\tilde{G}(2)$ -comodules finis	266
	Index des Notations	275
	Index	279