Introduction

Soit k un corps commutatif, notons $\mathcal{E}_k$ la catégorie des espaces vectoriels sur k et $\mathcal{E}_k^f$ la sous-catégorie pleine des espaces de dimension finie. On désigne par $\mathcal{F}(k)$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}_k^f$ vers $\mathcal{E}_k$.

Notre objectif est d'étudier la structure globale de la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$ relative au corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$, qui sera simplement notée $\mathcal{F}$ par la suite (de même, nous noterons $\mathcal{E}^f$ et $\mathcal{E}$ pour $\mathcal{E}_{\mathbb{F}_2}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbb{F}_2}$ respectivement). La quasi-totalité de nos résultats se généraliseraient sans aucune difficulté au cas d'un corps *fini*, voire dans un cadre plus vaste pour certains d'entre eux, qui utilisent uniquement la structure abélienne de la catégorie source $\mathcal{E}^f$. Ainsi, dans notre prépublication [Dja06a], nous exposons les résultats de la deuxième partie de cette thèse dans le cadre de la catégorie $\mathcal{F}(k)$, où k est un corps fini arbitraire.

Nous avons notamment cherché à progresser dans l'étude de la conjecture suivante, initialement émise par Lannes et Schwartz, à partir de considérations relatives aux modules instables sur l'algèbre de Steenrod (cf. infra).

Conjecture 1 (Conjecture artinienne)**.** *La catégorie $\mathcal{F}$ est localement noethérienne.*

Rappelons quelques notions usuelles de finitude dans les catégories abéliennes. Un objet est dit *noethérien* si toute suite croissante de sous-objets stationne. Il est dit *artinien* si toute suite décroissante de sous-objets stationne, *fini* s'il est à la fois noethérien et artinien, *localement fini* s'il est colimite d'objets finis. Une catégorie abélienne est *localement noethérienne* si elle possède un ensemble de générateurs noethériens.

Faisons maintenant quelques rappels sur les catégories de foncteurs. Si $\mathcal{I}$ est une catégorie essentiellement petite, la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ des foncteurs de $\mathcal{I}$ vers $\mathcal{E}_k$ est une catégorie abélienne qui possède assez d'objets projectifs et assez d'objets injectifs : les foncteurs $P_A^{\mathcal{I}} = k[\hom_{\mathcal{I}}(A, \cdot)]$ constituent, par le lemme de Yoneda, une famille de générateurs projectifs, dits *standard*, et les foncteurs $I_A^{\mathcal{I}} = k^{\hom_{\mathcal{I}}(\cdot, A)}$ une famille de cogénérateurs injectifs, également dits standard. En particulier, on peut faire de l'algèbre homologique dans la catégorie abélienne $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ — on parle de *(co)homologie des foncteurs*. De plus, la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ possède les propriétés de régularité usuelles (colimites filtrantes exactes) et est munie d'un produit tensoriel, calculé au but.

Dans la catégorie $\mathcal{F}$, on dispose aussi d'un foncteur de dualité D, donné par $DF(V) = F(V^*)^*$, où $*$ désigne le foncteur de dualité des espaces vectoriels ; le foncteur D échange les projectifs standard et les injectifs standard. On voit ainsi que la conjecture 1, qui signifie que les foncteurs projectifs standard $P_V^{\mathcal{E}^f}$, notés simplement P_V, sont noethériens, équivaut à dire que les foncteurs injectifs standard $I_V^{\mathcal{E}^f}$, notés simplement I_V, sont artiniens, d'où l'appellation de *conjecture artinienne*. Les origines topologiques de l'étude de la catégorie $\mathcal{F}$, que nous allons rappeler, expliquent pourquoi s'intéresser plutôt aux I_V qu'aux P_V.

Les motivations à l'étude de la catégorie $\mathcal{F}$

Bien qu'elles constituent l'un des exemples les plus simples et fondamentaux de catégories de foncteurs, les catégories $\mathcal{F}(k)$ n'ont été étudiées de manière intrinsèque et approfondie que depuis les années 1990. Mentionnons quelques travaux précurseurs significatifs, réalisés d'un point de vue différent de celui des catégories $\mathcal{F}(k)$. Tout d'abord, la cohomologie des anneaux introduite par Mac Lane dans [ML57] a été identifiée comme un cas particulier de cohomologie des foncteurs par l'article [JP91] de Jibladze et Pirashvili. Breen a effectué des calculs importants en la matière dans [Bre78] ; les travaux de Bökstedt dans les années 1980 sur l'homologie de Hochschild topologique (non publiés — cf. [PW92] à ce sujet) sont également très liés aux catégories $\mathcal{F}(k)$. Toutes ces recherches utilisaient cependant des méthodes fort différentes de celles de la cohomologie des foncteurs.

Le cas où le corps k est infini, qui diffère profondément du cas des corps finis, n'a guère été considéré : il est alors plus naturel de se restreindre aux foncteurs polynomiaux, la catégorie $\mathcal{F}(k)$ possédant un comportement assez « pathologique » à plusieurs égards (elle n'est en particulier pas localement noethérienne, car l'anneau $k[k^\times]$ n'est pas noethérien). Cela revient à étudier, plutôt que $\mathcal{F}(k)$, la catégorie $\mathcal{P}(k)$ des *foncteurs polynomiaux stricts* de Friedlander et Suslin ([FS97]), étroitement liée aux représentations polynomiales des groupes linéaires (cf. [Gre80]). Cette approche s'inscrit dans la lignée des travaux de Schur : la catégorie $\mathcal{P}(k)$ peut se décrire à partir des représentations des algèbres de Schur.

Motivations topologiques

Dans l'article [HLS93], Henn, Lannes et Schwartz définissent un foncteur f de la catégorie $\mathcal{U}$ des modules instables sur $\mathcal{A}_p$ vers la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$. Ici, p désigne un nombre premier, et $\mathcal{A}_p$ l'algèbre de Steenrod des opérations stables de la cohomologie modulo p. Cet article montre que le foncteur f induit une équivalence de catégories entre le quotient de la catégorie $\mathcal{U}$ par la sous-catégorie épaisse $\mathcal{N}il$ des modules instables nilpotents et la sous-catégorie pleine $\mathcal{F}_\omega(\mathbb{F}_p)$ des *foncteurs analytiques* (i.e. localement finis) de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$. L'image par le foncteur f de la cohomologie H^*V modulo p d'un p-groupe abélien élémentaire V est le foncteur injectif I_V, ce qui explique l'attention portée à ces foncteurs plutôt qu'aux foncteurs P_V, qui ne sont analytiques que lorsque V est nul. La profondeur de l'équivalence de catégories que nous avons mentionnée est illustrée par l'observation suivante : l'injectivité des objets I_V de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$ est un résultat formel immédiat, tandis que l'injectivité des objets H^*V de $\mathcal{U}$, démontrée par Carlsson, Miller, Lannes et Zarati (cf. [LZ86]), et qui peut se déduire formellement de l'injectivité des foncteurs I_V par les résultats de [HLS93], comme l'a observé Kuhn (cf. [Kuh94a]), constitue un résultat tout-à-fait non trivial et topologiquement significatif.

Nous donnerons néanmoins nos énoncés en termes des foncteurs P_V plutôt que des foncteurs I_V. En effet, ce choix s'avère plus naturel dès lors que l'on cherche à préciser la conjecture artinienne par des énoncés relatifs à des catégories quotients, qu'il est usuel d'étudier relativement à des sous-catégories localisantes plutôt que co-localisantes. De plus, bien que des considérations sur la catégorie $\mathcal{U}$ aient parfois joué un rôle intuitif important dans cette thèse, cette catégorie ne sera pas utilisée explicitement. Nous traduirons également, pour la cohérence de notre exposé, la plupart des résultats antérieurs relatifs aux foncteurs I_V en termes des foncteurs P_V.

L'absence de mention explicite à la catégorie $\mathcal{U}$ ne signifie nullement que les interactions entre cette catégorie et les résultats de cette thèse soient indignes d'intérêt. D'une part, le dictionnaire donné par [HLS93] permet d'obtenir des énoncés sur les modules instables à partir d'énoncés dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$, qui sont donc susceptibles de donner lieu à des applications topologiques (cf. [Sch94]). D'autre part, comme nous le détaillerons dans l'introduction de la section 6.1, les catégories de foncteurs que nous introduirons pour étudier la conjecture artinienne sont liées à des catégories construites à partir de la catégorie $\mathcal{U}$ pour aborder des problèmes topologiques particuliers, notamment autour de la cohomologie équivariante.

Motivations algébriques : (co)homologie des groupes linéaires

L'autre principale motivation à l'étude de la catégorie $\mathcal{F}$ (externe à la théorie des catégories) provient de ses liens féconds avec la théorie des représentations modulaires et la cohomologie des groupes, notamment linéaires sur $\mathbb{F}_2$. C'est pourquoi Kuhn a nommé catégorie des *représentations* *génériques des groupes linéaires* $GL_n(k)$ la catégorie $\mathcal{F}(k)$. De fait, l'évaluation sur un espace vectoriel de dimension finie V d'un foncteur F est un $GL(V)$-module ; si la théorie des représentations constitue un outil précieux pour étudier les catégories $\mathcal{F}(k)$, à l'inverse, les méthodes spécifiques aux catégories de foncteurs peuvent aboutir à des résultats sur les représentations et la (co)homologie des groupes inaccessibles par les seules techniques internes à ces domaines.

Avant d'énoncer le résultat le plus important dans cette voie, établi indépendamment par Suslin dans l'appendice de [FFSS99] et par Betley dans [Bet99], donnons quelques notations. Soient A un anneau, $\mathbf{L}(A)$ la catégorie des A-modules à gauche libres de type fini et $T : \mathbf{L}(A)^{op} \times \mathbf{L}(A) \to \mathbf{Ab}$ (catégorie des groupes abéliens) un foncteur. La *K-théorie stable* de A à coefficients dans T est la colimite $K^s_*(A;T)$ des groupes abéliens $H_*(GL_n(A), T(A^n, A^n))$ relativement aux morphismes induits par les flèches $T(A^n, A^n) \to T(A^{n+1}, A^{n+1})$ procurées par la projection $A^{n+1} \twoheadrightarrow A^n$ sur les n premiers facteurs et l'inclusion $A^n \hookrightarrow A^{n+1}$ des n premiers facteurs. Un cas particulier fondamental d'un tel foncteur s'obtient ainsi : on part de deux foncteurs covariants F et G des A-modules vers $\mathbf{Ab}$, et l'on définit $T = \mathcal{H}om(F,G)$ comme le foncteur composé de $(F^{op}, G) : \mathbf{L}(A)^{op} \times \mathbf{L}(A) \to \mathbf{Ab}^{op} \times \mathbf{Ab}$ et du foncteur hom : $\mathbf{Ab}^{op} \times \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$.

Théorème 2 (Betley, Suslin)**.** *Soient k un corps fini et F et G deux objets* finis *de la catégorie $\mathcal{F}(k)$. La K-théorie stable $K^s_*(k, \mathcal{H}om(F,G))$ est naturellement isomorphe au groupe d'extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(k)}(F,G)$.*

Scorichenko a étendu ce résultat, donnant une description analogue de la K-théorie stable de tout anneau à coefficients dans un bifoncteur de degré d'Eilenberg-MacLane fini en chaque variable — voir le dernier chapitre de [FFPS03], et le chapitre 13 de [Lod98]. Il existe une variante *co*homologique évidente.

Outre son intérêt théorique intrinsèque, le théorème 2 permet d'effectuer des calculs de K-théorie stable, car l'on dispose de nombreux outils d'algèbre homologique dans les catégories $\mathcal{F}(k)$. Notamment, la structure *exponentielle graduée* de nombreux foncteurs usuels (puissances symétriques, extérieures...) constitue une aide précieuse pour simplifier des calculs de groupes d'extensions mettant en jeu des produits tensoriels, comme l'illustrent les articles [Fra96] et [FFSS99]. De plus, l'existence d'adjonctions entre foncteurs *exacts* s'avère précieuse — essentiellement, on utilise les adjoints à droite et à gauche au foncteur différence Δ (dont la définition est rappelée plus loin). Ces arguments d'adjonction, remarquablement simples et efficaces, et souvent combinés à l'emploi de structures exponentielles, ont été initiés par Pirashvili (cf. [JP91], ou son article dans le volume [FFPS03] pour une exposition plus récente), puis utilisés abondamment par différents auteurs ; une application importante est fournie par Franjou, Lannes et Schwartz dans [FLS94]. Les résultats d'annulation cohomologique que nous avons obtenus, et que nous évoquerons en détails ultérieurement, s'inscrivent dans cette lignée.

Les motivations à l'étude des propriétés de finitude d'une catégorie abélienne

Si le lien entre le caractère localement noethérien conjectural de la catégorie $\mathcal{F}$ et les considérations précédentes n'est pas patent à première vue, il apparaît clairement lorsqu'on se penche sur les méthodes développées pour établir des cas particuliers de la conjecture 1. De fait, rares sont les objets dont on sait démontrer le caractère noethérien sans déterminer leur structure plus précisément.

Dans la catégorie $\mathcal{F}$, c'est la notion suivante qui sera utile pour étudier la structure des objets de type fini.

Définition 3 (cf. [Pow00a] pour la notion duale)**.** On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ la notion d'objet *simple noethérien de type* n et d'objet *noethérien de type* n ainsi.

- Un objet est simple noethérien de type -1 s'il est nul.

- Un objet est simple noethérien de type n s'il n'est pas noethérien de type $n-1$ mais que tous ses quotients stricts le sont.
- Un objet est noethérien de type n s'il possède une filtration finie dont les quotients sont simples noethériens de types $\leq n$.

Très vite s'est imposée la forme renforcée suivante de la conjecture artinienne (cf. [Pow98c]).

Conjecture 4 (Conjecture artinienne, forme forte)**.** *Si V est un espace vectoriel de dimension n, le foncteur P_V est noethérien de type n.*

Nous utiliserons aussi la notion classique suivante, voisine de la précédente, pour estimer la « taille » d'un objet.

Définition 5 (cf. [Gab62])**.** La *filtration de Krull* d'une catégorie abélienne avec colimites $\mathcal{A}$ est la suite croissante de sous-catégories $(\mathcal{K}_n(\mathcal{A}))$ définie par récurrence comme suit.
- Pour $n < 0$, $\mathcal{K}_n(\mathcal{A}) = \{0\}$.
- Pour $n \geq 0$, $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$ est l'image réciproque par le foncteur canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$ de la plus petite sous-catégorie épaisse, stable par colimites et contenant les objets finis [1] de $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$.

Le lien entre les définitions 3 et 5 vient de ce qu'un objet est noethérien de type n dans $\mathcal{A}$ si et seulement s'il est noethérien et appartient à $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$. Le caractère fondamental de la notion de filtration de Krull d'une catégorie abélienne est illustré par le fait que la dimension de Krull d'un anneau commutatif est la borne à partir de laquelle la filtration de Krull de la catégorie des A-modules stationne. Nous avons présenté de manière assez détaillée, au chapitre 2, les rudiments relatifs aux différentes notions de finitude que nous aurons à utiliser dans la catégorie $\mathcal{F}$, dans le cadre des catégories de Grothendieck. En effet, ces résultats élémentaires et connus ne semblent pas avoir fait l'objet d'une présentation intrinsèque systématique.

Comme nous l'expliquerons dans la suite de cette introduction, nos recherches se sont orientées en grande partie vers la compréhension, encore grandement conjecturale, de la filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{F}$. Il ne s'agit donc pas seulement de montrer que cette catégorie n'est pas trop « pathologique », mais d'en étudier en profondeur la structure globale, obtenant ce faisant des renseignements « concrets » sur la structure de certains foncteurs. En outre, les outils que nous avons développés nous ont permis d'établir des résultats d'algèbre homologique puissants dans la catégorie $\mathcal{F}$, intimement liés au théorème 2.

La structure élémentaire des catégories de foncteurs usuelles

Pourquoi s'intéresser à d'autres catégories de foncteurs ?

Limitons-nous aux catégories de foncteurs dont le but est $\mathcal{E}$ et la source une catégorie essentiellement petite dont les ensembles de morphismes sont finis (les autres se comportant de manière très différente de $\mathcal{F}$). *Certaines de ces catégories ne sont pas localement noethériennes* ; l'exemple 4.3.3 en donne un cas très simple. Il serait déterminant conceptuellement de disposer d'une conjecture générale sur le caractère localement noethérien de catégories de foncteurs. À défaut, il importe de comparer les propriétés élémentaires de plusieurs de ces catégories.

De surcroît, l'étude de la catégorie $\mathcal{F}$ fait naturellement apparaître d'autres catégories de foncteurs. Nous évoquerons ultérieurement les plus complexes d'entre elles, les catégories de foncteurs en grassmanniennes, qui constituent le principal outil nouveau de cette thèse. De ce fait, si $\mathcal{F}$ joue un rôle central parmi les catégories de foncteurs de but $\mathcal{E}$ (ne serait-ce que par la post-composition par un foncteur de $\mathcal{F}$), d'autres catégories occupent une place de choix dans les différentes questions algébriques soulevées par l'étude de la conjecture artinienne et des questions de représentations modulaires connexes.

[1] On prendra garde au fait qu'en général, la sous-catégorie des objets localement finis de $\mathcal{A}$ n'est *pas* épaisse. C'est cependant le cas si les objets simples de $\mathcal{A}$ sont de présentation finie (cf. chapitre 2).

La tendance à l'ubiquité de l'homologie des foncteurs parmi les théories homologiques constitue un autre motif majeur d'intérêt pour diverses catégories de foncteurs. Ainsi, dans [Pir03], Pirashvili montre que la cohomologie d'André-Quillen est un cas particulier de cohomologie fonctorielle ; dans [Pir00] (généralisé dans [PR02]), il établit un résultat analogue pour l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique, qui utilise les Γ-modules (qui sont les objets d'une certaine catégorie de foncteurs). On pourra consulter aussi l'ouvrage [Lod98] sur ces questions.

L'outil de base de la catégorie $\mathcal{F}$: le foncteur différence

Le chapitre 4 rappelle les principaux résultats connus sur la structure élémentaire de la catégorie $\mathcal{F}$. On peut en trouver les démonstrations d'origine dans [Kuh94a], [Pir95] ou [Sch94], par exemple. Nous nous sommes attachés à présenter les propriétés et les démonstrations que nous avons détaillées de la façon la plus formelle possible, afin d'en mettre en évidence les sous-bassements conceptuels, dans l'optique de l'étude globale des propriétés de finitude de la catégorie $\mathcal{F}$ et de la généralisation de certaines propriétés à d'autres catégories de foncteurs (sur lesquelles nous faisons quelques rappels généraux dans le chapitre 3). Ainsi, l'important résultat, dû à Schwartz, selon lequel les objets finis de $\mathcal{F}$ possèdent une résolution projective de type fini, apparaît comme une conséquence formelle de leur caractère *polynomial*, i.e. nilpotent pour le foncteur différence Δ, et des propriétés élémentaires de celui-ci. Rappelons que ce foncteur, qui constitue l'un des plus importants outils dont on dispose dans $\mathcal{F}$, est défini par le scindement naturel

$$F(V \oplus \mathbb{F}_2) \simeq \Delta F(V) \oplus F(V)$$

qui utilise la structure additive de la catégorie source $\mathcal{E}^f$ de $\mathcal{F}$. Le foncteur Δ est adjoint à droite à $\cdot \otimes \bar{P}$ et à gauche à $\cdot \otimes \bar{I}$, où le foncteur $\bar{P}$ est la couverture projective du foncteur identité et $\bar{I}$ son enveloppe injective.

C'est grâce au caractère polynomial des foncteurs finis de $\mathcal{F}$ que l'on comprend aisément les objets simples, en bijection avec les représentations (sur $\mathbb{F}_2$) des différents groupes symétriques. On obtient un système fondamental de représentants S_λ des objets simples de $\mathcal{F}$ indexé, par les partitions 2-régulières λ. On dispose à partir de là de nombreux résultats sur les foncteurs simples de la catégorie $\mathcal{F}$; l'absence d'analogue élémentaire au foncteur exact Δ qui soit approprié à l'étude les foncteurs infinis participe de la difficulté de la conjecture artinienne.

Les catégories $\mathcal{F}_{surj}$ et $\mathcal{F}_{inj}$

Le chapitre 5 présente des résultats similaires à ceux que nous venons d'évoquer pour les catégories notées $\mathcal{F}_{surj}$ et $\mathcal{F}_{inj}$. Ce sont les catégories de foncteurs de but $\mathcal{E}$ et de sources respectives $\mathcal{E}^f_{surj}$ et $\mathcal{E}^f_{inj}$, sous-catégories de $\mathcal{E}^f$ ayant les mêmes objets, mais dont les morphismes sont respectivement les épimorphismes et les monomorphismes. Les catégories $\mathcal{F}_{surj}$ et $\mathcal{F}_{inj}$ sont *duales* en un sens que nous définissons dans la section 1.5, adapté aux catégories de foncteurs : si $\mathcal{F}_{inj}$ n'est pas équivalente à la catégorie $(\mathcal{F}_{surj})^{op}$, elle lui « ressemble » beaucoup, et nombre de raisonnements peuvent se mener « comme si » ces deux catégories étaient équivalentes.

Les foncteurs d'inclusion $\mathcal{E}^f_{surj} \hookrightarrow \mathcal{E}^f$ et $\mathcal{E}^f_{inj} \hookrightarrow \mathcal{E}^f$ induisent respectivement, par précomposition, des foncteurs d'oubli notés $o : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{surj}$ et $o_{inj} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{inj}$. L'adjoint à gauche au foncteur o est un foncteur exact explicite, de même que l'adjoint à droite à o_{inj}, dualement (cf. § 5.4.1).

La catégorie $\mathcal{F}_{surj}$ intervient dans la généralisation de Scorichenko du théorème 2 (présentée dans le dernier chapitre de [FFPS03], où cette catégorie est notée $\mathbb{E}$) ; elle utilise l'adjonction fondamentale entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{surj}$ dont nous venons de parler. La catégorie $\mathcal{F}_{inj}$ est, pour sa part, équivalente à une sous-catégorie pleine de la catégorie des *systèmes de coefficients* de Dwyer ([Dwy80]). Bien que nombre des résultats du chapitre 5 soient implicites dans la littérature, les catégories $\mathcal{F}_{surj}$ et $\mathcal{F}_{inj}$ ne semblent pas avoir été étudiées de manière systématique.

On peut mener une étude des objets finis de ces catégories analogue à celle de la catégorie $\mathcal{F}$, le foncteur différence étant remplacé par un foncteur de décalage. Leurs objets simples sont naturellement paramétrisés par les représentations simples des différents groupes linéaires. Leur structure globale est aussi mystérieuse que celle de la catégorie $\mathcal{F}$: si la catégorie $\mathcal{F}_{inj}$ est localement noethérienne, il en est de même pour $\mathcal{F}$, par un argument formel d'adjonction.

L'intérêt spécifique que nous portons aux catégories $\mathcal{F}_{surj}$ et $\mathcal{F}_{inj}$ est double. D'une part, l'une des étapes essentielles de la démonstration de Suslin du théorème 2 repose sur le résultat suivant.

Proposition 6 (Suslin)**.** *Soient F et G deux objets de $\mathcal{F}$, F étant supposé fini. Le morphisme canonique*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(F,G) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_{inj}}(o_{inj}(F), o_{inj}(G))$$

est un isomorphisme.

Nos méthodes permettront de généraliser cette proposition.

D'autre part, les progrès accomplis par Powell dans l'étude de la conjecture artinienne à l'aide des foncteurs qu'il a baptisés *foncteurs co-Weyl* se traduisent très efficacement en termes de la catégorie $\mathcal{F}_{surj}$, comme nous allons le voir.

Historique de la conjecture artinienne

Le premier dévissage naturel des foncteurs projectifs P_V consiste en leur décomposition en somme directe de projectifs indécomposables. Comme l'anneau d'endomorphismes de P_V s'identifie à l'algèbre de monoïde finie $\mathbb{F}_2[\mathrm{End}\,(V)]$, il s'agit d'un problème algébrique « fini » ; il est abordé dans [HK88]. Explicitons les premiers cas : on a $P_0 = \mathbb{F}_2$ (foncteur constant), qui est simple, et $P_{\mathbb{F}_2} \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \bar{P}$. Ensuite, $P_{\mathbb{F}_2{}^{\oplus 2}} \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \bar{P}^{\oplus 2} \oplus P_{(2,1)}^{\oplus 2} \oplus P_{(2)}$, où $P_{(2)}$ est la couverture projective de la seconde puissance extérieure Λ^2 et $P_{(2,1)}$ celle du foncteur simple $S_{(2,1)}$, que l'on peut caractériser par le scindement $\Lambda^2 \otimes \Lambda^1 \simeq \Lambda^3 \oplus S_{(2,1)}$, ou encore par le fait que $S_{(2,1)}(\mathbb{F}_2{}^{\oplus 2})$ est la représentation tautologique $\mathbb{F}_2{}^{\oplus 2}$ de $GL_2(\mathbb{F}_2)$ et que $S_{(2,1)}(\mathbb{F}_2) = 0$.

La structure du foncteur $\bar{P}$ est élémentaire : il est *unisériel*, c'est-à-dire que l'ensemble de ses sous-objets est totalement ordonné pour l'inclusion. Précisément, il en existe une filtration décroissante $(k_n\bar{P})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $k_n\bar{P}/k_{n+1}\bar{P} \simeq \Lambda^n$ pour $n > 0$, et $k_0\bar{P} \simeq \bar{P}$. Cette filtration est duale de la filtration polynomiale de $\bar{I}$. Les sous-foncteurs de $\bar{P}$ sont les $k_n\bar{P}$ et 0. Ainsi, $\bar{P}$ est un exemple de foncteur *simple noethérien de type* 1 : il est infini, mais tous ses quotients non nuls sont finis. La conjecture 4 est donc aisée pour les projectifs P_V si $\dim V \leq 1$; elle devient en revanche très difficile ensuite, et reste ouverte pour $\dim V \geq 3$.

De fait, le cas des foncteurs projectifs indécomposables $P_{(2)}$ et $P_{(2,1)}$ s'avère très significativement plus complexe. Auparavant a été étudiée la structure des foncteurs $\bar{P} \otimes \Lambda^n$. Celle-ci est motivée par le fait que la filtration de $\bar{P}^{\otimes 2}$ par les $\bar{P} \otimes k_n\bar{P}$ a pour quotients les $\bar{P} \otimes \Lambda^n$. Piriou a démontré dans [Pir97] que ces foncteurs sont noethériens de type 1 et en a donné la structure dans la catégorie $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$. Il employait des méthodes assez explicites issues de la théorie des représentations des groupes symétriques. Powell a généralisé ce résultat dans [Pow00b] en montrant le caractère noethérien de type 1 du produit tensoriel entre $\bar{P}$ et un foncteur fini. Sa méthode n'en donne pas la structure explicite dans la catégorie $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\omega$.

La structure de $\bar{P}$ peut se déterminer à l'aide du foncteur différence, qui s'est révélé insuffisant pour l'étude des projectifs indécomposables plus « gros ». Powell a accompli une avancée importante en introduisant, dans [Pow00a], des endofoncteurs $\tilde{\nabla}_n$ généralisant le foncteur Δ, dont ils sont des sous-quotients. Leur maniement plus délicat tient à leur inexactitude. Cependant, ils préservent épimorphismes et monomorphismes, et possèdent deux vertus fondamentales. D'une part, ils constituent un outil efficace de calcul *global* sur les objets simples de $\mathcal{F}$: si λ est une partition régulière de longueur n, on a $\tilde{\nabla}_n(S_\lambda) = S_{(\lambda_1-1,\dots,\lambda_n-1)}$. D'autre part, les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ accroissent moins rapidement — et ce d'autant que n augmente — la taille des foncteurs infinis que le foncteur différence. On a par exemple $\tilde{\nabla}_n(P_V) = 0$ si $\dim V < n$, et $\tilde{\nabla}_n(P_V) \simeq P_V$ si $\dim V = n$.

Powell a obtenu le caractère noethérien de type 1 de $\bar{P} \otimes F$, pour F fini, par la combinaison de constructions explicites issues de la théorie des représentations et des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$. Il a également démontré le caractère noethérien de type 2 des foncteurs $P_{(2)}$ et $P_{(2,1)}$ dans [Pow98a], grâce à un outil supplémentaire, qu'il a introduit dans [Pow98c] et nommé foncteurs *co-Weyl*, que nous appellerons *foncteurs de Powell*. Ces foncteurs de $\mathcal{F}$ sont les images des foncteurs simples de $\mathcal{F}_{surj}$ par l'adjoint à gauche $\varpi : \mathcal{F}_{surj} \to \mathcal{F}$ au foncteur d'oubli $o : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{surj}$. On obtient ainsi des foncteurs Q_λ paramétrisés par les partitions régulières λ. Les projectifs indécomposables de type fini de $\mathcal{F}$ possèdent une filtration finie dont les quotients sont des foncteurs de Powell. Le résultat principal sur la structure de ces foncteurs est le suivant.

Théorème 7 (Théorème de simplicité de Powell, [Pow98c])**.** *Si λ est une partition régulière telle que $\lambda_1 = n$, alors Q_λ n'est pas $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent, mais tous ses quotients stricts le sont.*

C'est en étudiant les foncteurs de type fini annihilés par le foncteur $\tilde{\nabla}_2$, et en s'appuyant sur la structure de $\bar{P} \otimes \Lambda^n$, que Powell a pu déduire de ce résultat le caractère noethérien de type 2 de $P_{(2)}$ et $P_{(2,1)}$, donc de $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}$. Il a émis la conjecture suivante.

Conjecture 8 (Conjecture artinienne, forme très forte)**.** *Pour toute partition régulière λ, le foncteur de Powell Q_λ est simple noethérien de type λ_1.*

Pour plus de détails sur les progrès accomplis sur la conjecture artinienne, nous renvoyons à [Pow00a] et à notre section 4.3.

La première avancée que nous avons obtenue sur la conjecture artinienne réside dans le résultat suivant.

Théorème 9 ([Dja06c])**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}} \otimes \Lambda^n$ est noethérien de type* 2.

Il s'agit d'une étape pour l'étude de la structure du foncteur $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 3}}$, pour la même raison que les $\bar{P} \otimes \Lambda^n$ interviennent dans la structure de $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}$. Une version plus générale de ce théorème est exposée dans le chapitre 10 suivant la méthode employée dans [Dja06c] ; elle requiert cependant des outils supplémentaires par rapport au seul théorème 9.

Le théorème 9 se démontre à partir du théorème 7 et de l'endofoncteur hom interne $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(\Lambda^1, \cdot)$ de $\mathcal{F}$, adjoint à droite à $\cdot \otimes \Lambda^1$ — nous en utilisons en fait l'adjoint à *gauche* $(\cdot : \Lambda^1)$, car nous travaillons sur les injectifs de $\mathcal{F}$ dans [Dja06c]. Le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(\Lambda^1, \cdot)$ est un sous-foncteur du foncteur différence, mais dont le comportement diffère de celui des foncteurs $\tilde{\nabla}_2$, puisqu'il s'agit d'un foncteur *exact à gauche* (mais non exact). Nous renvoyons à l'introduction de [Dja06c] pour plus de détails sur cette méthode.

Les difficultés techniques rencontrées pour l'étendre au produit tensoriel entre $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}$ et un foncteur fini quelconque nous ont amenés à chercher une approche plus conceptuelle pour construire les « briques élémentaires » de ces produits tensoriels. Notre attention s'est focalisée sur le fait que toutes les constructions utilisées jusqu'à présent pour dévisser les foncteurs $\bar{P} \otimes F$ (pour F fini) fournissaient des foncteurs munis d'une structure de $\bar{P}$*-comodule*, et pour $\bar{P}^{\otimes 2} \otimes F$, une structure de $\bar{G}(2)$*-comodule*, où le foncteur $\bar{G}(2)$ est introduit ci-après.

Des $\bar{D}(n)$-modules à la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$

Le foncteur $P_{\mathbb{F}_2}$ est construit comme la composée d'un foncteur $\mathcal{E}^f \to \mathbf{Ens}$ (le foncteur d'oubli) et du foncteur de linéarisation $\mathbb{F}_2[\cdot] : \mathbf{Ens} \to \mathcal{E}$. Ce foncteur est à valeurs dans les coalgèbres coünitaires, coassociatives et cocommutatives, par la diagonale $[x] \mapsto [x] \otimes [x]$ (où l'on note $[x] \in \mathbb{F}_2[X]$ le générateur correspondant à $x \in X$) ; cette structure est duale de la structure d'algèbre de Boole standard sur le foncteur $X \mapsto \mathbb{F}_2{}^X : \mathbf{Ens}^{op} \to \mathcal{E}$. On en déduit sur le foncteur $\bar{P} = P_{\mathbb{F}_2}/\mathbb{F}_2$ une structure de coalgèbre non coünitaire, coassociative et cocomutative. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si l'on note $\mathcal{G}r_n(V)$ la grassmannienne des sous-espaces de dimension n d'un espace vectoriel V, le foncteur de Powell $\bar{G}(n) : V \mapsto \mathbb{F}_2[\mathcal{G}r_n(V)] \simeq \mathbb{F}_2[\mathcal{G}r_n(V) \amalg \{*\}]/\mathbb{F}_2$ est muni d'une telle structure, à partir du foncteur $\mathcal{E}^f \to \mathbf{Ens} \quad V \mapsto \mathcal{G}r_n(V) \amalg \{*\}$ dont l'action sur les morphismes est donnée comme suit. Si $f : V \to V'$ est un morphisme de $\mathcal{E}^f$, la flèche

$f_* : \mathbb{F}_2[\mathcal{G}r_n(V) \amalg \{*\}] \to \mathbb{F}_2[\mathcal{G}r_n(V') \amalg \{*\}]$ associe $[f(W)]$ à $[W]$ si $W \in \mathcal{G}r_n(V)$ est tel que $\dim f(W) = n$, et $[*]$ à $[*]$ et à $[W]$ si $\dim f(W) < n$.

Les foncteurs en algèbre de Boole, duaux de ce type de foncteurs, apparaissent dans la deuxième partie de [HLS93]. Le cas précis des $\bar{D}(n)$-modules (notion duale des $\bar{G}(n)$-comodules) est brièvement considéré dans la section 7 de [Pow98c] ; nos travaux sur les $\bar{G}(n)$-comodules constituent de fait la continuation des travaux de Powell sur la conjecture artinienne.

Le point de départ de notre étude de ces catégories de (co)modules est la proposition suivante, formelle mais féconde.

Proposition 10. *Soient $\mathcal{I}$ une catégorie essentiellement petite et $X : \mathcal{I} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. Notons $\mathcal{I}_{\backslash X}$ la catégorie dont les objets sont les couples (A, u) formés d'un objet A de $\mathcal{I}$ et d'un élément u de $X(A)$.*

Il existe un foncteur exact et fidèle Ω_X de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\backslash X}, \mathcal{E})$ vers $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E})$, appelé foncteur d'intégrale, *donné sur les objets par*

$$\Omega_X(F)(A) = \bigoplus_{u \in X(A)} F(A, u).$$

Ce foncteur induit une équivalence entre la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\backslash X}, \mathcal{E})$ et la sous-catégorie de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E})$ des comodules sur le foncteur en coalgèbres de Boole $\mathbb{F}_2[X]$.

Nous détaillons ce type de construction dans la section 6.1, où nous traitons également le cas d'un foncteur en coalgèbres de Boole sans coünité, qui est celui de $\bar{G}(n)$.

Les catégories de comodules sur un foncteur en coalgèbres de Boole de la proposition 10, ou, dualement, les catégories de modules sur un foncteur en algèbres de Boole, présentent des analogies avec les catégories de modules sur des algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod considérées par différents auteurs (cf. [Rec84], [HLS95] et [LZ95]). De fait, dans le dictionnaire de [HLS93] entre foncteurs et modules instables, les algèbres instables correspondent aux foncteurs obtenus par linéarisation de foncteurs ensemblistes, c'est-à-dire aux foncteurs en algèbres de Boole — voir l'introduction de la section 6.1 pour plus de détails.

Il s'est avéré fort utile, pour étudier les $\bar{G}(n)$-comodules, de considérer une catégorie « globale » utilisant la grassmannienne de *tous* les sous-espaces d'un espace vectoriel, et pas seulement ceux d'une dimension donnée. Cela nous amène à poser la définition suivante.

Définition 11 (Les catégories de foncteurs $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$)**.** Soit $\mathcal{G}r : \mathcal{E}^f \to \mathbf{Ens}$ le foncteur associant à un espace vectoriel l'ensemble de ses sous-espaces et à une application linéaire $f : V \to V'$ la fonction $\mathcal{G}r(V) \to \mathcal{G}r(V') \quad W \mapsto f(W)$. La catégorie $(\mathcal{E}^f)_{\backslash \mathcal{G}r}$ sera notée $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r,n}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}$ formée des objets (V, W) de $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$ tels que $\dim W = n$.

On définit les *catégories de foncteurs en grassmanniennes*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}r} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}, \mathcal{E})$$

et

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r,n}, \mathcal{E}).$$

Nous introduirons par la suite d'autres catégories de foncteurs en grassmanniennes, mais celles que nous venons de définir sont les plus importantes. A côté du foncteur de restriction $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, on dispose d'un foncteur de *prolongement par zéro* $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ qui permet d'identifier $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ à la sous-catégorie pleine des foncteurs X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ tels que $X(V, W) = 0$ si $\dim W \neq n$.

Le foncteur d'intégrale $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}$ de la proposition 10 sera noté ω ; on désignera par ω_n sa restriction à $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$. Ces foncteurs sont appelés *foncteurs d'intégrale en grassmanniennes.* La proposition 10 et sa variante non coünitaire procurent le résultat suivant.

Corollaire 12. *1. Le foncteur ω établit une équivalence entre la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et la catégorie des $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]$-comodules.*

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur ω_n établit une équivalence entre la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et la catégorie des $\bar{G}(n)$-comodules fidèles, i.e. dont la comultiplication est injective.

La structure algébrique des catégories de foncteurs en grassmanniennes

Nous indiquons maintenant les propriétés d'usage courant de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$. Elles sont établies dans le paragraphe 6.3.1 et les sections 8.1 et 8.2. Pour la notion de diagramme de recollement dans les catégories abéliennes, nous renvoyons à [Kuh94b], § 2.

Proposition 13. *Il existe une filtration de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ par des sous-catégories épaisses $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leq n}$ possédant les propriétés suivantes.*

1. *Pour tout entier $n \geq 0$, il existe un diagramme de recollement*
$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leq n-1} \rightleftarrows \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leq n} \rightleftarrows \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \ .$$
2. *Tout objet de type fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ appartient à l'une des sous-catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leq n}$.*

Cette proposition clarifie le lien entre la catégorie globale $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$. Par la suite, nous ne détaillerons guère que les propriétés relatives à la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$.

- Il existe deux foncteurs exacts et fidèles ξ et $\theta : \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^f_{surj}, \mathcal{E}) \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, fournis par la précomposition par les foncteurs $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^f_{surj}$ donnés par $(V,W) \mapsto (V,W)$ et $(V,W) \mapsto (V/W,W)$ respectivement. De plus, le foncteur θ est plein, et son image est stable par sous-quotients.
  La catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^f_{surj}, \mathcal{E})$ sera notée $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$ dans la suite ; les raisons de cette convention sont rappelées dans le paragraphe 3.3.2.
  On a de même, par restriction, des foncteurs ξ_n et $\theta_n : \mathcal{F}_{GL_n} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, {}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod}) \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, où ${}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod}$ désigne la catégorie des $\mathbb{F}_2[GL_n]$-modules à gauche.
- Le foncteur $\kappa : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ donné par la précomposition par $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{E}^f \quad (V,W) \mapsto V/W$ est exact et pleinement fidèle ; son image est stable par sous-quotients.
- Le foncteur $\sigma : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$ de précomposition par $\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^f_{surj} \to \mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r} \quad (A,B) \mapsto (A \oplus B, B)$ est exact et fidèle. Il est adjoint à droite à ξ.
  De surcroît, la composition $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj} \xrightarrow{\theta} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$ est isomorphe à l'identité.

Grâce aux foncteurs adjoints ξ et σ, on peut penser à la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ comme à une sorte de « produit tensoriel tordu » des catégories $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{surj}$ (voir le paragraphe de cette introduction relatif à la structure monadique). De façon analogue, la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ constitue une sorte de « produit tensoriel tordu » des catégories $\mathcal{F}$ et ${}_{\mathbb{F}_2[GL_n]}\mathbf{Mod}$.

La structure élémentaire de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ se déduit ainsi aisément de celle de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{surj}$, comme l'illustrent les propriétés suivantes.

- Le foncteur $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ de précomposition par le foncteur $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{E}^f$ d'oubli du sous-espace de base est exact et fidèle ; il est adjoint à droite au foncteur ω.
- Soient $\rho : \mathcal{F}_{surj} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et $\varepsilon : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}_{surj}$ les foncteurs de précomposition par $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{E}^f_{surj} \quad (V,W) \mapsto W$ et $\mathcal{E}^f_{surj} \to \mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r} \quad V \mapsto (V,V)$ respectivement. Le foncteur ρ est adjoint à gauche à ε, et l'unité $id \to \varepsilon\rho$ est un isomorphisme.
- La composition $\mathcal{F}_{surj} \xrightarrow{\rho} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \xrightarrow{\omega} \mathcal{F}$ est isomorphe à ϖ. Cela permet de voir les foncteurs de Powell comme des $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]$-comodules particuliers.
- Si V est un objet de $\mathcal{E}^f$ et W un objet de $\mathcal{E}^f_{surj}$, les foncteurs projectifs et injectifs standard de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ associés à l'objet $(V \oplus W, W)$ de $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$, notés respectivement $P^{\mathcal{G}r}_{(V\oplus W,W)}$ et $I^{\mathcal{G}r}_{(V\oplus W,W)}$, vérifient
$$P^{\mathcal{G}r}_{(V\oplus W,W)} \simeq \iota(P_V) \otimes \rho(P^{surj}_W),$$
  où P^{surj}_W est le projectif standard de $\mathcal{F}_{surj}$ associé à W, et
$$I^{\mathcal{G}r}_{(V\oplus W,W)} \simeq \kappa(I_V) \otimes I^{\mathcal{G}r}_{(W,W)}.$$

- Il existe des isomorphismes naturels

$$\omega(P^{\mathcal{G}r}_{(V,W)}) \simeq P_V \tag{1}$$

dans $\mathcal{F}$ et

$$\iota(I_V) \simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}r(V)} I^{\mathcal{G}r}_{(V,W)} \tag{2}$$

dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$.

Comme dans $\mathcal{F}$, on définit le *foncteur de décalage* par un objet E de $\mathcal{E}^f$ comme étant l'endofoncteur $\Delta_E^{\mathcal{G}r}$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ de précomposition par $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r} \quad (V,W) \mapsto (V \oplus E, W)$. Il est adjoint à droite à $\cdot \otimes \iota(P_V)$ et à gauche à $\cdot \otimes \kappa(I_V)$.

On a un scindement $\Delta^{\mathcal{G}r}_{\mathbb{F}_2} \simeq id \oplus \Delta^{\mathcal{G}r}$, où $\Delta^{\mathcal{G}r}$ est appelé le *foncteur différence*. Le noyau de ce foncteur exact est égal à l'image du foncteur ρ ; ses objets sont appelés *foncteurs pseudo-constants*.

Si l'on pense à $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ comme à un « produit tensoriel tordu » de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{surj}$, le foncteur différence $\Delta^{\mathcal{G}r}$ est le produit tensoriel (tordu) entre le foncteur différence de $\mathcal{F}$ et l'identité de $\mathcal{F}_{surj}$. Cela explique que ce foncteur possède un comportement très analogue au foncteur différence Δ de la catégorie $\mathcal{F}$. On définit dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ comme dans $\mathcal{F}$ la notion de foncteur polynomial de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$; les propriétés formelles de ces foncteurs sont similaires dans les deux catégories.

De plus, le caractère polynomial des objets finis persiste dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$:

Proposition 14. *Un foncteur X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ est fini si et seulement s'il vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. *X est un foncteur polynomial ;*
2. *$X(V,W)$ est nul si* $\dim W$ *est assez grande ;*
3. *X prend des valeurs de dimension finie.*

On en déduit formellement que les foncteurs introduits plus haut, *sauf les foncteurs d'intégrale en grassmanniennes*, conservent les objets finis.

Parmi les nombreuses conséquences de l'importante proposition 14, citons le résultat suivant.

Proposition 15. 1. *Soit X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
   - *(a) l'objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ est simple ;*
   - *(b) l'objet $\sigma(X)$ de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$ est simple ;*
   - *(c) il existe un objet simple F de $\mathcal{F}$ et un objet simple R de $\mathcal{F}_{surj}$ tels que X est isomorphe à $\kappa(F) \otimes \rho(R)$.*

2. *Les foncteurs exacts σ et θ induisent des isomorphismes réciproques l'un de l'autre entre les groupes de Grothendieck $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r})$ et $G_0^f(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}) \simeq G_0^f(\mathcal{F}) \otimes G_0^f(\mathcal{F}_{surj})$ des objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$.*

Structures tensorielles

La structure tensorielle de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ possède de riches propriétés. Ainsi, de nombreux arguments d'adjonction permettent de relier les foncteurs hom internes et les foncteurs de division (adjoints à droite et à gauche respectifs au produit tensoriel) dans les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et $\mathcal{F}$. Citons trois exemples.

Proposition 16. *Soient F, G deux objets de $\mathcal{F}$ et X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$. On a des isomorphismes naturels :*

$$\omega(X : \iota(F)) \simeq (\omega(X) : F),$$

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}}(\kappa(F), \kappa(G)) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}}(\iota(F), \kappa(G)) \simeq \kappa\big(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F,G)\big),$$

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}}(\iota(F), \iota(G)) \simeq \iota\big(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F,G)\big).$$

Le premier de ces isomorphismes est particulièrement important lorsque F est un objet injectif standard de $\mathcal{F}$. Dans ce cas, il se lit comme $\Delta_V \circ \omega \simeq \omega \circ (\cdot : \iota(I_V))$. Le scindement (2) de $\iota(I_V)$ procure alors un scindement explicite de $\Delta_V \circ \omega$, qui reflète une partie importante du comportement du foncteur ω.

Citons enfin une propriété moins formelle de la structure tensorielle usuelle de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$.

Proposition 17. *Les foncteurs $\omega \circ \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}}(\iota(q_k \bar{P}), \cdot)$ et $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(q_k \bar{P}, \cdot) \circ \omega$ sont isomorphes pour tout entier k.*

Ici, les foncteurs $q_k \bar{P}$ sont les quotients non triviaux de $\bar{P}$; le cas le plus important est celui de $q_1 \bar{P} \simeq \Lambda^1$. Cette propriété ne se généralise pas lorsqu'on remplace $q_k \bar{P}$ par un foncteur quelconque. Elle nous permet de revenir sur l'approche du théorème 9 utilisant le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(\Lambda^1, \cdot)$: grâce à elle et à la proposition 16, on obtient des calculs internes à $\mathcal{F}$ très difficiles à mener directement dans le cas général. C'est ainsi que l'on a pu généraliser, dans le chapitre 10 de cette thèse, la méthode d'étude de la structure de $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}} \otimes \Lambda^n$ de notre article [Dja06c] (qui ne fait pas usage des catégories de foncteurs en grassmanniennes) au cas du produit tensoriel entre $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}$ et un foncteur fini quelconque.

À côté de la structure tensorielle usuelle sur $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ existe une autre structure tensorielle, que nous avons nommée *produit tensoriel total* et notée $\widetilde{\otimes}$. Il est donné sur les objets par la formule

$$(X \widetilde{\otimes} Y)(V, W) = \bigoplus_{\substack{A,B \in \mathcal{G}r(W) \\ A+B=W}} X(V, A) \otimes Y(V, B).$$

Deux principales raisons ont motivé son introduction.

– Parmi les foncteurs que nous avons considérés dans cette section, tous commutent au produit tensoriel usuel, à l'exception notable du foncteur d'intégrale en grassmanniennes ω. On a en revanche un isomorphisme naturel $\omega(X \widetilde{\otimes} Y) \simeq \omega(X) \otimes \omega(Y)$.
– Le produit tensoriel usuel de deux injectifs standard de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ est une somme directe finie d'injectifs standard, mais le produit tensoriel usuel se comporte mal relativement aux projectifs de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$. En revanche, il existe un isomorphisme naturel $P^{\mathcal{G}r}_{(A,B)} \widetilde{\otimes} P^{\mathcal{G}r}_{(A',B')} \simeq P^{\mathcal{G}r}_{(A \oplus A', B \oplus B')}$.

De plus, nombre des propriétés de « régularité » du produit tensoriel usuel de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ persistent pour le produit tensoriel total, notamment l'exactitude et la préservation des objets finis.

Les considérations relatives aux structures tensorielles sur $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ sont présentées dans les sections 8.3 et 8.4 ; un avant-goût du produit tensoriel total apparaît dans le cadre de la catégorie $\mathcal{F}_{surj}$, dans la section 5.2.

Structure monadique

L'équivalence de catégories du corollaire 12 provient essentiellement de l'adjonction entre les foncteurs exacts et fidèles ω et ι. Mais il existe une autre adjonction, tout aussi fondamentale, entre les foncteurs exacts et fidèles ξ et σ. Pour des raisons formelles, on en déduit une équivalence de catégories entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et la catégorie des *modules* sur une certaine monade explicite de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$, ou dans le cas de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, sur $\mathcal{F}_{GL_n}$ (qui possède l'avantage d'être plus directement liée à $\mathcal{F}$). Comme nous le montrons dans la section 7.2, cette équivalence de catégories possède des conséquences intéressantes : elle permet d'introduire très naturellement l'adjoint à gauche au foncteur θ, et fournit une *résolution canonique* d'un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ par des objets de l'image de ξ. Le début de cette résolution joue d'ailleurs un rôle essentiel dans la démonstration de la proposition 14, dont l'autre ingrédient est le caractère polynomial des objets finis de $\mathcal{F}$. Nous esquissons également les aspects homologiques de cette description monadique de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, suivant [BB69].

Dans une catégorie de foncteurs très proche de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, notée $\mathcal{F}_{\mathbf{Pl},n}$ et introduite au § 6.3.2, cette approche peut être poursuivie. La source de $\mathcal{F}_{\mathbf{Pl},n}$ est constituée des couples (V, u) constitués d'un espace vectoriel de dimension finie V et d'un monomorphisme $u : \mathbb{F}_2^{\oplus n} \hookrightarrow V$, son but est $\mathcal{E}$. Du fait que la grassmannienne $\mathcal{G}r_n(V)$ est le quotient de l'ensemble de ces monomorphismes par l'action libre du groupe GL_n, la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ apparaît comme une catégorie de

« GL_n-modules tordus » dans $\mathcal{F}_{\mathbf{Pl},n}$. Dans la section 7.3, nous établissons, à partir d'une description monadique de $\mathcal{F}_{\mathbf{Pl},n}$ analogue à celle mentionnée pour $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, le résultat suivant.

Proposition 18. *La catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{Pl},n}$ est équivalente à la catégorie des comodules sur $I_{\mathbb{F}_2^{\oplus n}}$. La structure de coalgèbre sur ce foncteur est la structure duale de la structure d'algèbre sur $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus n}}$ obtenue en regardant $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus n}}(V) \simeq \mathbb{F}_2[V^{\oplus n}]$ comme l'algèbre du groupe abélien $V^{\oplus n}$.*

Parmi les conséquences de cette proposition, nous donnons une description de l'adjoint à droite au foncteur θ_n, transitant par son analogue dans la catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{Pl},n}$, lié au produit cotensoriel par le foncteur constant $\mathbb{F}_2$. Ce produit cotensoriel contient manifestement des informations sur la structure algébrique fine des catégories de foncteurs en grassmanniennes.

La catégorie $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r}$

Nous aurons à considérer une dernière catégorie de foncteurs en grassmanniennes, définie de la manière suivante.

Définition 19 (cf. § 6.3.3)**.** Soit $\widetilde{\mathcal{E}}^f_{\mathcal{G}r}$ la catégorie dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$ et dont les morphismes sont donnés par

$$\hom_{\widetilde{\mathcal{E}}^f_{\mathcal{G}r}}((V,W),(V',W')) = \{f \in \hom_{\mathcal{E}^f}(V,V') \,|\, f(W) \subset W'\}.$$

On introduit la catégorie $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r} = \mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{E}}^f_{\mathcal{G}r}, \mathcal{E})$.

Cette catégorie possède une structure assez différente de celle de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, qu'il conviendra d'explorer en détails. Un foncteur important $(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r})^{op} \to \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r}$, qui n'a pas d'analogue dans les autres catégories de foncteurs en grassmanniennes, est la *dualité*, notée D, comme celle de $\mathcal{F}$. Elle est donnée sur les objets par $(DX)(V,W) = X(V^*, W^\perp)^*$. Le résultat qui suit, établi dans le § 8.5.4, est relatif au foncteur $\widetilde{\omega} : \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}$ composé du foncteur d'oubli $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ (foncteur de précomposition par l'inclusion $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}^f_{\mathcal{G}r}$) et du foncteur $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}$.

Proposition 20. *Le foncteur $\widetilde{\omega}$ commute à la dualité.*

Comme $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]$ est l'image par $\widetilde{\omega}$ du foncteur constant $\mathbb{F}_2$ de $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r}$, cette propriété fournit le corollaire suivant.

Corollaire 21. *Le foncteur $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]$ est auto-dual.*

Comme $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]$ est un foncteur en coalgèbres de Boole, cela montre que c'est également un foncteur en algèbres de Boole. Les deux structures sont compatibles : c'est un *foncteur en algèbres de Hopf*.

Nous avons également obtenu, au chapitre 5, d'autres résultats sur la structure du foncteur $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r] \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \overline{\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]}$, dont le rôle fondamental est souligné par le corollaire 12. Nous les résumons maintenant.

Proposition 22.

1. *Le foncteur $\overline{\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]}$ est une extension essentielle du foncteur $\bar{P}$.*
2. *L'anneau d'endomorphismes de $\overline{\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]}$ est isomorphe à un anneau de séries formelles en une indéterminée $\mathbb{F}_2[[\tau]]$.*

La propriété d'annulation cohomologique fondamentale et la conjecture artinienne extrêmement forte

Tous les foncteurs entre les catégories $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}_{surj}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ introduits précédemment préservent les objets localement finis, à la notable exception du foncteur d'intégrale en grassmanniennes ω. C'est ce qui fait la richesse de son comportement et permet de réaliser le lien entre la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$

et la conjecture artinienne. L'isomorphisme (1) (page 18) montre d'ailleurs qu'un foncteur projectif standard P_V de $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\omega(P^{\mathcal{G}r}_{(V,V)})$, et $P^{\mathcal{G}r}_{(V,V)}$ est un objet fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$; la forme la plus forte de la conjecture artinienne que nous présenterons dira que l'on peut retrouver, en un sens précis, tous les objets de type fini de la catégorie $\mathcal{F}$ à partir de l'image par le foncteur ω des objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, c'est-à-dire les $\mathbb{F}_2[\mathcal{G}r]$-comodules finis, par le corollaire 12.

Nous allons voir que l'on peut ramener les calculs de groupes d'extensions dans $\mathcal{F}$ entre l'image par ω de deux objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ à un calcul de groupes d'extensions entre deux objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ (plus gros que ceux dont on est parti, en général). Cela fournit un outil décisif pour manipuler ces foncteurs.

Définition 23. On définit un endofoncteur $\mathcal{I}$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ par

$$\mathcal{I}(X)(V,W) = \bigoplus_{B\in\mathcal{G}r(W)} X(V,B).$$

Ce foncteur commute au foncteur différence, et préserve donc les objets localement finis. On dispose de monomorphismes canoniques $id \hookrightarrow \mathcal{I} \hookrightarrow \iota\circ\omega$; le premier d'entre eux s'interprète comme l'unité d'une adjonction entre les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r}$ (cf. § 6.3.3).

Dans le paragraphe 8.5.2, nous établissons le théorème suivant.

Théorème 24. *Soient F et X deux objets de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, F étant supposé localement fini. Il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\omega(F),\omega(X)) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}}(F,\mathcal{I}(X)).$$

Nous utilisons le plus souvent ce théorème par l'intermédiaire du corollaire suivant, qui s'en déduit formellement à l'aide des diagrammes de recollement reliant $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et les $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.

Corollaire 25. *Soient k et n deux entiers naturels, F un objet localement fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,k}$ et X un objet quelconque de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.*

1. *Si $k<n$, alors* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\omega_k(F),\omega_n(X))=0$.
2. *Si $k=n$, alors le morphisme gradué naturel* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}}(F,X)\to\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\omega_n(F),\omega_n(X))$ *induit par ω_n est un isomorphisme.*

La démonstration du théorème 24 repose, comme tous les résultats analogues antérieurs, sur un argument d'adjonction utilisant le foncteur différence (de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$) — la proposition 14 est donc fondamentale. Cette démonstration justifie à elle seule l'introduction de la catégorie globale $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, car la preuve directe du corollaire 25 s'avère nettement moins aisée qu'en transitant par le théorème 24. On utilise d'ailleurs, dans la démonstration de ce théorème, une catégorie de foncteurs auxiliaire encore plus « grosse » que $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$.

La première partie du corollaire 25 contient un grand nombre de théorèmes d'annulation cohomologique précédemment connus dans la catégorie $\mathcal{F}$. Mentionnons, parmi eux, l'annulation de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(F,\bar{P})$ lorsque F est un foncteur fini, due à Franjou. Ce résultat, qui constitue un cas très particulier du corollaire 25, joue un rôle important dans la détermination de la structure de $\bar{P}^{\otimes 2}$ par Powell ([Pow98a]).

Le corollaire 25 suggère la conjecture suivante, que nous introduisons et discutons au § 8.5.3.

Conjecture 26 (Conjecture artinienne, version extrêmement forte)**.** *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le foncteur ω_n induit une équivalence de catégories entre la sous-catégorie pleine des objets localement finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et le quotient $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$ de la filtration de Krull de $\mathcal{F}$.*

Autrement dit, le foncteur ω_n transforme un objet simple de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ en un objet simple noethérien de type n, on obtient ainsi, modulo les objets noethériens de type $n-1$, tous les objets simples noethériens de type n de $\mathcal{F}$, et le foncteur ω_n est pleinement fidèle dans le quotient.

Cette conjecture implique toutes les formes antérieurement émises de la conjecture artinienne, ainsi que d'autres conjectures très difficiles dans la catégorie $\mathcal{F}$. Parmi ces dernières, mentionnons les deux suivantes :

- si F est un objet de type fini de $\mathcal{F}$, alors $\mathbf{Hom}\,(T^n, F) = 0$ pour n assez grand, où T^n désigne la n-ième puissance tensorielle ;
- pour tout foncteur de type fini F de $\mathcal{F}$, il n'y a qu'un nombre fini d'objets simples S (à isomorphisme près) tels que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}}(S, F) \neq 0$.

L'apport du corollaire 25 à la conjecture 26 s'observe clairement en cherchant à aborder cette conjecture par récurrence sur n : si l'assertion relative à $\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$ est vérifiée, la première partie du corollaire en question montre que l'on a $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(F, \omega_n(X)) = 0$ pour tout objet F de $\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$ et tout objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$; par conséquent, la deuxième partie du corollaire montre que le morphisme canonique $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}}(F, X) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})}(\overline{\omega_n(F)}, \overline{\omega_n(X)})$ est un isomorphisme, où l'on désigne par $\overline{A}$ l'image dans la catégorie quotient $\mathcal{F}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$ d'un objet A de $\mathcal{F}$. Par conséquent, elle réduit la conjecture 26 à l'étape n à l'énoncé suivant.

Conjecture 27. *L'image du foncteur $\overline{\omega_n} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \to \mathcal{F}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$ est stable par quotients.*

Avant d'expliquer les méthodes d'approche de ce problème extrêmement ardu, mentionnons une autre conséquence importante du théorème 24, établie dans le paragraphe 8.5.4.

Théorème 28. *Soient $k, n \in \mathbb{N}$, X un objet localement fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,k}$ et Y un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.*
- *Si $k < n$, alors $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_{inj}}(o_{inj}\omega_k(X), o_{inj}\omega_n(Y)) = 0$.*
- *Si $k = n$, le foncteur exact $o_{inj}\omega_n$ induit un isomorphisme naturel gradué*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}}(X, Y) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_{inj}}(o_{inj}\omega_n(X), o_{inj}\omega_n(Y)).$$

L'autre ingrédient pour démontrer ce résultat est la proposition 20. Pour $n = 0$, la seconde partie du théorème 28 fournit la proposition 6. C'est une autre illustration de la puissance du théorème 24.

Pour compléter les propriétés cohomologiques de la catégorie $\mathcal{F}_{inj}$, signalons le résultat suivant, plus élémentaire, que nous établissons par une méthode directe dans le paragraphe 5.6.1.

Proposition 29. *Soient X un objet localement fini de $\mathcal{F}_{inj}$ et F un objet de $\mathcal{F}$. On a*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_{inj}}(X, o_{inj}(F)) = 0.$$

Par analogie avec la situation que nous avons décrite dans la catégorie $\mathcal{F}$, le théorème 28 et la proposition 29 suggèrent la conjecture suivante.

Conjecture 30 (Conjecture artinienne extrêmement forte dans $\mathcal{F}_{inj}$)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $o_{inj}\omega_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \to \mathcal{F}_{inj}$ induit une équivalence entre les catégories $\mathcal{F}^{lf}_{\mathcal{G}r,n}$ et $\mathcal{K}_{n+1}(\mathcal{F}_{inj})/\mathcal{K}_n(\mathcal{F}_{inj})$.*

Si la conjecture 26 est vérifiée, cet énoncé équivaut au suivant.

Conjecture 31. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur o_{inj} induit une équivalence entre les catégories $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{K}_{n+1}(\mathcal{F}_{inj})/\mathcal{K}_n(\mathcal{F}_{inj})$.*

Le théorème de simplicité généralisé et la conjecture artinienne pour $I^{\otimes 2} \otimes F$, avec F fini

Pour progresser dans l'étude de la conjecture 26, nous aurons besoin des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ de Powell, grâce auxquels il a démontré la conjecture artinienne pour $I_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}$, via son théorème de simplicité (théorème 7). Au chapitre 9, nous en établissons la généralisation suivante. On y désigne par $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ la plus petite sous-catégorie localisante de $\mathcal{F}$ contenant les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$-nilpotents (lesquels forment déjà une sous-catégorie épaisse, d'après [Pow98b]).

Théorème 32 (Théorème de simplicité généralisé)**.** *Le foncteur*

$$\varpi_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \xrightarrow{\omega_n} \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$$

induit une équivalence entre la catégorie des objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et une sous–catégorie épaisse de $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$. En particulier, il envoie un foncteur simple de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ sur un objet simple de $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$.

La démonstration repose sur trois ingrédients principaux. Tout d'abord, des résultats d'annulation cohomologique : la seconde partie du corollaire 25 intervient, mais sa première partie n'est pas adaptée à la situation. Nous avons besoin de la variante suivante de cette première partie.

Proposition 33 (cf. § 9.3)**.** *Pour tout foncteur F de $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ et tout foncteur X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, on a* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(F, \omega_n(X)) = 0$.

Des estimations du foncteur $\tilde{\nabla}_n\,\omega_n$ sont également nécessaires. On établit ainsi (§ 9.4) qu'il existe un épimorphisme naturel $\tilde{\nabla}_n\,\omega_n(X) \twoheadrightarrow \omega_n(X)$, dont le noyau est « plus petit » que $\omega_n(X)$ lorsque le foncteur X est fini. On examine à cet effet le scindement du foncteur $\Delta\omega$ que nous avons mentionné dans le paragraphe de cette introduction relatif aux structures tensorielles.

Le dernier outil que nous employons suit la démarche de Powell pour le théorème 7, tout en présentant des difficultés techniques supplémentaires, dues à ce que le contrôle dont on dipose sur $\tilde{\nabla}_n\,\omega_n(X)$ est beaucoup moins rigide en général que sur l'image par $\tilde{\nabla}_n$ d'un foncteur de Powell (associé à une partition régulière de premier terme n). Il s'agit de l'étape la plus concrète de la démonstration : on considère explicitement l'effet du foncteur $\tilde{\nabla}_n$ sur des éléments des espaces vectoriels $\omega_n(X)(V)$. Fait remarquable, l'itération du foncteur $\tilde{\nabla}_n$ sur un sous-foncteur d'un $\bar{G}(n)$-comodule $\omega_n(X)$ permet de retrouver le plus petit sous-$\bar{G}(n)$-comodule de $\omega_n(X)$ contenant ce sous-foncteur.

Dans le cas où $n = 1$, le théorème 32 démontre une partie de la conjecture 26, puisque $\tilde{\nabla}_1 = \Delta$. En particulier, il permet de retrouver les résultats de [Pow00b] sur le caractère noethérien de type 1 du produit tensoriel entre $\bar{P}$ et un foncteur fini, et les précise en donnant une description de la catégorie de ces foncteurs modulo les foncteurs (localement) finis. En revanche, il semble particulièrement difficile d'établir que *tous* les foncteurs simples noethériens de type 1 de $\mathcal{F}$ sont isomorphes, modulo les foncteurs finis, à un $\bar{P}$-comodule fidèle.

Nous donnons, au paragraphe 5.6.3, une description partielle analogue des objets noethériens de type 1 de la catégorie $\mathcal{F}_{inj}$ (cf. conjecture 30) : nous montrons que le foncteur d'oubli $o_{inj} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{inj}$ induit un foncteur pleinement fidèle de la sous-catégorie des objets finis de $\mathcal{F}$ sur une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$ (quotient par la sous-catégorie épaisse des foncteurs localement finis). Le principe de la démonstration est le même que celui du théorème 32, mais sa mise en œuvre est très nettement simplifiée par le maniement aisé du foncteur décalage, qui joue le même rôle que le foncteur $\tilde{\nabla}_n$. Il semble d'ailleurs probable qu'existe un analogue du théorème 32 lié à la description conjecturale de toute la filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{F}_{inj}$.

Le théorème de simplicité généralisé ramène toute la difficulté de la conjecture artinienne à un problème de compréhension des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$-nilpotents — la conjecture 26 est équivalente aux égalités $\mathcal{K}_n(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_{n+1}}$, grâce à ce théorème. Powell a décrit dans [Pow98a] les foncteurs de type fini annihilés par $\tilde{\nabla}_2$, ce qui lui a permis d'établir le caractère noethérien de type 2 de $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}$. En utilisant ce résultat sur $\tilde{\nabla}_2$, nous démontrons au chapitre 9 la généralisation suivante du théorème 9.

Théorème 34. *Pour tout foncteur fini F de $\mathcal{F}$, le foncteur $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}} \otimes F$ est noethérien de type* 2.

Il s'agit du meilleur résultat connu sur la conjecture artinienne à ce jour.

Groupes de Grothendieck

Les difficultés pour étudier les foncteurs de type fini annihilés par $\tilde{\nabla}_3$ s'avèrent considérables. En effet, dans le cas de $\tilde{\nabla}_2$, Powell s'est appuyé sur le fait que les seuls foncteurs simples annulés par $\tilde{\nabla}_2$ sont les puissances extérieures, et qu'il existe « peu » d'extensions entre deux puissances extérieures, que l'on sait de plus décrire très explicitement. De tels calculs sont exclus pour les foncteurs simples annulés par $\tilde{\nabla}_3$. L'étude directe des quotients $\tilde{\nabla}_3$-nilpotents d'un foncteur de type fini, par exemple $\bar{G}(3)$ (pour prendre l'exemple intéressant le plus simple) est théoriquement possible dans la mesure où il en existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un plus grand quotient annihilé par $(\tilde{\nabla}_3)^n$ (cf. [Pow98b]), donné par le conoyau d'une flèche explicite. Malheureusement, l'étude directe de ce conoyau pose également des problèmes de nature combinatoire très délicats. On peut cependant espérer que l'usage du foncteur ω, en rigidifiant nombre de calculs dans la catégorie $\mathcal{F}$, aidera à mieux comprendre les quotients de cette filtration par $\tilde{\nabla}_3$-nilpotence.

Quelle que soit l'approche employée, les obstacles qu'il reste à surmonter pour établir la conjecture artinienne extrêmement forte, dont tous les travaux sur la catégorie $\mathcal{F}$ suggèrent la véracité, relèvent du *contrôle qualitatif **global** des représentations modulaires des groupes symétriques ou linéaires.* Précisément, la différence homologique majeure entre la catégorie $\mathcal{F}$ et la catégorie des *foncteurs polynomiaux stricts*, plus directement reliée aux représentations (cf. [FS97]), réside dans l'existence d'extensions non scindées entre foncteurs de différents degrés. De fait, les extensions non scindées entre foncteurs de degrés consécutifs apparaît comme une règle « générique » dans les foncteurs de type fini, selon les travaux de Piriou et Schwartz comparant les filtrations polynomiale et par les socles itérés dans un foncteur de co-type fini, i.e. dual d'un foncteur de type fini (cf. [PS02b] et [PS02a]). Qu'il s'agisse de l'approche de Powell à l'aide des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$, de l'approche de Piriou à l'aide de calculs d'algèbre homologique, ou de notre approche du théorème 9 utilisant $\mathbf{Hom}(\Lambda^1,\cdot)$ ou $(\cdot:\Lambda^1)$ (cf. [Dja06c]), les avancées sur la conjecture artinienne ont nécessité des renseignements précis sur le comportement de facteurs de composition dans les foncteurs étudiés. Seule notre méthode pour établir le caractère noethérien de type 1 du produit tensoriel entre $\bar{P}$ et un foncteur fini à l'aide du théorème 32 semble échapper à cette remarque, mais dès lors que l'on cherche à la généraliser en utilisant ce théorème pour $n>1$, les problèmes de théorie des représentations réapparaissent via les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$. Il en est ainsi de la démonstration du théorème 34.

En termes de groupes de Grothendieck, on peut préciser comme suit certaines des questions que nous venons de soulever. Notons $\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ le groupe abélien $\mathbb{Z}^{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ désigne l'ensemble des partitions régulières, qui indexe les objets simples de $\mathcal{F}$, et $G_0^{tf}(\mathcal{F})$ le groupe de Grothendieck des objets de type fini de $\mathcal{F}$. Le groupe de Grothendieck $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r})$ a été introduit dans la proposition 15, où il a été décrit : il « contient » (en deux copies, l'une venant de $\mathcal{F}$, l'autre de $\mathcal{F}_{surj}$) toutes les représentations simples des différents groupes linéaires (ou symétriques). Le foncteur exact ω induit un morphisme de groupes abéliens $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r})\to G_0^{tf}(\mathcal{F})$, qui devient un morphisme d'anneaux si l'on munit le groupe source de la multiplication induite par le produit tensoriel *total* (on notera d'ailleurs que le comportement de celui-ci en termes de représentations est nettement plus délicat que le produit tensoriel usuel de $\mathcal{F}$, qui relève de la règle de Littlewood-Richardson). Pour considérer des facteurs de composition de foncteurs du type $\omega(X)$, on est amené à composer ce morphisme par le morphisme canonique $G_0^{tf}(\mathcal{F})\to\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ obtenu en associant à un foncteur de type fini ses facteurs de composition. La flèche $\omega_*:G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r})\to\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ qu'on en déduit constitue un objet d'étude important ; les problèmes globaux de représentations modulaires que nous avons évoqués se ramènent à cette étude. Par exemple, la méthode développée dans [Dja06c] s'appuie fortement sur quelques propriétés très particulières de ce morphisme.

Théorème 35. *Le morphisme $\omega_*:G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r})\to\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ est injectif.*

Ce théorème, qui fait l'objet de la section 10.1, utilise à la fois un outil global spécifique à la catégorie $\mathcal{F}$, les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$, et des propriétés non triviales des représentations des groupes linéaires, utilisant la représentation de Steinberg. Son rôle fondamental devrait d'ailleurs pouvoir encore être exploité pour poursuivre l'étude de ce morphisme.

Le théorème 35 montre en particulier que le morphisme $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r})\to G_0^{tf}(\mathcal{F})$ induit par ω est injectif. Comme la conjecture artinienne extrêmement forte implique que ce morphisme est surjectif, elle entraîne que c'est un *isomorphisme*, i.e. donne une description « explicite » de l'anneau de Grothendieck $G_0^{tf}(\mathcal{F})$. On voit aussi grâce au théorème 35 que la conjecture 26 implique l'injectivité du morphisme canonique $G_0^{tf}(\mathcal{F})\to\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$, résultat totalement hors d'atteinte même en admettant la conjecture artinienne très forte 8. Ces observations illustrent à la fois la puissance considérable de la conjecture artinienne extrêmement forte et la nature des difficultés qu'il faudra vraisemblablement surmonter pour la démontrer.