Espace BU, opérations de Adams et espaces $F\Psi^q$

Hélène Pérennou

3 mars 2017

1 K-théorie complexe et espace BU

1.1 K-theorie complexe

Soit $X \neq \emptyset$ un espace topologique compact. On note $\mathcal{E}(X)$ la catégorie des fibrés vectoriels complexes au dessus de X.

Définition 1.1. On note $K(X)$ le groupe de Grothendieck associé à la catégorie $\mathcal{E}(X)$.

Exemple 1.1. $K(*) = \mathbb{Z}$

La projection de X sur un point P induit un monomorphisme

$$0 \to \mathbb{Z} \to K(X)$$

Définition 1.2. On appelle K-théorie réduite de X le conoyau de l'application précédente. On le note $\tilde{K}(X)$.

1.2 L'espace BU

On note $G_n(\mathbb{C}^k)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension n de $\mathbb{C}^k$

Lemme 1.2.1. *$BU(n) := \varinjlim_k G_n(\mathbb{C}^k)$ est l'espace classifiant du groupe unitaire $U(n)$.*

Définition 1.3. On considère le système inductif d'espaces topologiques

$$BU(1) \to \dots BU(n) \to \dots$$

où l'application $BU(n) \to BU(n+1)$ est induite par l'application $G_n(\mathbb{C}^N) \to G_{n+1}(\mathbb{C}^{N+1})$ qui consiste à ajouter le sous-espace engendré par le dernier vecteur $e_{N+1} = (0, \dots, 1) \in \mathbb{C}^{N+1}$. On pose $BU = \varinjlim BU(n)$.

Théorème 1.2.2. *Pour tout espace compact X, on a les isomorphismes naturels (en X) :*

$$\tilde{K}(X) \simeq [X, BU]$$

$$K(X) \simeq [X, \mathbb{Z} \times BU]$$

1.3 Théorème de Périodicité de Bott

Théorème 1.3.1. *Soit X un espace compact, l'homomorphisme $\beta : \tilde{K}(X) \to \tilde{K}(S^2X) \simeq \tilde{K}(S^2) \otimes \tilde{K}(X)$, $a \mapsto a.(H-1)$ est un isomorphisme, où H est la classe sur fibré tautologique du $S^2 = \mathbb{C}P^1$.*

Corollaire 1.3.2. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$,*

$$\tilde{K}(S^{2i+1}) \cong 0$$

$$\tilde{K}(S^{2i}) \cong \mathbb{Z}$$

Remarque 1.1. *En fait, $K(S^2) \cong \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$.*

2 Opérations de Adams

2.1 λ-anneaux

Définition 2.1. Un λ-anneau est un anneau R muni d'applications $\lambda^n : R \to R$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifiant les propriétés suivantes : $\forall x, y \in R$

1. $\lambda^0(x) = 1$;
2. $\lambda^1(x) = x$;
3. $\lambda^n(x+y) = \sum_{r=0}^{n} \lambda^r(x)\lambda^{n-r}(y)$;

Remarque 2.1. $\lambda^i(0) = 0$ *pour* $i > 0$.

Si t est une indéterminée, pour $x \in R$, on définit :

$$\lambda_t(x) = \sum_n \lambda^n(x)$$

On a alors :

$$\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x)\lambda_t(y)$$

Exemples 2.1. — *$\mathbb{Z}$ avec $\lambda_t(1) = 1+t$. On a alors $\forall m \in \mathbb{N}$, $\lambda(m)^n = \binom{m}{n}$.*
— *$K(X)$ avec $\lambda^i[E] = [\Lambda^i E]$ (Λ^i i-ème puissance extérieure).*

2.2 Opérations de Adams sur un λ-anneau

Définition 2.2. Soit R un λ-anneau. On définit sur R :

$$\psi_t(x) = \sum_{i \geq 1} \psi^k(x)t^k$$

par la relation :

$$\psi_{-t}(x) = -t((d/dt)\lambda_t(x))/\lambda_t(x)$$

Les applications $\psi^k : R \to R$ sont appelées opérations de Adams dans R.

Proposition 2.2.1. — *Les ψ^k sont additives.*

— *Si u est un morphisme de λ-anneaux, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in R$,*

$$\psi^k(u(x)) = u(\psi^k(x))$$

— *Si $\lambda^i(x) = 0$ pour $i > 1$, alors $\psi^k(x) = x^k$;*

Exemple 2.1. *Soit $x \in R$,*
— $\psi^1(x) = x$;
— $\psi^2(x) = x^2 - 2\lambda^2(x)$;
— $\psi^3(x) = x^3 + 3\lambda^3(x) - 3x\lambda^2(x)$.

2.3 Opérations de Adams en K-théorie (complexe)

Pour $R = K(X)$ on a le résultat suivant :

Théorème 2.3.1. *Pour tout $x, y \in K(X)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

1. *$f^*(\psi^k(x)) = \psi^k(f^*(x))$, pour tout $f : X \to Y$ (naturalité) ;*
2. *$\psi^k(x + y) = \psi^k(x) + \psi^k(y)$;*
3. *$\psi^k(x) = x^k$, pour x classe de fibré en droite ;*
4. *$\psi^k(x.y) = \psi^k(x).\psi^k(y)$;*
5. *$\psi^k(\psi^l(x)) = \psi^{kl}(x)$;*
6. *Si $x \in \tilde{K}(S^{2n})$, alors $\psi^k(x) = k^n.x$*

De plus, les opérations de Adams sur $K(X)$ sont uniquement déterminées par ces propriétés.

Remarque 2.2. *Les opérations en K-théorie sont déterminées par leurs valeurs sur les classes fibrés en droites.*

3 Les espaces $F\Psi^q$

On fixe $q \in \mathbb{N}^*$ et on note $I = [0, 1]$.

Lemme 3.0.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$[BU^n, BU] = \{\textit{transf. nat. } \tilde{K}^n \to \tilde{K}\}$$

Définition 3.1. Soit $\sigma : BU \to BU$ représentant l'opération de Adams ψ^q. On définit l'espace $F\Psi^q$ comme le produit fibré des applications $(id, \sigma) : BU \to BU \times BU$ et $\Delta : BU^I \to BU \times BU$, $p \mapsto (p(0), p(1))$:

$$\begin{tikzcd}
F\Psi^q \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\phi"'] & BU \arrow[d, "\Delta"] \\
BU \arrow[r, "{(id,\sigma)}"'] & BU \times BU
\end{tikzcd}$$

Lemme 3.0.3. *L'espace $F\Psi^q$ est homotopiquement équivalent à la fibre homotopique de l'application $d(id, \sigma) : BU \to BU$ représentant l'opération $1 - \psi^q$, où $d : BU \times BU \to BU$ représente l'opération différence sur $\tilde{K}$.*

Lemme 3.0.4. *Si $[X, U] = 0$ avec $U = \Omega BU$, $\phi^* : [X, F\Psi^q] \overset{\sim}{\to} [X, BU]^{\psi^q}$ où $[X, BU]^{\psi^q} \subset [X, BU]$ est le sous-espace stable par σ*

Lemme 3.0.5. *L'espace $F\Psi^q$ est simple et ses groupes d'homotopies sont :*

$$\pi_{2i}(F\Psi^q) = 0$$

$$\pi_{2i+1}(F\Psi^q) = \mathbb{Z}/(q^i - 1)\mathbb{Z}$$

Références

[1] John Frank Adams and John Frank Adams. *Stable homotopy and generalised homology*. University of Chicago press, 1995.

[2] Allen Hatcher. Algebraic topology. 2002. *Cambridge UP, Cambridge*, 606(9), 2002.

[3] Allen Hatcher. Vector bundles and k-theory. *Im Internet unter http ://www. math. cornell. edu/˜ hatcher*, 2003.

[4] Dale Husemoller. *Fibre bundles*, volume 5. Springer, 1966.

[5] Max Karoubi. *K-theory : An introduction*, volume 226. Springer Science & Business Media, 2008.

[6] Daniel Quillen. On the cohomology and k-theory of the general linear groups over a finite field. *Annals of Mathematics*, pages 552–586, 1972.