Corrigé examen 2015 (attention aux possibles coquilles)

Exo 1) 1) Si $f(y_0) = 0$, alors la fonction constante $y(t) = y_0$ est sol de
$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$
Or $f \in C^1$, on peut appliquer Cauchy - Lipschitz et en déduire que $y(t) = y_0$ est l'unique sol. Par conséquent : $\boxed{y(t) = y_0,\ \forall t \in \mathbb{R}}$

2) a) Or $f \in C^1$, on a donc $y \in C^1$ (et aussi $y \in C^2$).
Ainsi la condition $y(0) = y_0$ implique : $y'(0) = f(y(0)) > 0$ et f est donc strict. croissante dans un voisinage de 0.
On remarque aussi que f est bornée et d'après un théorème de cours ceci implique que y est globale

Si on suppose par l'absurde que : $\exists t^* \in \mathbb{R}$ tq $y'(t^*) = 0$, on obtient : $0 = y'(t^*) = f(y(t^*)) \Rightarrow f(y_*) = 0$, où $y_* \overset{\text{déf}}{=} y(t^*)$.
D'après 1), ceci implique que $y(t) = y_*$, $\forall t \in \mathbb{R}$. En particulier $y(0) = y_*$ et donc $f(y_0) = f(y(0)) = f(y_*) = 0$ ceci qui est une contradiction. Par conséquent : $y'(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et donc y est strict croissante.

b) i) Or $A \neq \emptyset$ et $f \in C^1$, $\exists \bar{z} > y_0$ tq : $\inf A = \bar{z}$,
$\forall t \in [y_0, \bar{z}[$, $f(t) > 0$ et $f(\bar{z}) = 0$. (∗1)

D'après 2), on a que y est strictement croissante. De plus, le même argument montre que $y(t) < \bar{z}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
Ainsi y est majorée et croissante et il existe donc sa limite :
$$\exists\, \ell = \lim_{t \to +\infty} y(t) \quad \text{et } y_0 \leq \ell \leq \bar{z}. \quad (*2)$$
L'éq : $y' = f(y)$ implique que : $\exists\, \tilde{\ell} = \lim_{t \to +\infty} y'(t)$ et donc $\tilde{\ell} = 0$. En utilisant encore une fois l'éq : $y' = f(y)$, on en déduit que : $0 = \lim_{t \to \infty} f(y(t))$ et donc $0 = f(\ell)$.
Alors (∗1) et (∗2) impliquent que : $\ell = \bar{z}$. Par conséquent :
$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} y(t) = \inf A}$$

ii) Si $A = \emptyset$, alors $f(z) > 0, \forall z \geq y_0$. (∗3)

On a que y est strictement monotone. Il suffit donc montrer que y est non-majorée pour conclure que : $\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$.

Par l'absurde, on suppose que : $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $y(t) \leq M, \forall t \geq 0$.

Ainsi, $\exists \ell := \lim_{t \to +\infty} y(t)$ et le même argument de la partie i).

montre que $0 = f(\ell)$, avec $y_0 \leq \ell \leq M$, ce qui contredit (∗3).

3) a) On pose $A = \{ z > \frac{\pi}{2} : f(z) = 0 \}$. Alors $\inf A = \pi$.

Or $f(y_0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$, la partie b)-i emplique que :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} y(t) = \pi}$$

b) D'après 2), on a que $-\pi < y(t) < \pi$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$y' = \sin y \iff \frac{y'}{\sin y} = 1 \iff \frac{d}{dt} \ln\left(\left|\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)\right|\right) = 1 \quad \Big/ \int_0^t$$

$$\underset{\substack{\Downarrow \\ -\frac{\pi}{2} < \frac{y(t)}{2} < \frac{\pi}{2}}}{\Longrightarrow} \ln\left(\tan\left(\frac{y(t)}{2}\right)\right) - \underbrace{\ln\Big(\underbrace{\tan\left(\pi/4\right)}_{1}\Big)}_{=0} = t \implies \boxed{y(t) = 2\arctan\left(e^t\right)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Exo 4 / 1) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$: Eq hom.

on pose $y = x^m$. alors: $m(m-1)x^m - 3mx^m + 4x^m = 0$

$\Rightarrow m(m-1) - 3m + 4 = 0 \Rightarrow m^2 - m - 3m + 4 = 0$

$m^2 - 2m + 4 = 0$

$\Rightarrow \boxed{m = 2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{y_1 = x^2 \text{ est sol de l'éq hom.}}$

2) D'après la formule de reduction d'ordre d'Abel: $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4y}{x^2} = 0$

$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p} = y_1 \int \frac{1}{x^4} \cdot e^{+\int 3/x} = x^2 \cdot \int \frac{1}{x^4} e^{+3\ln x}$

$p = -\frac{3}{x}$

$= x^2 \cdot \int \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \boxed{y_2 = x^2 \ln x}$ (pour $x > 0$)

$\Rightarrow \boxed{y_H = \alpha x^2 + \beta x^2 \ln x}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3) $y_p = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W} + y_2 \int \frac{y_1 f}{W}$, où $f = \frac{x^3}{x^2} = x$ et

$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \ln x \\ 2x & 2x\ln x + x \end{vmatrix} = x^3$

$\Rightarrow y_p = -x^2 \int \frac{\cancel{x^2} \ln x \cdot \cancel{x}}{\cancel{x^3}} + x^2 \ln x \cdot \int \frac{x^2}{x^3} \cdot x = -x^2 [x\ln x - x] + x^2 \ln x \cdot x$

$\Rightarrow y_p = -x^3 \cancel{\ln} x + x^3 \cancel{\ln} x + x^3 \Rightarrow \boxed{y_p = x^3}$

4x) $\Rightarrow \boxed{y = \alpha x^2 + \beta x^2 \ln x + x^3}$

4) $y' = 2\alpha x + 2\beta x \ln x + \beta x + 3x^2$

$\Rightarrow y(1) = 1, y'(1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 1 = 1 & \Rightarrow \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3 = 1 & \Rightarrow \beta = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{y = -2x^2 \ln x + x^3}$

Remarque : Pour la question 2), on peut aussi obtenir y_2 en faisant:

$$y_2(x) = \lambda(x)\, y_1(x) = \lambda(x) x^2.$$

On remplace y_2 dans l'éq homogène et on obtient une équa. diff pour $\lambda(x)$.

En effet :

On a $y_1 = x^2$. On pose $y_2 = \lambda y_1$, or $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

$$\Rightarrow x^2(\lambda'' y_1 + 2\lambda' y_1' + \cancel{\lambda y_1''}) - 3x(\lambda' y_1 + \cancel{\lambda y_1'}) + 4\cancel{\lambda y_1} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda'' x^2 y_1 + x^2 2\lambda' y_1' - 3x\lambda' y_1 = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{\lambda'' x^4} - 3x^3 \cancel{\lambda'} = 0 \Rightarrow \cancel{\lambda''} - \frac{3}{x}\lambda' = 0 \quad \cancel{/} \quad e^{-3\int \frac{1}{x}} = e^{-3\ln|x|} = \frac{1}{|x|^3}.$$

$$\Rightarrow \cancel{\left(\frac{\lambda'}{|x|^3}\right)' = 0} \Rightarrow \cancel{\lambda' = c|x|^3}$$

$$\Rightarrow \lambda'' \cdot x^4 + \lambda'(-3x^3 + 4x^3) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda'' + \frac{1}{x}\lambda' = 0 \quad / \quad e^{\int \frac{1}{x}} = \cancel{\ln|x|}\ |x|$$

$$\Rightarrow (\lambda'|x|)' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda' = \frac{c}{|x|}}$$

Exo 2) 1) Soit $w(t) = 1 + \int_0^t a(s)\, x(s)\, ds$. Alors :

$$w' = a(t)x(t) \leq a(t)\, w(t) \quad \text{(par hypothèse. } x(t) \leq w(t))$$

$$\Rightarrow \quad w' - aw \leq 0 \quad \Big| \cdot e^{-\int_0^t a(s)\, ds}$$

$$\Rightarrow \quad \left(w e^{-\int_0^t a}\right)' \leq 0 \quad \Big| \int_0^t$$

$$\Rightarrow \quad w(t)\, e^{-\int_0^t a(s)\, ds} - w(0)\, e^0 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad w(t) \leq \underbrace{w(0)}_{=1}\, e^{\int_0^t a(s)\, ds}$$

Or $x(t) \leq w(t)$, on obtient donc : $\boxed{x(t) \leq e^{\int_0^t a(s)\, ds}}$

2) a) Or $G'(t) = A(t)\, G(t)$, on obtient d'après le thm fondamental de l'analyse :

$$\boxed{G(t) - G(0) = \int_0^t G'(s)\, ds = \int_0^t A(s)\, G(s)\, ds}$$

b) Ainsi :

$$\| G(t) \| = \| \underbrace{G(0)}_{= Id} + \int_0^t A(s)\, G(s)\, ds \| \leq \| Id \| + \int_0^t \| A(s) \| \cdot \| G(s) \|\, ds.$$

En posant $C = \| Id \| > 0$ et $x(t) = \| G(t) \| / C$, on obtient :

$$x(t) \leq 1 + \int_0^t a(s)\, x(s), \quad \text{où} \quad a(s) = \| A(s) \|.$$

D'après 1), on a que : $x(t) \leq e^{\int_0^t a(s)\, ds} \leq e^{\int_0^\infty a(s)\, ds} < \infty$ car $\int_0^\infty a(s) < \infty$.

Ainsi $\boxed{\sup_{t \in [0, +\infty[} \| G(t) \| = C \sup_{t \in [0, +\infty[} \| x(t) \| < +\infty}$

c) D'après le thm fondamental de l'analyse :

$$G(t) - G(s) = \int_s^t G'(\sigma)\, d\sigma = \int_s^t A(\sigma)\, G(\sigma)\, d\sigma$$

et donc $\| G(t) - G(s) \| \leq \underbrace{\sup_{\sigma \in [0, +\infty[} \| G(\sigma) \|}_{< +\infty \text{ d'après b)}} \cdot \left| \int_s^t \| A(\sigma) \|\, d\sigma \right|, \forall t, s \geq 0.$

Or $\int_0^\infty \| A(\sigma) \|\, d\sigma < \infty$, on a donc que $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0$ tel que

$\left| \int_s^t \| A(\sigma) \|\, d\sigma \right| < \varepsilon, \forall t, s \geq R$. Ainsi $\| G(t) - G(s) \| \leq \varepsilon, \forall t, s \geq R$.

En particulier, si on prend une suite $t_n \nearrow +\infty$, ceci implique que $\{G(t_n)\}$ est de Cauchy et donc $\exists M = \lim_{n \to \infty} G(t_n)$.

Bien entendu, si on prend une autre suite $s_n \nearrow +\infty$, on a que:

$$\| G(t_n) - G(s_n) \| \leq \sup_{[0,+\infty[} \|G\| \left| \int_{t_n}^{s_n} \|A(\sigma)\| d\sigma \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et donc $G(s_n) \to M$. Par conséquent $\boxed{\lim_{t \to +\infty} G(t) = M}$

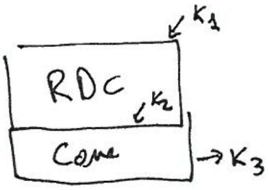
Les solutions de l'équation sont de la forme:

$$X(t) = G(t) X_0 \quad , \quad X_0 \in \mathbb{R}^n \quad (\text{la cond. initiale})$$

et donc les solutions convergent vers :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} X(t) = M \cdot X_0}$$

Exo 3 | 1)



$T_{ext} = 5$

$x =$ temp RDC
$y =$ " cave.

2) $Z' = A \cdot Z$, ~~Ana~~ $x' = 2(5-x) + (y-x) = -3x + y + 10$

$y' = 1(x-y) + 2(5-y) = x - 3y + 10$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda + 3 = \pm 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -4}$$

$\vec{v_1}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1, b = 1 \Rightarrow \boxed{\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\vec{v_2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1, b = -1,$ $\boxed{\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

3) $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Z = e^{At} \cdot Z_0 + e^{At} \cdot \int_0^t e^{-As} B(s)\,ds \quad , \text{où } B(s) = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$Z = e^{At} \cdot Z_0 + e^{At}\left(\int_0^t e^{-As}\right)\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

or $-(A^{-1} \cdot e^{-As})' = e^{-As}$

$\Rightarrow \int e^{-As} = -A^{-1} e^{-As} = -e^{-As} \cdot A^{-1}$

$$= e^{At} \cdot Z_0 + e^{At} \cdot \cancel{A} \left[1 - e^{-At}\right] A^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Z = e^{At} \cdot Z_0 + \cancel{A}\,(e^{At} - I) A^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}}$$

On calcule $$e^{At} = P e^{Dt} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2t} & \\ & e^{-4t} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t} + e^{-4t} & e^{-2t} - e^{-4t} \\ e^{-2t} - e^{-4t} & e^{-2t} + e^{-4t} \end{bmatrix}}$$

La sol particulier est : $Z_p = e^{At} \cdot \int_0^t e^{-As} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t} + e^{-4t} & e^{-2t} - e^{-4t} \\ e^{-2t} - e^{-4t} & e^{-2t} + e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t e^{-2s} \pm e^{-4s} = \frac{e^{-2s}}{-2} \pm \frac{e^{-4s}}{-4}\Bigg|_0^t = \frac{e^{-2t}}{-2} \pm \frac{e^{-4t}}{-4} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}$$

Ainsi : $Z = e^{At} \cdot Z_0 + e^{At} \cdot A^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{Z = \underbrace{e^{At} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\text{sol hom.}} - \underbrace{A^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}}_{\text{sol part.}}}$$

ou encore : $Z = \alpha e^{-2t} \vec{v_1} + \beta e^{-4t} \vec{v_2} + Z_p$.

on calcule : $A^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{10}{8} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Z_p = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{Z = \alpha e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}} \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

4) Si $Z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$, alors : $\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha + \beta = 15 \\ \alpha - \beta = 15 \end{matrix}$

$\Rightarrow \alpha = 15$ et $\beta = 0$

$$\Rightarrow \boxed{Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 e^{-2t} + 5 \\ 15 e^{-2t} + 5 \end{pmatrix}}$$

5) $\begin{cases} x' = K_1(5 - x) + K_2(y - x) + \cancel{2}0 \\ y' = K_2(\cancel{x} - y) + K_3(5 - y). \end{cases}$

Exo 5 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow 1 - \lambda = \pm 2$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \ , \ \lambda_2 = 3$

1) v_1 : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$

v_2 : $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta e^{+3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (sol générale)

En $t=0$: $x_0 = \alpha + \beta \quad \cdot 2 \Rightarrow 2x_0 = 2\alpha + 2\beta$ $\Big\} \Rightarrow 2x_0 + y_0 = 4\beta$

$y_0 = -2\alpha + 2\beta \qquad\qquad 2x_0 - y_0 = 4\alpha$

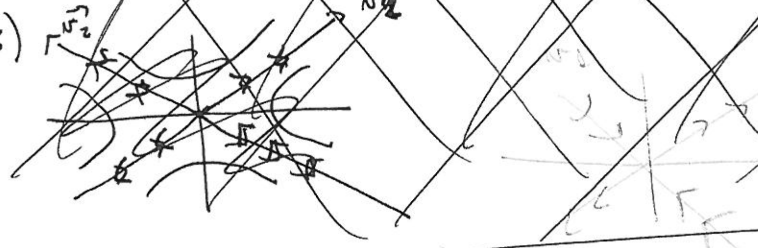
$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{x_0}{2} - \frac{y_0}{4} \ , \ \beta = \frac{x_0}{2} + \frac{y_0}{4}}$ et donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{x_0}{2} - \frac{y_0}{4}\right) e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left(\frac{x_0}{2} + \frac{y_0}{4}\right) e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rmq : On peut aussi dire que : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, où $e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{3t}}{2} & \frac{e^{3t}}{4} - \frac{e^{-t}}{4} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{3t}}{2} \end{pmatrix}$

~~3) La courbe est une droite si~~ $\exists \tilde{\alpha} \neq 0$ tq. ~~$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \tilde{\alpha} \vec{v_1}$ ou $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \tilde{\alpha} \vec{v_2}$.~~

~~4) Il s'agit d'un point selle, alors $(x,y) \to (0,0)$ ssi $\exists \tilde{\alpha} \neq 0$ tq $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \tilde{\alpha} \vec{v_1}$.~~

~~5)~~



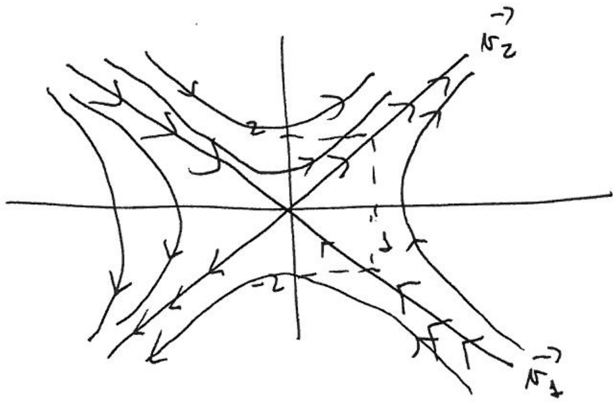
Conclusion : $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{x_0}{2} - \frac{y_0}{4}\right) e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left(\frac{x_0}{2} + \frac{y_0}{4}\right) e^{+3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ (*)

3) D'après (*), la courbe est une droite si $\frac{x_0}{2} - \frac{y_0}{4} = 0$ ou $\frac{x_0}{2} + \frac{y_0}{4} = 0$,

c-à-d : $\boxed{x_0 = \frac{y_0}{2}}$ ou $\boxed{x_0 = -\frac{y_0}{2}}$

4) D'après (x), $\|x, y\| \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ ssi $\beta = 0$ ssi $\frac{x_0}{2} + \frac{y_0}{4} = 0$ ssi $\boxed{x_0 = -\frac{y_0}{2}}$.

5)



C'est un point selle ou col.

Corrigé

Exo 1) $y' = (P_0 - y)(f + \sigma y)$.

a) $y_p = P_0$ est une sol.

on pose $y = P_0 + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -\frac{z'}{z^2} \Rightarrow \frac{-z'}{z^2} = -\frac{1}{z} \cdot \left(f + \sigma\left(P_0 + \frac{1}{z}\right)\right)$

$$\Rightarrow +\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{z} \quad \frac{zf + \sigma P_0 z + \sigma}{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{z' = z(f + \sigma P_0) + \sigma}$$

ou encore : $\boxed{z' - (f + \sigma P_0) z = \sigma}$

b) $z' - (f + \sigma P_0) z = \sigma \quad / \quad e^{-\int_0^t (f + \sigma P_0)}$

$$\Rightarrow \left(z\, e^{-\int_0^t (f+\sigma P_0)}\right)' = \sigma\, e^{-\int_0^t (f + \sigma P_0)}$$

$$\Rightarrow z(t)\, e^{-\int_0^t f + \sigma P_0} - z_0 = \int_0^t \sigma(s)\, e^{-\int_0^s (f + \sigma P_0)} ds.$$

$$\Rightarrow \boxed{z(t) = e^{\int_0^t f + \sigma P_0} \left[z_0 + \int_0^t \sigma(s)\, e^{-\int_0^s (f + \sigma P_0)} \right] , \; z_0 \in \mathbb{R}}$$

c) $$z(t) = e^{\int_0^t at + btP_0} \left[z_0 + \int_0^t b\cancel{s}\, e^{-\int_0^s a\cancel{t} + b\cancel{t}P_0} \right]$$

$$= e^{a\frac{t^2}{2} + bP_0\frac{t^2}{2}} \left[z_0 + b \underbrace{\int_0^t \cancel{s} \cdot e^{-s^2/2(a + bP_0)}}_{\left. -\frac{e^{-s^2/2(a+bP_0)}}{a+bP_0} \right|_0^t} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{z(t) = C\, e^{\frac{at^2}{2} + bP_0 t^2/2} - \frac{b}{a + bP_0}}$$

et donc $\boxed{y = P_0 + \frac{1}{C\, e^{\frac{at^2}{2} + bP_0 t^2/2} - \frac{b}{a+bP_0}}}$ Sol générale.

Si $y(0) = 0$, alors : $0 = P_0 + \frac{1}{C - \frac{b}{a+bP_0}} \Rightarrow -\frac{1}{P_0} = C - \frac{b}{a+bP_0}$

$$\Rightarrow C = \frac{b}{a+bP_0} - \frac{1}{P_0} = \frac{-a}{a+bP_0} \Rightarrow \boxed{y(t) = P_0 - \frac{a + bP_0}{a\, e^{t^2/2(a+bP_0)} + b}}$$

$\Rightarrow \boxed{y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} P_0}$ c-à-d tous les acheteurs potentiels achètent le téléphone.