Corrigé Examen 2014/2015

Exo 1 1.1. a) Par l'absurde, on suppose que $\exists x_0 \in \Omega$ t.q. $u(x_0) > M$.

Ainsi $\Omega^* = \{x \in \Omega \,;\, u(x) > M\}$ est non vide.

Or $u \in C(\bar{\Omega})$, on a donc que Ω^* est un ouvert borné.

De plus, si $x \in \partial\Omega^*$, alors $u(x) = M$.

Ainsi : $\begin{cases} -\Delta u + cu \leq 0 & \text{dans } \Omega^* \\ u = M & \text{sur } \partial\Omega^* \end{cases}$ (car $f(u(x)) \leq 0$ si $u(x) > M$)

D'après le principe du maximum faible ($c \geq 0$) :

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega^*} u^+ = M \quad \text{et donc} \quad u(x) \leq M, \forall x \in \Omega^*,$$

ce qui contredit la définition de Ω^*. Par conséquent $\Omega^* = \emptyset$, et donc $u(x) \leq M$, $\forall x \in \Omega$.

1.2. b) Soit $v = M - u$. D'après 1.1. a), on a que $v \geq 0$.

De plus : $-\Delta v = \Delta u = cu - f(u) = c(M - v) - f(M - v)$

$$\Rightarrow \boxed{-\Delta v + cv = c \cdot M - f(M - v), \text{ dans } \Omega} \quad (\#1)$$

Par l'absurde on suppose que $\exists x_0 \in \Omega$ tq $u(x_0) = M$, alors :

$v(x_0) = 0$ et donc x_0 est un minimum de v.

Cas $f(M) < 0$: Par continuité de f et v, il existe $R > 0$ t.q.

$$f(M - v(x)) < 0 \text{ dans } B(x_0, R). \quad (\#2)$$

D'après (#1), on a : $-\Delta v + cv \geq 0$ dans $B(x_0, R)$ (car $c \cdot M \geq 0$)

$$\text{et } v(x_0) = \min_{\bar{B}(x_0,R)} v = 0.$$

Par le principe du max fort, on obtient que $v \equiv 0$ dans $\overline{B(x_0, R)}$

Soit $R^* = \sup\{R > 0 : (\#2) \text{ est vérifié et } B(x_0, R) \subset \Omega\}$, l'argument précédent montre que $v \equiv 0$ dans $\bar{B}(x_0, R^*)$. Si $\partial B(x_0, R) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ on a que $v = 0$ sur un point de $\partial\Omega$, qui contredit que $v = M$ sur $\partial\Omega$ (car $v = M - u$)

Si $\partial B(x_0,R)\cap\partial\Omega=\phi$, il existe $x_1\in\partial B(x_0,R)\cap\Omega$ t.q $f(M-v(x_1))=0$

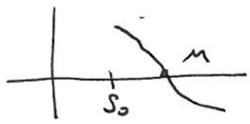
or $v(x_1)=0$, on a donc $f(M-v(x_1))=f(M)<0$ (contradiction).

Cas $f(M)=0$

· Si $\exists\,\tilde{M}\in\,]0,M[$ tq $f(\tilde{M})\le 0,\ \forall s\ge\tilde{M}$, on obtient d'après (a) :

$$u\le\tilde{M} \text{ dans } \Omega \text{ et donc } u<M.$$

· Sinon, $\exists\, s_0\in[0,M[$ tq $f(s)>0,\ \forall s\in[s_0,M[$



Supposons qu'il existe $x_0\in\Omega$ tq $v(x_0)=0$,

ie, $u(x_0)=M$. Or $u\le M$ et $u=0$ sur $\partial\Omega$, par continuité

$\exists\, r>0$ tq $s_0<u\le M$ dans $B(x_0,r)$ et $\exists\, p\in\partial B(x_0,r)$ tq $u(p)<M$.

On veut utiliser le principe du max dans $B(x_0,r)$:

$$-\Delta v+cv\ge -f(M-v) \text{ dans } \Omega.$$

De plus $f(M)-f(M-v(x))=f'(c(x))\,v(x)$ (*3), où $c(x)\in\,]v(x),M[$ si $v(x)<M$ (thm des accroissements finis)

Si $x\in B(x_0,r)$, alors $f(M-v(x))>f(M)$ si $v(x)\ne M$ et donc $f'(c(x))\le 0$. (d'après (*3)).

On pose $\tilde{C}(x)=\begin{cases} f'(c(x)) & \text{si } v(x)\ne M\\ 0 & \text{si } v(x)=M\end{cases}$ pour $x\in B(x_0,r)$. Ainsi $\tilde{c}(x)\le 0$ dans $B(x_0,r)$

Par conséquent :
$$-\Delta v+(c-\tilde{c})v\ge 0 \text{ dans } B(x_0,r)$$
$$v\ge 0 \text{ dans } B(x_0,r).$$

Or $v(x_0)=0$, le principe du max fort implique $v\equiv 0$ sur $\overline{B(x_0,r)}$, ce qui contredit que $\exists\, p\in\partial B(x_0,r)$ tq $v(p)>M$.

Ainsi, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ et $u \geq 0$. Si $\exists x_0 \in \Omega$ tq $u(x_0) = 0$, il existe $r > 0$ tq $f(u(x)) > 0$ dans $B(x_0, r)$ (car $f(0) > 0$). Ainsi $-\Delta u + cu \geq 0$ et le p. max fort implique $u \equiv 0$ sur $B(x_0, r)$ mais 0 n'est vérifié par l'équation car $f(0) > 0$.

D'après le thm des sous et sur sol, il existe un sol v minimal et w maximale, avec $0 \leq v \leq u \leq w \leq \underset{\text{dans } \bar{\Omega}}{M}$ et. $0 < v \leq u \leq w < M$ dans Ω.

b) Soient u_1, u_2 deux sol. Alors, en posant $w = u_1 - u_2$

$$-\Delta w + cw = f(u_1) - f(u_2).$$

Soit $$\tilde{c}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2} & \text{si } u_1(x) \neq u_2(x) \\ 0 & u_1(x) = u_2(x) \end{cases}$$

Si $u_1(x) > u_2(x)$, alors $\tilde{c}(x) \leq 0$

Si $u_1(x) < u_2(x) \Rightarrow f(u_1(x)) \geq f(u_2(x_2)) \Rightarrow \tilde{c}(x) \leq 0$.

Ainsi $c(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$ et $c \in L^\infty$. En effet : si $u_1(x) \neq u_2(x)$

$$\left| \frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2} \right| = |f'(c(x))| \leq \sup_{[0,M]} |f'|$$

Par conséquent,

$$-\Delta w + cw = \tilde{c} w, \ \Omega \Rightarrow \begin{cases} -\Delta w + (c - \tilde{c}) w = 0, & \Omega \\ w = 0 & ; \partial\Omega. \end{cases}$$

Or $c - \tilde{c} \geq 0$, le principe du max implique que $w \geq 0$ dans Ω, et que $w \leq 0$, c-à-d $w \equiv 0$ dans Ω, i.e. $\boxed{u_1 \equiv u_2}$.

c) 

On a : $\begin{cases} -\Delta w_2 + c w_2 = f(w_2), & \Omega_2 \\ w_2 = 0 & , \partial\Omega_2 \end{cases}$, $0 < w_2 < M$ sur Ω_2

$(P_{\Omega_1}) \begin{cases} -\Delta w_1 + c w_1 = f(w_1), & \Omega_1 \\ w_1 = 0 & , \partial\Omega_1 \end{cases}$, $0 < w_1 < M$ sur Ω_1

En particulier $\begin{cases} -\Delta w_2 + c w_2 = f(w_2), & \Omega_1 \\ w_2 \geq 0 & , \Omega_1 \end{cases}$ et donc w_2 est une sur sol de l'éq (P_{Ω_1}). Or w_1 est une sous-solutions, et le thm des sur et sous sol. implique qu'il existe une sol maximale de (P_{Ω_1}) qu'on note $\tilde{w}_1$ tq : $w_1 \leq \tilde{w}_1 \leq w_2$ dans Ω_1 et donc $0 \leq \tilde{w}_1 \leq M$ dans Ω_1. D'après un résultat du cours, ceci implique que $\tilde{w}_1 \leq w_1$ dans Ω_1, car w_1 est maximale et donc $w_1 = \tilde{w}_1$. Par conséquent $\boxed{w_1 \leq w_2 \text{ dans } \Omega_1}$

1.2) Soient $\underline{u} = 0$, $\bar{u} = M$. On vérifie que :

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} + c\,\underline{u} = 0 < f(0), & \Omega \\ \underline{u} \leq 0, & \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow \underline{u} \in H^1 \cap L^\infty \text{ est une sous-sol.}$$

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} + c\bar{u} = cM \geq 0 \geq f(M), & \Omega \\ \bar{u} = M \geq 0, & \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow \bar{u} \in H^1 \cap L^\infty \text{ est une sur-sol.}$$

D'après le thm des sur et sous solutions, il existe $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty$ sol de $\begin{cases} -\Delta u + cu = f(u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}$ (car f est C^1) et $0 \leq u \leq M$

De plus $f(u) \in L^\infty$ et $f(u) \in H^1$, avec $\frac{\partial}{\partial x_i}(f(u)) = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}$

En effet, soit $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$, alors : $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega f(u_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega f'(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi.$$

Or $\operatorname{supp}\varphi \overset{=K}{}$ est compacte, il suffit de prendre $u_n = \rho_n * u \to u$ dans $H^1_{loc}(\Omega)$ et donc $\|u_n\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty}$.

Aussi $\left|f(u_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \leq \sup_{s\in[-A,A]}|f(s)|\cdot\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \in L^1(K)$, $A = \|u\|_{L^\infty}$

$|f'(u_n)|\,|\varphi| \leq \sup_{s\in[-A,A]}|f'(s)|\cdot|\varphi| \in L^2(K)$,

d'après TCD, $f(u_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \to f(u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ dans L^1 et $f'(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi \to f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi$ dans L^1 (car $u_n \to u$ ponctuellement et dans L^2).

Par conséquent, $\begin{cases} -\Delta u + cu = f(u) \\ u = 0 \end{cases}$, $f(u) \in L^\infty \Rightarrow u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in]1, +\infty[$

En particulier, en prenant $p > N$, on obtient que $\nabla u \in W^{1,p} \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$, c-à-d, $\boxed{u \in C^1(\bar\Omega)}$. Ainsi $f(u) \in C^1(\bar\Omega)$ et donc $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$, $\forall p \in [1, +\infty]$.

D'après le thm de régularité, ceci implique que $u \in W^{3,p}(\Omega)$, $\forall p \in]1, +\infty[$. En particulier, pour $3p > N$: $W^{3,p}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\bar\Omega)$ et donc $\boxed{u \in C^2(\bar\Omega)}$

On pouvait aussi dériver l'éq : $v = \frac{\partial u}{\partial x_i} \Rightarrow -\Delta v + cv = -\frac{\partial c}{\partial x_i} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p$

$\Rightarrow v \in W^{3,p}_{loc} \Rightarrow u \in W^{3,p}_{loc} \Rightarrow u \in C^2(\Omega)$

1.3) a) C'est le même argument que ce donné en 1.2. a), sauf que $u \notin L^\infty(\bar\Omega)$. ~~Cependant, $u \in H^1(\Omega)$, f borné, $f \in C^1$, alors~~ ~~et $f \in W^{1,\infty}$~~

~~$\Rightarrow f(u) \in H^1 \Rightarrow u \in W^{3,p}\ u \in H^3 \Rightarrow \Delta u \in L^2$~~

~~$\Rightarrow$ on l'égalité $-\Delta u + cu = \lambda f(u)$ p.p.~~

Or $f \in L^\infty$, on a donc $-\Delta u + c u \in L^\infty \Rightarrow u \in W^{2,p}$, $\forall p \in]1,\infty[$

$\Rightarrow u \in C^1(\bar\Omega)$ et donc $u \in C^2(\Omega)$.

b) Soit $\lambda_n \to 0$, $m_n = \max\limits_{\Omega} u_n$

i) $$\left|\frac{f(u_n)}{m_n}\right| \underset{\downarrow}{=} \left|\frac{f(u_n(x))}{|u_n(x_n)|}\right| = \frac{|f(u_n(x)) - f(0)|}{|u_n(x_n)|} \underset{\downarrow}{=} |f'(c_n(x))| \cdot \underbrace{\left|\frac{u_n(x)}{u_n(x_n)}\right|}_{\le 1}$$

$\exists x_n \in \Omega$ tq $m_n = u_n(x_n)$ T.A.F.

où $|c_n(x)| \le |u_n(x)| \le M$

$$\Rightarrow \left\|\frac{f(u_n)}{m_n}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \le L, \quad L = \sup_{s \in [0,M]} |f'(s)|$$

ii) Soit $v_n = \dfrac{u_n}{m_n}$. Alors : $\begin{cases} -\Delta v_n + c v_n = \lambda \dfrac{f(u_n)}{m_n} \in L^\infty \\ v_n = 0 \end{cases}$

D'après le thm de régularité, $\|v_n\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C \|\lambda_n \cdot L\|_{L^p(\Omega)}$
$\le \tilde C \lambda_n$.

En particulier, $v_n \in W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$ si $p > N$
et $\|v_n\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \lambda_n \to 0 \Rightarrow v_n \to 0$ dans $L^\infty(\Omega)$

Or $v_n(x_n) = \dfrac{u_n(x_n)}{m_n} = 1$, on a donc une contradiction.

Conclusion : $\exists \bar\lambda > 0$ tq $\forall \lambda \in]0, \bar\lambda]$: il n'y a pas de sol de (P_λ).

c) Soit $v = \varepsilon \phi_1$, alors : $-\Delta v + c v = \lambda_1 \varepsilon \phi$.
On veut que $\lambda_1 \varepsilon \phi \le \lambda f(v) \Leftrightarrow \lambda_1 \varepsilon \phi_1 \le \lambda f(\varepsilon \phi_1)$ $(\phi_1 > 0$ ds $\Omega)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\lambda_1}{\lambda} \le \dfrac{f(\varepsilon\phi_1)}{\varepsilon \phi_1}$ dans Ω

Si $\varepsilon \searrow 0$: $\dfrac{\lambda_1}{\lambda} \le f'(0) \Rightarrow \boxed{\lambda \ge \dfrac{\lambda_1}{f'(0)}}$ $\to$ c'est une condition nécessaire.

Soit $\lambda_0 = \dfrac{\lambda_1}{f'(0)}$.

On remarque que :

$$\frac{f(\varepsilon\phi_1)}{\varepsilon\phi_1} = \frac{f(\varepsilon\phi_1) - f(0)}{\varepsilon\phi_1 - 0} = f'(c_\varepsilon(x)) \quad , \ 0 < c(x) < \varepsilon\phi_1$$

si $x \in \Omega$, $1 \geq \phi_1 > 0$ dans Ω.

Ainsi $0 < c(x) < \varepsilon$ ~~et par continuité de f'~~

~~il existe $\varepsilon_0 > 0$ tq $f'(s)$, $\forall s \in [0, \varepsilon_0]$~~

Il faut montrer que $\dfrac{\lambda_1}{\lambda} \leq f'(c(x))$ si $\lambda > \lambda_0$

$$\iff \frac{\lambda_1}{f'(c(x))} \leq \lambda$$

En effet : $\lambda > \lambda_0 = \dfrac{\lambda_1}{f'(0)}$. Soit $L = \lambda - \lambda_0 > 0$

Or $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f'(c(x)) = f'(0)$ uniformément en x, ~~$\exists \tilde{\varepsilon} > 0$ tq~~

$\Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\lambda_1}{f'(c_\varepsilon(x))} = \dfrac{\lambda_1}{f'(0)} = \lambda_0$ et en particulier, $\exists \varepsilon_0 > 0$ tq

$$\frac{\lambda_1}{f'(c_\varepsilon(x))} \leq \underbrace{\lambda_0 + L}_{=\lambda} \quad , \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

Ainsi, $\dfrac{\lambda_1}{f'(c_\varepsilon(x))} \leq \lambda$ et donc : $\begin{cases} -\Delta v + cv \leq f(v) , & \Omega \\ v = 0 , & \partial\Omega \end{cases}$ si $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$.

d) $\bar{u} = M$ est une sur solution : $\begin{cases} -\Delta \bar{u} + c\bar{u} = cM > \lambda f(M) \\ \bar{u} = M \geq 0 \end{cases}$

D'après le thm des sous et sur sol, $\exists u_\lambda \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ sol de (P_λ).
De plus $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ et $0 < \varepsilon\phi_1 \leq u_\lambda \leq M$, si $\lambda > \lambda_0$

~~Si $\exists x_0 \in \Omega$ tq $u(x_0) = 0$, or $-\Delta u + cu \geq \lambda f(u) \geq 0$, le principe du max fort implique que $u \equiv 0$, mais $u \equiv 0$ n'est pas sol car $f(s) > 0$ si~~

Finalement, on pose $\lambda^* = \inf\{\lambda > 0 : (P_\lambda) \text{ admet une sol}\}$
On a que: $\lambda^* \leq \lambda_0$. D'après la question b), on a que $\lambda^* \geq \bar{\lambda} > 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda^* > 0}$

Soit $\lambda > \lambda^*$, alors il existe une suite $\lambda_n \to \lambda$ tq (u_{λ_n}) est sol de (P_{λ_n}). En particulier $\exists\, \tilde{\lambda}$ tq $\lambda^* < \tilde{\lambda} < \lambda$ et $u_{\tilde{\lambda}}$ est sol de $P_{\tilde{\lambda}}$. Ainsi :

$$\begin{cases} -\Delta u_{\tilde{\lambda}} + c\, u_{\tilde{\lambda}} = \tilde{\lambda} f(u_{\tilde{\lambda}}) < \lambda f(u_{\tilde{\lambda}}) \ , \Omega \\ u_{\tilde{\lambda}} = 0 \ , \ \partial\Omega \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{u}_\lambda$ est une sous-sol de (P_λ). Or $\bar{u} = M$ est une sur sol

$\Rightarrow$ $\exists\, u_\lambda$ sol de (P_λ). (avec $u_\lambda > 0$).

Par définition, si $\lambda < \lambda^*$, alors (P_λ) n'admet pas de solution.