Corrigé

1.2) a) Soit $B_R = B(x_0,R)$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, alors $u \in H^2(B_R)\cap L^\infty(B_R)$

et donc $u\cdot u \in H^1(B_R)\cap L^\infty(B_R)$ et $f(u) \equiv (\alpha-|x|^2)u - u^2 \in H^1\cap L^\infty$.

D'après le thm de régularité H^2_{loc}, $u\in H^3(B_{R-1})$ et donc $f(u)\in H^2(B_R)\cap L^\infty(B_R)$

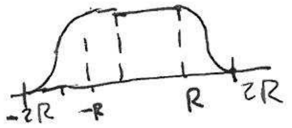
En utilisant encore le thm de régularité, $u\in H^4(B_{R-2})$.

Par récurrence, on obtient que $\forall K\in\mathbb{N}$, $u\in H^K(B_1)$ (en prenant R assez grand). D'après le thm de Morrey, $u\in C^\infty(\overline{B_1})$.

Or $x_0\in\mathbb{R}^N$ est arbitraire, on a donc $u\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

b) D'après 1.1.d), $0\le u(x)\le Le^{-|x|}$.

c) $$-\Delta u = \overbrace{(\alpha-|x|^2)u - u^2}^{f(u)} \qquad \Big|\cdot u\eta_R^2$$



$$\Rightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\,\nabla(u\eta_R^2)}_{\parallel} = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\cdot u\eta_R^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\eta_R^2 + 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\,\nabla\eta_R\cdot\eta_R u = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\,u\eta_R^2$$

$\eta_R = \begin{cases}1, & B_R(0)\\ 0, & B_{2R}^c\end{cases}$

$1\ge\eta_R\ge0$, $\eta_R\in C_0^\infty(B_{2R})$

On voit que $|f(u)|\le (|\alpha|+|x|^2)\cdot u + uLe^{-x}\le Cu$.

D'autre part: $\left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\,\nabla\eta_R\,\eta_R u\right| \le \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\eta_R^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\eta_R|^2u^2$

et donc ($\varepsilon=1/4$) :

$$\frac12\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\eta_R^2 \le \int_{\mathbb{R}^N} C\cdot u + \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\eta_R|^2u^2$$

$$\le \|\nabla\eta_R\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\cdot\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} L^2e^{-2|x|}}_{<+\infty} + c\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} Le^{-|x|}}_{<+\infty}$$

Pour étudier $\|\nabla\eta_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, il faut contrôler la dépendence en R. Soit $\eta\in C_0^\infty(B(0,2))$ tq $\eta=1$ sur $B(0,1)$ et $1\ge\eta\ge0$

, on prend $\eta_R(x)=\eta\left(\frac{|x|}{R}\right)$. Ainsi $\eta_R = \begin{cases}1, & B_R\\ 0, & B_{2R}^c\end{cases}$

et $\nabla\eta_R(x) = \frac1R\nabla\eta\left(\frac{|x|}{R}\right) \Rightarrow \|\nabla\eta_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla\eta_R\|_{L^\infty(B_{2R})}$

$$= \frac1R\|\nabla\eta\|_{L^\infty(B_1)}$$

d) $\underline{\alpha \leq 0} \Rightarrow \quad -\Delta u \leq 0 \quad | \cdot u_n$, où $u_n \to u$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_n \leq 0$$

Or : $\nabla u_n \to \nabla u$ dans L^2, on peut passer à la limite : $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \leq 0$

$\Rightarrow u = cte$ et donc $u \equiv 0$ car $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$

Une autre façon : $\overset{\checkmark}{L e^{-r_\varepsilon} = \varepsilon}$

Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists r_\varepsilon$ tq $0 \leq u(x) \leq \varepsilon$, $\forall x \in B_{r_\varepsilon}$ car $0 \leq u(x) \leq L e^{-|x|}$

Ainsi $\begin{cases} -\Delta u \leq 0, & B_r \\ u \leq \varepsilon, & \partial B_r \end{cases}$ et donc le principe du max faible implique :

$\max_{\overline{B_r}} u(x) = \max_{\partial B_r} u$ et donc $\boxed{u(x) \leq \varepsilon, x \in B_r}$

Si $|x| \geq r_\varepsilon$, $0 \leq u(x) \leq \underbrace{L e^{-r_\varepsilon}}_{= \varepsilon}$ et donc : $\boxed{0 \leq u(x) \leq \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^N}$,

En passant à la limite, $\varepsilon \to 0$: $\boxed{u \equiv 0}$.

(e) $\bar{u} \equiv \alpha$

(f) Soient ϕ sol de (P_α).

$$-\Delta \phi := (\alpha - |x|^2)\phi - \phi^2 \leq (\beta - |x|^2)\phi - \phi^2$$

$\Rightarrow \phi$ est sur sol. de (P_α).

(g) Soit $w = \phi_{R_1}$, $\phi_R > 0$, $\|\phi_R\|_{L^\infty} = 1$ sol $\begin{cases} \Delta \phi_R = \lambda_R \phi_R, & B_R \\ \phi_R = 0, & \partial B_R, \end{cases}$

ϕ_R, λ_R = fonction et valeur propre principale de $-\Delta$.

Ainsi $\phi_R = \phi_1\left(\frac{x}{R}\right)$ et $\lambda_R = \frac{\lambda_1}{R^2}$

On calcule :
$$\begin{aligned} -\Delta w - (\alpha - |x|^2) w + w^2 &= \lambda_R \phi_R - (\alpha - |x|^2)\phi_R + \phi_R^2 \\ &\leq \lambda_R \phi_R - \alpha \phi_R + R^2 \phi_R + \phi_R^2 \\ &\leq \phi_R \left[\frac{\lambda_1}{R^2} + R^2 - \alpha + 1 \right] \\ &\leq 0 \text{ si } \alpha \geq 1 + R^2 + \frac{\lambda_1}{R^2} \end{aligned}$$

Si $R = 1$, il suffit de prendre $\boxed{\alpha^* = 2 + \lambda_1}$

g) (suite) Soit $\tilde{w} = \begin{cases} w \,, & B_1 \\ 0 \,, & \sim \end{cases} = \begin{cases} \varepsilon \phi_1 \,, & B_1 \\ 0 \,, & \partial B_1 \\ 0 \,, & B_1^c \end{cases} = \varepsilon \tilde{\phi}_1 \,, \quad \tilde{\phi}_1 = \begin{cases} \phi_1 \,, & B_1 \\ 0 \,, & B_1^c \end{cases}$

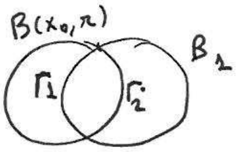
Ainsi, $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \nu} < 0$ sur ∂B_1 (lemme de Hopf).

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \bar{B}(x_0, r)$, $\varphi \geq 0$.

Si $B(x_0,r) \subset B_1$, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \tilde{\phi}_1 \nabla \varphi = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\phi}_1 \varphi$.

Si $B(x_0,r) \subset B_1^c$, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \tilde{\phi}_1 \nabla \varphi = 0 = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\phi}_1 \varphi$

Si $\partial\left(B(x_0,r) \cap B_1\right) = \underbrace{\partial B_1 \cap B(x_0,r)}_{\Gamma_1} \cup \underbrace{\partial B(x_0,r) \cap B_1}_{\Gamma_2}$, alors :



$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \tilde{\phi}_1 \nabla \varphi = \int_{B(x_0,r)\cap B_1} \nabla \tilde{\phi}_1 \nabla \varphi = \underbrace{-\int_{B(x_0,r)\cap B_1} \Delta \tilde{\phi}_1 \varphi}_{= \int_{B(x_0,r)\cap B_1} \lambda_1 \tilde{\phi}_1 \varphi} + \underbrace{\int_{\Gamma_1} \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \nu} \varphi}_{\leq 0 \text{ car } \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \nu} < 0 \text{ sur } \Gamma_1} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \nu} \varphi}_{= 0,\ \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_2}$$

Ainsi : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \tilde{\phi}_1 \nabla \varphi \leq \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_1 \tilde{\phi}_1 \varphi$,

ie $\boxed{-\Delta \tilde{\phi}_1 \leq \lambda_1 \tilde{\phi}_1 \text{ sur } \mathbb{R}^N}$

Alors le calcul pour w montre que : $\tilde{w} = \varepsilon \tilde{\phi}_1$ vérifie :

$$\boxed{-\Delta \tilde{w} - (\alpha - |x|^2)\tilde{w} + \tilde{w}^2 \leq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N, \text{ si } \alpha \geq \alpha^* = 2 + \lambda_1}$$

$0 \leq \tilde{w}$ sur $\mathbb{R}^N$, $\tilde{w} \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$

h) D'après (e) et (h), on obtient que pour $R \geq 1$

$\overline{u}_R = \alpha \in H^1(B_R) \cap L^\infty(B_R)$ et

$\underline{u}_R = \tilde{w} \in H^1_0(B_R) \cap L^\infty(B_R)$ sont sur et sous solutions de :

$$(P_R) \begin{cases} -\Delta u = (\alpha - |x|^2)u - u^2 & , B_R \\ u = 0 & , \partial B_R \end{cases} ,$$

si $\alpha \geq \alpha^*$. Or $f(x,s) = (\alpha - |x|^2)s - s^2$ est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, le théorème des sur et sous sol. implique : $\exists\, u_R \in H^1_0(B_R) \cap L^\infty$, sol de (P_r). De plus $\tilde{w} \leq u_R \leq \alpha$ sur B_r.

i) De plus, on peut supposer que u_R est la solution minimale du théorème. On veut maintenant comparer u_R et u_{R+1}.

On a que u_{R+1} vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta u_{R+1} = (\alpha - |x|^2)\, u_{R+1} - u_{R+1}^2 & , \\ u_{R+1} \geq 0 & , \partial B_R \quad (\text{en fait } u_{R+1} > 0 \text{ sur } \partial B_R) \end{cases}$$

$$\tilde{w} \leq u_{R+1} \leq \alpha .$$

Ainsi, u_{R+1} est une sur sol de (P_R). D'après le théorème des sous et sur sol, on a que $\exists\, \tilde{u}_R \in H^1_0(B_R) \cap L^\infty$ sol de (P_R), qu'on prend minimale, telle que :

$$\tilde{w} \leq \tilde{u}_R \leq u_{R+1} \quad \text{sur } B_R$$

et donc $\tilde{w} \leq \tilde{u}_R \leq \alpha$. D'après la proposition énoncé après le thm des sous et sur solutions, on en déduit que $\tilde{u}_R = u_R$.

Par conséquent $\tilde{w} \leq u_R \leq u_{R+1} \leq \alpha \quad , \forall R \geq 1$

et donc $(u_R)_{R \geq 1}$ est une suite bornée monotone croissante, et donc $\exists\, u(x) = \lim_{R \to \infty} u_R(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^N$.

De plus, $\tilde{w} \leq u(x) \leq \alpha$, sur $\mathbb{R}^N \Rightarrow \varepsilon \phi_1(x) \leq u(x)$

$\Rightarrow u > 0$ sur $B_1 \Rightarrow \boxed{u \not\equiv 0}$

Soit $l > 1$. Or u_R est sol. de (P_R), on a l'estimation H^2_{loc} :

$$\|u_R\|_{H^2(B(0,l))} \leq C_l \|f(x,u_R)\|_{L^2(B(0,2l))}, \forall R > 2l$$
$$\leq C_l(\alpha, l) \quad \text{car} \quad |u_R| \leq \alpha, \ |x|^2 \leq 4l^2.$$

Ainsi, d'après le théorème de Rellich-Kondrakov, on peut extraire une sous-suite telle que : $\exists \tilde{u} \in H^2(B(0,l))$:

$$u_{R_m} \rightharpoonup \tilde{u} \text{ dans } H^2(B(0,l))$$
$$u_{R_m} \to \tilde{u} \text{ dans } H^1(B(0,l)) \quad , m \to +\infty$$
$$u_{R_m} \to \tilde{u} \quad p.p. \quad B(0,l)$$

Or $u_R(x) \to u(x)$ p.p, on a donc $u = \tilde{u}$ et de plus, on en déduit que toute la suite converge, i.e $u_R \to u$ dans $H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.
Ceci permet de passer à la limite : soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_R \nabla \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_R)\varphi$$
$$\downarrow$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\varphi$$

(on a utilisé le T. C. D., écrire les détails)
Or $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, on obtient donc : $\boxed{-\Delta u = f(x,u), \ p.p \text{ sur } \mathbb{R}^N}$

Il nous reste à montrer que $u > 0$ sur $\mathbb{R}^N$. Sinon, $\exists x_0 \in \mathbb{R}^N$ tq $u(x_0) = 0$. De plus : $-\Delta u = f(x,u)$

$$\Leftrightarrow -\Delta u + c(x)u = \alpha u \geq 0 \quad , \text{où } c(x) = |x|^2 u + u^2 \geq 0,$$

D'après (a) et (b), on obtient que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.
Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$, alors $-\Delta u + c(x)u \geq$ dans $B(x_0, m)$ et d'après le principe du maximum fort, $u \equiv 0$ sur $B(x_0,m)$, $\forall m > 0$.
Par conséquent, $u \equiv 0$, ce qui contredit que $u > 0$ sur $B(0,1)$.

j) On a montré que $A_\alpha \equiv \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \exists u > 0$ sol de $(P_\alpha)\}$ est non vide.
D'après (f), on en déduit que A_α est un intervalle de la forme $[\bar{\alpha}, +\infty[$ ou bien $]\bar{\alpha}, +\infty[$, où $\bar{\alpha} > 2 + \lambda_1$. (d'après (d) et (g))

k)
$$-\Delta \phi_R + |x|^2 \phi_R = \lambda_R \phi_R \quad / \cdot \phi_{R'}$$
$$-\Delta \phi_{R'} + |x|^2 \phi_{R'} = \lambda_{R'} \phi_{R'} \quad / \cdot \phi_R$$
$$\Rightarrow -\phi_{R'} \Delta \phi_R + \phi_R \Delta \phi_{R'} = (\lambda_R - \lambda_{R'}) \phi_{R'} \phi_R \quad / \int_{B_R} \qquad B_R \subset B_{R'}$$
$$\Rightarrow \cancel{\int_{B_R} \nabla \phi_{R'} \nabla \phi_R} - \int_{\partial B_R} \frac{\partial \phi_R}{\partial \nu} \cdot \phi_{R'} - \cancel{\int_{B_R} \nabla \phi_R \nabla \phi_{R'}} + \int_{\partial B_R} \underbrace{\cancel{\phi_R}}_{0} \cdot \frac{\partial \phi_{R'}}{\partial \nu} = (\lambda_R - \lambda_{R'}) \int_{B_R} \phi_{R'} \phi_R$$

$\phi_R = 0$ sur ∂B_R

$$\Rightarrow \lambda_R - \lambda_{R'} = \frac{-\int_{\partial B_R} \frac{\partial \phi_R}{\partial \nu} \phi_{R'}}{\int_{B_R} \phi_{R'} \phi_R} > 0$$ car d'après le lemme de Hopf $\frac{\partial \phi_R}{\partial \nu} < 0$ sur ∂B_R

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_R > \lambda_{R'}}$$

l) La suite $(\lambda_R)_{R>0}$ est décroissante et $\lambda_R \geq 0$. D'après le théorème des suites monotones :
$$\exists \mu = \lim_{R \to +\infty} \lambda_R \quad \text{et } \mu \geq 0.$$

On a : $-\Delta \phi + |x|^2 \phi = \mu \phi$

On calcule : $-\Delta \phi + \phi = \phi - |x|^2 \phi + \mu \phi = \phi (1 + \mu - |x|^2) \leq 0$ si $|x|^2 \geq 1 + \mu$.

Or $0 \leq \phi \leq 1$ bornée, $\exists A > 0$ tel que
$$0 < \phi \leq A e^{-|x|}, \ \forall |x| \geq \sqrt{1+\mu}. \quad \text{(d'après 1.1.d)}$$

<u>Rmq</u>: On peut montrer que $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{loc}$ de la même manière que dans les parties précédentes.

iii) $-\Delta\phi + |x|^2\phi = \mu\phi \quad / \cdot\phi$

$$\Rightarrow \int_{B_R} |\nabla\phi|^2 - \int_{\partial B_R} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\cdot\phi + \int_{B_R}|x|^2\phi^2 = \mu\int_{B_R}\phi^2$$

Or: $\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|\cdot|\phi| \le |\nabla\phi|\cdot|\vec{n}|\cdot|\phi| \le A\, e^{-|x|}$, on a donc:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\partial B_R}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\phi\right| \le A\int_{|x|=R} e^{-|x|} = Ae^{-R}\cdot\left|\{|x|=R\}\right| \to 0$$

De plus, $\mathbb{1}_{B_R}\cdot|\nabla\phi|^2(x) \le A^2 e^{-2|x|} \in L^1(\mathbb{R}^N)$

$0\le \mathbb{1}_{B_R}|x|^2\cdot\phi(x) \le |x|^2 A\, e^{-2|x|} \in L^1(\mathbb{R}^N)$

$0 \le \mathbb{1}_{B_R}\phi^2 \le A^2 e^{-|x|}\in L^1(\mathbb{R}^N)$

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi|^2 + \int_{\mathbb{R}^N}|x|^2\phi^2 = \mu\int_{\mathbb{R}^N}\phi^2$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi|^2 + \int_{\mathbb{R}^N}|x|^2\phi^2}{\int_{\mathbb{R}^N}\phi^2} > 0.$$

iv) $-\Delta(\varepsilon\phi) - (\alpha-|x|^2)\varepsilon\phi + \varepsilon^2\phi = \varepsilon\mu\phi - \varepsilon\cancel{|x|^2}\phi - \alpha\varepsilon\phi + \cancel{|x|^2}\varepsilon\phi + \varepsilon^2\phi$

$= \varepsilon\phi[\mu-\alpha+\varepsilon\phi]$

$\le \varepsilon[\mu-\alpha+\varepsilon] \le 0$

$0\le\phi\le 1$ si $\varepsilon\le\alpha-\mu$.

v) On a:

$\phi\Delta u - u\Delta\phi = -\phi(\alpha-\cancel{|x|^2})u + \phi u^2 + u\mu\phi - \cancel{u|x|^2\phi}$

$= -\alpha\phi u + \phi u^2 + \mu u\phi$

$= (\mu-\alpha)\phi u + \phi u^2 \quad / \int_{B_R}$

$$-\cancel{\int_{B_R}\nabla\phi\nabla u} + \int_{\partial B_R}\phi\frac{\partial u}{\partial\nu} + \cancel{\int_{B_R}\nabla u\nabla\phi} - \int_{\partial B_R}u\frac{\partial\phi}{\partial\nu} = (\mu-\alpha)\int_{B_R}\phi u + \int_{B_R}\phi u^2.$$

Comme précédemment, d'après T.C.D., on fait $R\to+\infty$ et donc :

$$\boxed{\alpha-\mu = \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\phi u^2}{\int_{\mathbb{R}^N}\phi u} > 0} \text{ si } u\not\equiv 0 \qquad \left(\Rightarrow \boxed{\alpha>\mu}\right)$$

p) On reprend l'argument donné en (i).

Soit $\alpha > \mu$, on prend $\bar{u} = \alpha+1$, qui est une sur-solution.

et $\underline{u} = \varepsilon\phi$, qui est une sous-solution.

Ainsi $\underline{u} = \varepsilon\phi \leq \varepsilon \leq 1 \leq \alpha+1 = \bar{u}$. dans $\mathbb{R}^N$,

En particulier, d'après le thm des sous et sur solutions : $\exists\, u_R \in H_0^1(B_R)$, telle que

$$(P_R)\begin{cases} -\Delta u_R = (\alpha - |x|^2)u_R - u_R^2 & , B_R \\ u_R = 0 & , \partial B_R. \end{cases}$$

De plus, on peut prendre u_R la sol. minimale du théorème et :

$$0 < \varepsilon\phi \leq u_R \leq \alpha+1 \quad \text{dans } B_R.$$

On remarque que
$$\begin{cases} -\Delta u_{R+1} = (\alpha - |x|^2)u_{R+1} - u_{R+1}^2 & , B_R \\ u_{R+1} \geq 0 & , \partial B_R \end{cases} \quad (\text{car } u_{R+1} > 0 \text{ dans } B_{R+1})$$

et donc u_{R+1} est une sur solution de P_R.

Ainsi, d'après le thm des sous et sur solutions, $\exists\, \tilde{u}_R \in H_0^1(B_R)$ t.q. $\tilde{u}_R$ est sol de (P_R). De plus $\tilde{u}_R$ on le prend minimale et :

$$\underline{u} = \varepsilon\phi \leq \tilde{u}_R \leq u_{R+1} \leq \alpha+1.$$

Ceci implique que $\tilde{u}_R = u_R$ et donc : $u_R \leq u_{R+1}$.

Les arguments donnés en (i) montrent qu'alors : $\exists\, u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tq

$$u_R \to u \text{ dans } H^1_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

$$0 < \varepsilon\phi \leq u \leq \alpha+1, \text{ dans } \mathbb{R}^N,$$

et que u est sol de $-\Delta u = (\alpha - |x|^2)u - u^2$ dans $\mathbb{R}^N$.

q) D'après (j), (o) et (p), on en déduit que : $\boxed{A_\alpha =]\mu, +\infty[}$