Corrigé interrogation N°2

Exo 1

a) $$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x^2-x}\right)\frac{\left(x+\sqrt{x^2-x}\right)}{x+\sqrt{x^2-x}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-(x^2-x)}{x+\sqrt{x^2-x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}} \quad \frac{\cdot 1/x}{\cdot 1/x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$
$$= \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(1p)

b) $$\lim_{x\to0^+} x\ln(x^3) = \lim_{x\to0^+} 3x\ln x = 3\cdot 0 = \boxed{0}$$ (limite de référence vue en cours) (0,5p)

c) $$\lim_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} = \lim_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot\frac{3x}{5x}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\left(\frac{\sin(5x)}{5x}\right)^{-1}\cdot\frac{3}{5}$$
$$= 1\cdot 1^{-1}\cdot\frac{3}{5} \quad \text{car } \lim_{y\to0}\frac{\sin(y)}{y}=1$$
$$= \boxed{\frac{3}{5}}$$

(1p)

Exo 2 $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$.

a) c'est immédiat que $D_f = \mathbb{R}^*$ (0,5p)

b) Les fonctions x et $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composition de fonctions continue car le dénominateur de $\frac{1}{x}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. (1p)

c) Pour $x\neq0$, on a : $0\leq \left|x\sin(\frac{1}{x})\right| \leq x\cdot 1$. Or $x\to0$, le théorème des gendarmes implique donc que $\left|x\sin(\frac{1}{x})\right| \xrightarrow[x\to0]{} 0$ et ainsi $\boxed{\lim_{x\to0} f(x) = 0}$. Ceci implique que f se prolonge par continuité par $\tilde{f}$ définie par : $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & x\neq0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$

(1p)

Exo 3) Soit $P = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 7X^2 + 6X + 2$

a) On a que $P(-1) = (-1)^5 + 3(-1)^4 + 5(-1)^3 + 7(-1)^2 + 6(-1) + 2$

$= -1 + 3 - 5 + 7 - 6 + 2$

$= 0.$

Alors -1 est une racine de P. Pour déterminer sa multiplicité, on calcule : $P' = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 14X + 6$

Ainsi, $P'(-1) = 5 - 12 + 15 - 14 + 6 = 0$

On doit donc calculer $P'' = 20X^3 + 36X^2 + 30X + 14$

et donc $P''(-1) = -20 + 36 - 30 + 14 = 0$

2p

Il faut donc calculer : $P''' = 60X^2 + 72X + 30$

et $P'''(-1) = 60 - 72 + 30 = 18$

Par conséquent : $P(-1) = P'(-1) = P''(-1) = 0$ et $P'''(-1) \neq 0$, ce qui implique que -1 est une racine de multiplicité 3.

b) D'après (a), on a que $(X+1)^3 \mid P$. On fait la division euclidienne pour obtenir le quotient :

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 7X^2 + 6X + 2 & X^3 + 3X^2 + 3X + 1 \\ \cline{2-2} -(X^5 + 3X^4 + 3X^3 + X^2) & X^2 + 2 \\ \cline{1-1} 2X^3 + 6X^2 + 6X + 2 & \\ -(2X^3 + 6X^2 + 6X + 2) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

1p

Ainsi, $P = (X+1)^3 \cdot (X^2 + 2)$

Or les racines de $X^2 + 2$ sont $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$ ($\notin \mathbb{R}$), on obtient donc que la factorisation en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$\boxed{P = (X+1)^3 (X^2 + 2)}$$

1p

c) D'après (b), on en déduit que la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$\boxed{P = (X+1)^3 (X + i\sqrt{2})(X - i\sqrt{2})}$$

1p